

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی



فروردین ۱۳۹۸

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل، کد درس: ۲۲۰۳۴

زمان: ۳ ساعت

اساتید درس: زنگنه، صفدری، یوسف نژاد

- بارم سوالات در مجموع ۱۰ نمره درس را دارد.
- پاسخ سوالات را در پاسخنامه به ترتیب صعودی بنویسید.
- هر سوال را روی یک برگه و ادامه آنرا پشت همان برگه بنویسید.

۱. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. (۱/۵ نمره)

$$xy^3 \frac{dy}{dx} + y^4 = \frac{\cos x}{x^2}, \quad x > 0, y > 0$$

الف) یک عامل انتگرال ساز بر حسب x برای این معادله بیابید.
ب) با استفاده از عامل انتگرال ساز بدست آمده در قسمت "الف" جواب این معادله را بدست آورید.

۲. کدام یک از موارد ذکر شده می تواند جواب های معادله ی دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم

$$x'' + p(t)x' + h(t)x = 0$$

باشند و چرا؟ (توابع $p(t)$ و $h(t)$ روی اعداد حقیقی پیوسته هستند.) (۲ نمره)

الف) $x_2(t) = t, x_1(t) = t^2 + 1$

ب) $x_2(t) = t \cos t, x_1(t) = \cos t$

۳. می‌دانیم توابع $y_1(t) = e^t$ ، $y_2(t) = te^t$ و $y_3(t) = e^{-t}$ جواب‌های معادله دیفرانسیل همگن

$$L(y) = y''' - y'' - y' + y = 0$$

است. (۲ نمره)

الف) نشان دهید جوابهای بالا مستقل خطی هستند.

ب) یک جواب خاص معادله

$$L(y) = 3 \sin t + 4e^{3t}$$

را پیدا کنید.

۴. جواب مسأله‌ی مقدار اولیه زیر را پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۵. جواب عمومی معادله‌ی زیر را پیدا کنید. (۳ نمره)

(راهنمایی: یکی از مقادیر ویژه ماتریس مورد نظر برابر با -1 است)

$$Y' = \begin{pmatrix} -7 & -12 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} Y$$