جواب سوال ۱

الف: ابتدا معادله را بفرم زیر بازنویسی می کنیم:

$$(xy^3)\,dy + \left(y^4 - \frac{\cos x}{x^2}\right)dx = 0$$

قرار دهید:

$$M = y^4 - \frac{\cos x}{x} \quad , \quad N = xy^3 \qquad 1$$

$$\Longrightarrow \quad M_y = 4y^3 \quad , \quad N_x = y^3$$

$$\Longrightarrow \quad M_y - N_x = 3y^3 \neq 0 \qquad 1$$

پس معادله کامل نیست. مشاهده می شود:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3y^3}{xy^3} = \frac{3}{x} = \varphi(x) \qquad 1$$

تنها تابعی از x است و در نتیجه عامل انتگرال ساز μ را برحسب x بصورت زیر داریم:

$$\frac{d\mu}{dx} = \varphi(x)\mu \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = 3\frac{dx}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mu(x) = x^3} \qquad 2$$

ب : با ضرب معادله مربوطه در عامل انتگرال‌ساز ۳ الف، داریم:

$$(x^4y^3)\,dy + (x^3y^4 - x\cos x)\,dx = 0 \qquad \boxed{*}$$ 2

قرار دهید:

$$\tilde{M} = x^3y^4 - x\cos x \quad , \quad \tilde{N} = x^4y^3$$

داریم:

$$\tilde{M}_y = \tilde{N}_x = 4x^3y^3$$ 2

بنابراین معادله $\boxed{*}$ کامل است و درنتیجه مانند ψ وجود دارد که:

$$\psi_x = \tilde{M} \quad , \quad \psi_y = \tilde{N}$$

2
$$\psi_y = \tilde{N} = x^4y^3 \implies \psi(x,y) = \frac{x^4y^4}{4} + g(x)$$
$$\psi_x = \tilde{M} \implies x^3y^4 + g'(x) = x^3y^4 - x\cos x$$ 2

$$\implies g'(x) = -x\cos x \implies g(x) = -x\sin x - \cos x + C_1$$

پس جواب معادله بصورت ضمنی

$$\frac{1}{4}x^4y^4 - x\sin x - \cos x = C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$ 2

است.

جواب سوال ۲ :

یادآوری : اگر x_1 و x_2 جواب های معادله دیفرانسیل

$$L[x] = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

باشند که در آن p و q روی بازه ای مانند I پیوسته هستند، در این صورت برای هر $t \in I$ ، $W(x_1, x_2)(t)$ یا صفر است یا هرگز در I صفر نمی شود.

4

الف) $$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2+1 & t \\ 2t & 1 \end{vmatrix} = t^2+1-2t^2$$

$$= 1-t^2 = 0 \longrightarrow t = \pm 1$$

8

پس $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ نمی توانند جواب باشند.

ب) $$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos t & t\cos t \\ -\sin t & \cos t - t\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 t - t\sin t\cos t + t\sin t\cos t = \cos^2 t = 0$$

$$\longrightarrow t = k\pi + \pi/2 \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

8

پس $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ نمی توانند جواب باشند.

ص ۳

جواب سوال ۳ :

الف) $W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}$ 2

$$= e^t \cdot e^t \cdot e^{-t} \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4e^t \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

و بنابراین y_1، y_2، y_3 مستقل خطی اند.

5.5

ب) از روش ضرایب نامعین یک جواب خاص بدست می‌آوریم.

فرض کنید $Y_1 = Ae^{3t}$ 2.5 , $Y_2 = B_1 \sin t + B_2 \cos t$ 2.5 ,

$L[Y_1] = 4e^{3t}$, $L[Y_2] = 4\sin t$

با جایگذاری مقادیر زیر بدست می‌آید:

2.5 $A = 1/4$, $B_1 = B_2 = 3/4$ 2.5

و درنتیجه:

$y_p = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{4} e^{3t} + \frac{3}{4} \sin t + \frac{3}{4} \cos t$ 2.5

ص ۳

جواب سوال ۴:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

5

فرض کنید: $\vec{X}=\vec{\xi}e^{rt}$

$$(A-rI)\vec{\xi}=\vec{0}\quad,\quad \det(A-rI)=\begin{vmatrix}2-r&1\\1&2-r\end{vmatrix}=(2-r)^2-1=0$$

$$(2-r)^2=1\Rightarrow 2-r=\pm1\Rightarrow\begin{cases}r_1=1\\r_2=3\end{cases}$$

حال به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\vec{\xi}$:

$$r_2=3\rightarrow A-r_2I=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\quad,\quad(A-r_2I)\vec{\xi}_2=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_2^{(1)}\\\xi_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\xi_2^{(1)}+\xi_2^{(2)}=0\\\xi_2^{(1)}-\xi_2^{(2)}=0\end{cases}\Rightarrow\xi_2^{(1)}=\xi_2^{(2)}$$

$$\rightarrow\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}\xi_2^{(1)}\\\xi_2^{(2)}\end{pmatrix}=\xi_2^{(1)}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\longrightarrow$$ بردار ویژه متناظر $r_2=3$ $=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2.5

$$r_1=1\Rightarrow A-r_1I=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad,\quad(A-r_1I)\vec{\xi}_1=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1^{(1)}\\\xi_1^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}=0\\\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}=0\end{cases}\Rightarrow\xi_1^{(1)}=-\xi_2^{(2)}$$

$$\Rightarrow\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}\xi_1^{(1)}\\\xi_1^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1^{(1)}\\-\xi_1^{(1)}\end{pmatrix}=\xi_1^{(1)}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

2.5

بردار ویژه متناظر $r_1=1$

ص ۵

بنابراین جواب های مستقل خطی بصورت زیر بدست می آیند:

$$\vec{X}^{(1)}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{X}^{(2)}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

و درنتیجه جواب عمومی بصورت زیر است:

$$\vec{X}(t) = c_1 X^{(1)}(t) + c_2 X^{(2)}(t)$$

$$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{X}(t) = X^{(1)}(t) + 2X^{(2)}(t)$$

جواب مسئله مقدار اولیه

5

۵. حل عمومی معادله‌ی زیر را پیدا کنید.
راهنمایی: یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس مورد نظر برابر ۱ − است.

$$Y' = AY,$$
$$A = \begin{bmatrix} -۷ & -۱۲ & -۳ \\ ۴ & ۷ & ۲ \\ -۱ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}. \tag{۱}$$

حل. اگر حلی نظیر

$$Y = \exp(\lambda t)X \tag{۲}$$

را در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱) قرار دهیم و از طرفین معادله ضریب $\exp(\lambda t)$ را حذف کنیم به دست می‌آید

$$AX = \lambda X. \tag{۳}$$

بدین ترتیب برای این که حل پیشنهادی جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل باشید، رابطه‌ی فوق باید برقرار گردد. طبق تعریف، بردار ویژه‌ی X ماتریس A، برداری ناصفر است که معادله بالا را ارضا کند. در این معادله λ مقدار ویژه‌ی متناظر با این بردار ویژه است. با بردن سمت راست این معادله به سمت چپ و فاکتور گیری داریم

$$(A - \lambda I)X = ۰, \tag{۴}$$

و برای این که این دستگاه معادلات جبری خطی جواب غیر صفر داشته باشد، دترمینان ماتریس ضرایب آن باید صفر شود. بدین ترتیب خواهیم داشت

$$\det(A - \lambda I) = ۰. \tag{۵}$$

برای ماتریس مورد نظر در سوال، معادله‌ی (۵) به صورت زیر خواهد بود

$$\det \begin{bmatrix} -۷-\lambda & -۱۲ & -۳ \\ ۴ & ۷-\lambda & ۲ \\ -۱ & -۲ & ۳-\lambda \end{bmatrix} = ۰. \tag{۶}$$

5

که پس از ساده‌سازی به صورت زیرین درمی‌آید

$$\lambda^۳ - ۳\lambda^۲ - ۴ = ۰. \tag{۷}$$

با استفاده از راهنمایی سوال و انجام عملیات فاکتورگیری برای چندجمله‌ای درجه‌ی سوم در (۷) می‌توان نشان داد

$$(\lambda + ۱)(\lambda - ۲)^۲ = ۰. \tag{۸}$$

به عنوان مثال می‌توان از تقسیم چند جمله‌ای $۴ - ۳\lambda^۲ - \lambda^۳$ بر $\lambda + ۱$ استفاده کرد و خارج قسمتی به صورت $\lambda^۲ - ۴\lambda + ۴$ را به دست آورد. بدین ترتیب مقادیر ویژه‌ی ماتریس A خواهند بود

$$\lambda_۱ = -۱, \qquad \lambda_۲ = ۲. \tag{۹}$$

5

برای پیدا کردن بردارهای ویژه، مقادیر ویژه‌ی به دست آمده در (۹) را در معادله‌ی (۴) قرار می‌دهیم. بدین ترتیب داریم

$$(A - \lambda_۱ I)X_۱ = ۰, \qquad (A - \lambda_۲ I)X_۲ = ۰. \tag{۱۰}$$

دقت کنید با توجه به این امر که $\lambda_۲$ ریشه‌ی مضاعف است، باید بررسی کنیم که آیا می‌توان دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه یافت یا خیر. به بیان دیگر، آیا

$$\dim \mathrm{Null}(A - \lambda_۲ I) = ۲ \tag{۱۱}$$

ص ۷

برقرار است؟ در این مسئله جواب خیر است! پس از انجام محاسبات، بردارهای ویژه را می‌توان به صورت زیر پیدا کرد

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{۱۲}$$

5

که X_i بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_i است. توجه شود که ضریب دلخواهی از بردارهای فوق نیز می‌توانند بردار ویژه باشند، در واقع اگر X بردار ویژه‌ی متناظر با λ باشد، aX نیز بردار ویژه‌ی متناظر با λ است. بدین ترتیب، تا به اینجا دو حل زیرین را داریم

$$Y_1 = \exp(\lambda_1 t)X_1, \qquad Y_2 = \exp(\lambda_2 t)X_2. \tag{۱۳}$$

5

همچنان به حل دیگری نیاز داریم تا بتوانیم حل عمومی را به صورت ترکیب خطی‌ای از این سه حل ارائه کنیم. حل سوم را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم

$$Y_3 = t\exp(\lambda_2 t)X_2 + \exp(\lambda_2 t)X_2^* \tag{۱۴}$$

که X_2^* بردار ثابت دلخواهی است که باید تعیین شود. با قرار دادن این حل در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱) به دست می‌آید

$$\lambda_2 t\exp(\lambda_2 t)X_2 + \exp(\lambda_2 t)X_2 + \lambda_2 \exp(\lambda_2 t)X_2^* = t\exp(\lambda_2 t)AX_2 + \exp(\lambda_2 t)AX_2^*. \tag{۱۵}$$

حذف $\exp(\lambda_2 t)$ از طرفین معادله نتیجه می‌دهد

$$\lambda_2 tX_2 + X_2 + \lambda_2 X_2^* = tAX_2 + AX_2^*. \tag{۱۶}$$

با استفاده از $AX_2 = \lambda_2 X_2$ و مرتب کردن عبارت‌ها داریم

$$(A - \lambda_2 I)X_2^* = X_2. \tag{۱۷}$$

در نهایت، با اعمال کردن $(A - \lambda_2 I)$ به طرفین معادله‌ی بالا و توجه به این نکته که $(A - \lambda_2 I)X_2 = 0$ برقرار است، به دست می‌آوریم

$$(A - \lambda_2 I)^2 X_2^* = 0, \tag{۱۸}$$

که همواره یک جواب غیر صفر دارد چرا که می‌دانیم $\det(A - \lambda_2 I)^2 = 0$ برقرار است. X_2^* یک بردار ویژه‌ی تعمیم‌یافته‌ی ماتریس A نامیده می‌شود که می‌بایست مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم‌یافته‌ی (۱۸) را ارضا کند. بردار دلخواه Z در $\mathrm{Null}(A - \lambda_2 I)^2$ را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$Z = a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{۱۹}$$

و از طرفی می‌دانیم که $X_2^* \in \mathrm{Null}(A - \lambda_2 I)^2 - \mathrm{Null}(A - \lambda_2 I)$ برقرار است. بنابراین انتخاب می‌کنیم

$$X_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{۲۰}$$

5

در نهایت حل پایانی به صورت زیرین نوشته می‌شود

$$Y = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3.$$

5