دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده علوم ریاضی

آزمون پایان ترم ریاضی مهندسی　　　خرداد ۱۳۹۸　　　مدت آزمون ۱۸۰ دقیقه

---

۱. فرض کنید f تابع مختلط با ضابطه‌ی $f(z) = \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{z})$ باشد که در آن Log شاخه اصلی لگاریتم است. با ذکر دلیل مشخص کنید تابع f روی چه زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ تحلیلی است؟

۲. مجموعه‌ی $D := \{z \mid \frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}z < \pi\}$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر D را تحت نگاشت $f(z) = e^z$ به دست آورید.

ب) تصویر D را تحت نگاشت $f(z) = 1 + e^{-z}$ به دست آورید.

۳. به کمک فرمول انتگرال کوشی مطلوب است $\oint_\gamma \mathrm{Log}(1 + \frac{1}{z}) \frac{dz}{(z-2)^2}$ که در آن Log شاخه اصلی لگاریتم و γ دایره‌ی به مرکز $z = 2$ و شعاع ۱ در جهت مثبت است.

۴. مطلوب است بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ حول نقاط $z_0 = 0$ و $z_0 = 1$ و به ترتیب درون ناحیه‌ی محصور به دایره‌هایی به مرکز ۰ و ۱ و شعاعهای $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{2}$.

۵. مقدار انتگرال $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cosh \frac{1}{z}}{1-z} dz$ را به دست آورید.

۶. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_0^\infty \frac{\cos(3x)dx}{x^4 + 1}$ به کمک مانده‌های تابع مختلط مناسب.

بارم: هر پرسش ۲۰ نمره　　　**موفق باشید**

در صورت نیاز از چند فرمول زیر استفاده کنید.

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$