بسمه تعالی

۱) اگر تابع f در نقطهٔ x_0 و تابع g در نقطهٔ $y_0=f(x_0)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع gof در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با $g'(y_0).f'(x_0)$.

۴ نمره

چون تابع g در نقطهٔ y_0 مشتق‌پذیر است برای y های نزدیک y_0 داریم

$$g(y)=g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)+\underbrace{(y-y_0)E(y-y_0)}_{\text{خطای تقریب خطی}}$$

۳ نمره

که برای تابع E داریم $\lim_{h\to 0}E(h)=0$. اگر در بالا قرار دهیم $y=f(x_0+h)$ ، $y_0=f(x_0)$ داریم:

۲ نمره

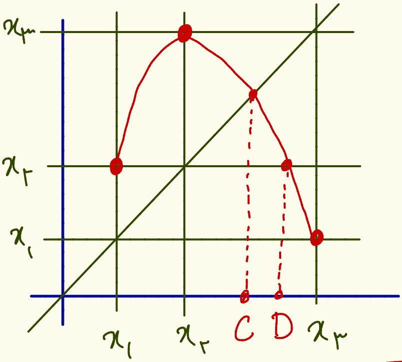
$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}=\frac{[g'(y_0)+E(y-y_0)](y-y_0)}{h}=[g'(y_0)+E(y-y_0)]\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

از آنجایی که عبارت های داخل پرانتز زمانی که h به صفر میل می‌کند حد دارند و حد آنها به ترتیب $f'(x_0)$ ، $g'(y_0)$ است

پس داریم:

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{gof(x_0+h)-gof(x_0)}{h}=g'(y_0)f'(x_0)$$

۱ نمره



۲) تابع $g(x)=f(x)-x$ پیوسته است و در x_2 مثبت و در x_3 منفی است بنابراین $x_2<C<x_3$ وجود دارد که ۱ نمره

$g(C)=0 \Rightarrow f(C)=C$ ۳ نمره

۴ نمره

از آنجا که $x_2<C$ و مقدار تابع پیوسته f در نقطه C بیشتر از x_2 و در نقطه x_3 کمتر از x_2 است بنابراین $C<D<x_3$ وجود دارد که ۱ نمره $f(D)=x_2$ ۲ نمره

بنابراین داریم $f\circ f(x_3)=x_2$ و $f\circ f(D)=x_3$. حال کافی است تابع پیوسته

۳ نمره

$h(x)=f(f(x))-x$ را روی بازه $[D,x_3]$ در نظر بگیریم. برای آن داریم:

۳ نمره

$$h(D)=x_3-D>0 \quad \text{و} \quad h(x_3)=x_2-x_3<0$$

بنابراین $C<D<C_2<x_3$ وجود دارد که ۱ نمره $h(C_2)=0$. یعنی $f(f(C_2))=C_2$ ۲ نمره

۳) ابتدا توجه می‌کنیم نقطهٔ $(1,2)$ در هر دو رابطه صدق می‌کند

$$F(x,y)=x^2+2xy+2y^2-14+\cos(xy-2)$$ ۱ نمره

$$F(1,2)=1+4+8-14+\cos(2-2)=0$$

$$G(x,y)=2x^2+8xy-5y^2+1+\cos(xy-2)$$ ۱ نمره

$$G(1,2)=2+16-20+1+\cos(2-2)=0$$

حال توجه می‌کنیم که هر یک از منحنی‌های بالا نزدیک نقطهٔ $(1,2)$ نمودار تابعی مشتق‌پذیر برحسب x است (یعنی y نقاط آن منحنی‌ها تابعی مشتق‌پذیر برحسب x است) برای نشان دادن این موضوع فرض می‌کنیم در هر یک از رابطه‌های $F(x,y)=0$ و $G(x,y)=0$، y تابعی مشتق‌پذیر است و از آن رابطه مشتق می‌گیریم و نشان می‌دهیم مشتق (y') آن قابل محاسبه است. بنابراین طبق قضیهٔ تابع ضمنی فرض اینکه y تابعی مشتق‌پذیر نسبت به x است درست است و مشتق بدست آمده هم مشتق آن تابع است:

(استفاده درست از قضیهٔ تابع ضمنی: ۰/۵ نمره)

۰/۴
$$\begin{cases} 2x+2y+2xy'+4yy'-y\sin(xy-2)-xy'\sin(xy-2)=0 \\ x=1,y=2 \implies 2+4+2y'+8y'-0-0=0 \implies y'=-\frac{6}{10}=\frac{-3}{5} \end{cases}$$

۰/۴
$$\begin{cases} 4x+8y+8xy'-10yy'-y\sin(xy-2)-xy'\sin(xy-2)=0 \\ x=1,y=2 \implies 4+16+8y'-20y'-0-0=0 \implies y'=\frac{20}{12}=\frac{5}{3} \end{cases}$$

از آنجا که حاصل‌ضرب شیب‌های خط‌های مماس بر این دو شکل در نقطهٔ $(1,2)$ برابر -1 شده پس این دو در نقطهٔ $(1,2)$ برهم عمودند.

۱ نمره

$$f(x) = \tan^{-1}(x)$$

(۲ نمره) $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\tan(f(x)) = x \Rightarrow \tan'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\tan'(f(x))} = \frac{1}{1+(\tan(f(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}}$$

(۱ نمره) $$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

(۱ نمره) $$f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\left(4(1+x^2)x\right)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

(۱ نمره) $$\frac{1}{2} f^{(4)}(x) = \frac{6x(1+x^2)^3 - (3x^2-1)\left[6(1+x^2)^2 x\right]}{(1+x^2)^6} = \frac{12x(1-x^2)}{(1+x^2)^5}$$

چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ ۲ تابع f متناظر نقطه ۱ :

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(x)}{2}(x-1)^2 = \pi + \frac{(x-1)}{2} - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$P_2(0.97) = \pi - \frac{3}{200} + \frac{9}{40000} = A$$

(۳ نمره)

(۴ نمره)

طبق قضیه تیلور

$$\boxed{f(0.97) - A = \frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-1)^3 = -\frac{9}{2} \times 10^{-6} \cdot f^{(3)}(c)}$$

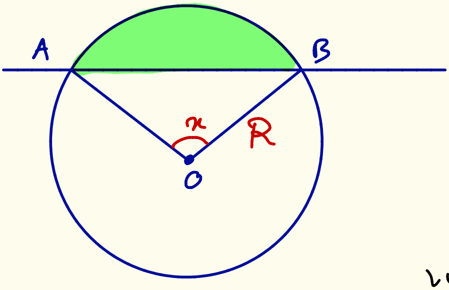
که در بالا $\boxed{\frac{97}{100} < c < 1}$. از آنجا که $f^{(3)}(c) > 0$ بنابراین $f(0.97)$ کمتر از A است و (۱ نمره)

برای اینکه تقریبی از اینکه چقدر کمتر است را بیابیم کافی است کرانی برای $f^{(3)}(c)$ بیابیم.

از آنجا که برای $x<1$ داریم $f^{(4)}(x) > 0$ بدست می‌آید که برای این xها $f^{(3)}$ صعودی است

در نتیجه $f^{(3)}(c) < f^{(3)}(1) = \frac{1}{2}$. بنابراین بهترین تقریب بازه برابر است با $\left[A - \frac{9}{4\times 10^6}, A\right]$

(۲ نمره)



۵) فرض کنید حصار، کمانی از دایره‌ای به شعاع R است و روبروی زاویهٔ مرکزی x قرار دارد.

از آنجا که طول حصار ۱۰۰ متر است داریم $Rx=100$

بنابراین $R=\frac{100}{x}$. مساحت محوطه نیز برابر است با (۱ نمره)

$$\frac{x}{2\pi}(\pi R^2) - \frac{R^2}{2}\sin x = \frac{R^2}{2}(x-\sin x) = \frac{100^2}{2}\left(\frac{x-\sin x}{x^2}\right)$$ (۴ نمره)

حال می‌خواهیم x را به گونه‌ای بیابیم که عبارت بالا بیشترین مقدار ممکن باشد. برای این کار بیشینه تابع $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^2}$ را می‌یابیم.

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}-\left[\frac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}\right] = -\frac{1}{x^2}(1+\cos x)+\frac{2\sin x}{x^3}$$ (۴ نمره)

$$f'(x)=0 \iff x(1+\cos x)=2\sin x$$

$$\iff 2\theta(2\cos^2\theta)=4\sin\theta\cos\theta \qquad (x=2\theta)$$

$$\iff \begin{cases}\cos\theta=0\\ \tan\theta=\theta\end{cases}$$ (۲ نمره)

$\tan\theta-\theta$ روی $[0,\frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است زیرا مشتق آن برابر است با $\tan^2\theta$ و مثبت است. (۲ نمره)
بنابراین تنها زمانی صفر می‌شود که $\theta=0$. و برای $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ نیز $\tan\theta$ منفی است. بنابراین معادله دوم نمی‌تواند برقرار باشد. بنابراین تنها جواب $f'(x)=0$ برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ (یعنی $x=\pi$) برقرار است.

تابع f تنها یک نقطه بحرانی درون بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد. برای اینکه نشان دهیم این نقطه ماکزیمم تابع f است باید روی مرز را نیز بررسی کنیم

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0,\quad f(2\pi)=\frac{1}{2\pi},\quad f(\pi)=\frac{1}{\pi}$$ (۲ نمره)

۴) ابتدا به کمک قاعده هوپیتال حد $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x^{\frac{1}{a}})}{(1-x^{\frac{1}{b}})}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=(1-x^{\frac{1}{a}})\\ g(x)&=(1-x^{\frac{1}{b}})\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}g(x)=0$$

۲ نمره

۵ نمره

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=-\frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}\\ g'(x)&=-\frac{1}{b}x^{\frac{1}{b}-1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{b}{a}x^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{b}{a}$$

بنابراین حد نسبت مشتق‌های f و g وجود دارد و برابر است با $\frac{b}{a}$

همچنین توجه می‌کنیم که در همسایگی ۱، $g'(x)\neq0$. بنابراین طبق قضیه هوپیتال حد زیر وجود دارد و داریم:

۱ نمره

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-x^{\frac{1}{a}})}{(1-x^{\frac{1}{b}})}=\frac{b}{a}$$

۲ نمره

کل نکتهٔ بالا ۱۵ نمره

حال حد مورد نظر در مسئله به صورت حاصلضرب عبارت‌های به شکل بالا است. بنابراین این حاصلضرب نیز حد دارد و داریم:

۲ نمره

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-x^{1/2})^{2}(1-x^{1/4})^{4}(1-x^{1/9})^{9}}{(1-x^{1/3})^{3}(1-x^{1/5})^{5}(1-x^{1/7})^{7}}=$$

۲ نمره

$$\left[\lim\frac{(1-x^{1/2})}{(1-x^{1/3})}\right]^{2}\left[\lim\frac{(1-x^{1/4})}{(1-x^{1/5})}\right]^{4}\left[\lim\frac{(1-x^{1/9})}{(1-x^{1/7})}\right]^{7}\left[\lim\frac{(1-x^{1/9})}{(1-x^{1/3})}\right]\left[\lim\frac{(1-x^{1/9})}{(1-x^{1/5})}\right]$$

$$=\frac{3^{2}}{2^{2}}\cdot\frac{5^{4}}{4^{4}}\cdot\frac{7^{7}}{9^{7}}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{3^{3}\cdot5^{5}\cdot7^{7}}{2^{2}\cdot4^{4}\cdot9^{9}}$$

۱ نمره

راه حل دیگر:

ابتدا توجه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{\frac{1}{a}})}{(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{a}}-1^{\frac{1}{a}}}{x-1}$$

۴ نمره

$$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)'\Big|_{x=1} = \frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}\Big|_{x=1} = \frac{1}{a} \neq 0$$

۴ نمره حال کافی است صورت و مخرج کسر مورد نظر را در $(1-x)^{15}$ ضرب و تقسیم کنیم به این ترتیب داریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^2(1-x^{\frac{1}{4}})^4(1-x^{\frac{1}{9}})^9}{(1-x^{\frac{1}{3}})^3(1-x^{\frac{1}{5}})^5(1-x^{\frac{1}{7}})^7} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1-x}\right)^2\left(\frac{1-x^{\frac{1}{4}}}{1-x}\right)^4\left(\frac{1-x^{\frac{1}{9}}}{1-x}\right)^9}{\left(\frac{1-x^{\frac{1}{3}}}{1-x}\right)^3\left(\frac{1-x^{\frac{1}{5}}}{1-x}\right)^5\left(\frac{1-x^{\frac{1}{7}}}{1-x}\right)^7}$$

۴ نمره

۴ نمره عبارت بالا حاصلضرب و تقسیم عبارت‌هایی است که هر یک در $x=1$ حد دارد و حدّ آن نیز ناصفر است

بنابراین حد عبارت بالا وجود دارد و برابر است با

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{9}\right)^9}{\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{1}{7}\right)^7} = \frac{3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7}{2^2 \cdot 4^4 \cdot 9^9}$$

۱ نمره