

به نام خدا
 دانشگاه صنعتی شریف
 دانشکده علوم ریاضی



مدت امتحان: ۳ ساعت
 ۲۹ فروردین ۱۳۹۷

معادلات دیفرانسیل (۲۲۰۳۴)
 کلید امتحان میان ترم (همه‌ی گروه‌ها)

- استفاده از ماشین حساب به هیچ وجه مجاز نیست.
- در آزمون، پاسخ سوالات را به ترتیب و هر یک را در برگه جداگانه‌ای از پاسخنامه بنویسید.
- اگر از گزاره‌ای در کتاب، برای حل سوالها استفاده می‌کنید، لازم است گزاره مورد نظر را ابتدا به صورت شفاف و دقیق بیان کرده و سپس آن را بکار گیرید.

۱. الف) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم با ضرایب ثابت زیر

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y = 0$$

را بیابید که توابع زیر در آن صدق کنند (توجه کنید که $y^{(n)}$ یعنی مشتق مرتبه n -ام). (۱۰ نمره)

$$\sin t, \quad \cos t, \quad t \sin t, \quad t \cos t.$$

پاسخ. با توجه به جوابها، معادله مشخصه باید به صورت

$$(\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 = 0 \iff (\lambda^2 + 1)^2 = \lambda^4 + 2\lambda + 1 = 0$$

باشد. پس

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0 \iff y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

در مجموع ۱۰ نمره برای محاسبه ضرایب و به دست آوردن معادله دیفرانسیل.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

ب) با ضرایب به دست آمده در قسمت قبل، جواب عمومی معادله ناهمگن زیر را به دست آورید (۱۰ نمره)

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y = t^2 + t \sin t.$$

پاسخ. با توجه به اصل برهم نهی یک جواب خصوصی برای هر یک از معادلات

$$\begin{cases} y_1^{(4)} + 2y_1'' + y_1 = t^2 \\ y_2^{(4)} + 2y_2'' + y_2 = t \sin t = \frac{te^{it} - te^{-it}}{2i} = \frac{te^{it} - \overline{te^{it}}}{2i}. \end{cases}$$

می‌یابیم و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم تا یک جواب خصوصی برای معادله $y^{(4)} + 2y'' + y = t^2 + t \sin t$ به دست آوریم.

$$y_1 = at^2 + bt + c \implies \forall t \quad t^2 = 4a + at^2 + bt + c \implies a = 1, b = 0, c = -4$$

$$\implies y_1 = t^2 - 4.$$

در مجموع ۲ نمره برای محاسبه y_1 .

برای محاسبه y_2 فرض می‌کنیم جواب به صورت $y_2 = \frac{q(t)e^{it} - \overline{q(t)e^{it}}}{2i}$ باشد. برای $z(t) := q(t)e^{it}$ داریم

$$z(t) = q(t)e^{it}$$

$$z'(t) = [q'(t) + iq(t)]e^{it}$$

$$z''(t) = [q''(t) + 2iq'(t) - q(t)]e^{it}$$

$$z^{(3)}(t) = [q^{(3)}(t) + 3iq''(t) - 3q'(t) - iq(t)]e^{it}$$

$$z^{(4)}(t) = [q^{(4)}(t) + 4iq^{(3)}(t) - 6q''(t) - 4iq'(t) + q(t)]e^{it}$$

حتی با استفاده از فرمول لایب نیتس برای مشتقات fg نیازی به محاسبه مشتق اول و سوم نیست، زیرا که در معادله ظاهر نمی‌شوند. اکنون با قرار دادن $z(t)$ در معادله $z^{(4)} + 2z'' + z = te^{it}$ دیده می‌شود که

$$e^{it}[q^{(4)}(t) + 4iq^{(3)}(t) - 6q''(t) + q(t)] = te^{it}.$$

پس $q(t) = At^3 + Bt^2$ و با قرار دادن آن در معادله بالا داریم

$$\forall t \quad 24iA - 24At - 8B = t$$

و در نتیجه $A = -\frac{1}{24}$ و $B = -\frac{i}{8}$. از طرفی $y_2 = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. پس

$$y_2 = -\frac{t^3}{24} \sin t - \frac{t^2}{8} \cos t.$$

در مجموع ۲ نمره برای محاسبه y_2 .

در نهایت جواب عمومی معادله به صورت زیر است.

$$c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 t \sin t + c_4 t \cos t + (t^2 - 4) + \left[-\frac{t^3}{24} \sin t - \frac{t^2}{8} \cos t \right]$$

در مجموع ۱ نمره برای محاسبه جواب نهایی.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۲. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x'(t) = x^\alpha(t), \quad x(0) = 0.$$

الف) آیا برای $0 < \alpha < 1$ معادله بالا جواب یکتا دارد؟ چرا؟ (۱۰ نمره)

پاسخ. برای $\alpha \in (0, 1)$ ، $\frac{\partial}{\partial x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ ، در $x = 0$ پیوسته نیست. پس نمی‌توان از قسمت یکتایی قضیه وجود و یکتایی استفاده کرد. به روشنی تابع ثابت صفر در معادله صدق می‌کند. افزون بر آن اگر $x(t)$ جوابی باشد که

برای $t \in [0, a]$ برابر صفر و برای $t > a$ داشته باشیم $x(t) \neq 0$ ، داریم

$$\frac{x'}{x^\alpha} = 1 \iff \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^t = t - a$$

$$\implies x(t) = [(1-\alpha)(t-a)]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

به عبارت دیگر برای هر $a \geq 0$ یک جواب برای معادله یافتیم که برای a مختلف باهم متفاوت هستند. پس این معادله با این شرط اولیه جواب یکتا ندارد.

البته معرفی دو جواب متفاوت برای معادله با شرط اولیه داده شده، به تنهایی یکتایی جواب را نقض می‌کند.

در مجموع ۱۰ نمره برای اینکه با استدلال درست یکتا نبودن جواب را نشان داده شود.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

ب) برای $\alpha \geq 1$ همه جوابهای این معادله را به دست آورید. (۱۰ نمره)

پاسخ. برای $\alpha \in [1, +\infty)$ ، $\frac{\partial}{\partial x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ ، در $x = 0$ پیوسته است. پس می‌توان از قضیه وجود و یکتایی استفاده کرد. به روشنی تابع ثابت صفر در معادله صدق می‌کند. پس تنها جواب معادله تابع ثابت صفر است.

در مجموع ۱۰ نمره برای به دست آوردن جواب و اینکه جواب یکتاست.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۳. معادله مرتبه اول $x^2 + y = xy'$ را در نظر بگیرید. یک جواب $y(x)$ از این معادله که روی کل \mathbb{R} تعریف شده باشد را

بیابید به طوری که $y(1) = 2$. آیا این جواب یکتاست؟ (۲۰ نمره)

پاسخ. چون معادله کامل نیست، عامل انتگرال ساز بر حسب x را برای حل آن امتحان می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y)\mu(x)] &= \mu(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} [-x\mu(x)] &= -\mu(x) - x\mu'(x) \\ \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y)\mu(x)] &= \frac{\partial}{\partial x} [-x\mu(x)] \end{aligned} \right\} \implies -\mu(x) - x\mu'(x) = \mu(x)$$

$$\implies x\mu'(x) + 2\mu(x) = 0.$$

پس با فرض $x \neq 0$ ، $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ می‌تواند به عنوان عامل انتگرال ساز بکار گرفته شود. پس با این عامل انتگرال ساز

داریم

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) &= (x^2 + y)\mu(x) = 1 + \frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) &= -\frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \implies F(x, y) = \int -\frac{1}{x} dy = \frac{-y}{x} + f(x)$$

$$\implies 1 + \frac{y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{y}{x^2} + f'(x) \implies 1 = f'(x) \implies f(x) = x + k$$

$$\implies F(x, y) = x - \frac{y}{x} = c. \quad (x \neq 0)$$

در مجموع ۱۰ نمره برای به دست آوردن جواب (جواب موضعی).

راه حل بالا در بازه $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ ، طبق قضیه وجود و یکتایی جواب، جوابها برای هر شرط اولیه $x_0 \neq 0$ و y_0 (در ناحیه مورد بررسی) به صورت

$$x - \frac{y}{x} = x_0 - \frac{y_0}{x_0} = c \iff y = x^2 - cx$$

خواهند بود. اکنون با شرط اولیه $x = 1$ و $y = 2$ تساوی پایین را داریم.

$$x - \frac{y}{x} = c = 1 - \frac{2}{1} = -1$$

با توجه به اینکه شرط اولیه در زمان مثبت داده شده است، پس جواب در ناحیه $x > 0$ به صورت $y = x^2 + x$ است. از طرفی با توجه به خود معادله، باید بتوان در طرفین $x^2 + y = xy'$ مقدار $x = 0$ را قرار داد. پس باید تابع y در مبدا نیز مشتق پذیر باشد. در نتیجه اگر به دنبال جوابی از معادله بر \mathbb{R} هستیم باید c مناسبی را پیدا کنیم که

$$-c = 2x - c|_{x=0} = y'_-(0) = y'_+(0) = 2x + 1|_{x=0} = 1 \implies c = -1.$$

پس جواب سرتاسری همان $y = x^2 + x$ و در نتیجه یکتاست.

در مجموع ۱۰ نمره برای به دست آوردن جواب سرتاسری.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۴. نشان دهید دو تابع برداری با ضابطه های

$$\begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ \cos^2 t \end{pmatrix}$$

مستقل خطی هستند. آیا دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی مانند $X'(t) = A(t)X(t)$ وجود دارد که درایه های ماتریس $A(t)$ در \mathbb{R} پیوسته باشند و ماتریس جواب اساسی آن

$$\begin{pmatrix} e^t & e^t \sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$$

باشد؟ (۱۰ نمره)

پاسخ. ابتدا استقلال خطی دو تابع برداری را ثابت می کنیم. برای این منظور فرض می کنیم

$$\begin{aligned} \forall t \quad A \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \iff \forall t \quad \begin{pmatrix} e^t & e^t \sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

از طرفی

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} e^t & e^t \sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix} = e^t \cos 2t$$

برای $W(t) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ که $t \neq \frac{(2k+1)\pi}{4}$ پس باید A و B باید هر دو صفر باشند و این به معنای استقلال خطی دو تابع برداری مورد نظر سوال است.

در مجموع ۵ نمره برای نشان دادن استقلال خطی این دو تابع برداری.

از طرفی دیگر اگر این دو تابع برداری و مستقل خطی، جوابهای یک دستگاه خطی $X'(t) = A(t)X(t)$ با درایه‌های پیوسته $A(t)$ بر \mathbb{R} باشد، طبق قضیه آبل باید رونسکین آن دو یا همان تابع W قسمت بالا، همیشه صفر یا هیچ جا ناصفر باشد. اما

$$\begin{cases} t \neq \frac{(2k+1)\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} & W(t) \neq 0 \\ t = \frac{(2k+1)\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} & W(t) = 0. \end{cases}$$

پس دستگاه معادلات دیفرانسیل $X'(t) = A(t)X(t)$ با درایه‌های پیوسته $A(t)$ بر \mathbb{R} وجود ندارد که این دو تابع برداری جوابهای آن باشند.

در مجموع ۵ نمره برای اینکه با برهان درست ثابت شود چنین معادله دیفرانسیلی وجود ندارد.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۵. دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

را حل کنید. (۲۰ نمره)

پاسخ. ابتدا مقادیر ویژه ماتریس مورد نظر سوال را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 9] - 2 \times 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 13] = 0 \\ \implies \lambda_1 &= 1, \lambda_2 = 1 + \sqrt{13}, \lambda_3 = 1 - \sqrt{13} \end{aligned}$$

در مجموع ۶ نمره برای به دست آوردن مقادیر ویژه.

در گام به بعدی به محاسبه برداری ویژه این مقادیر می‌پردازیم.

برای $\lambda_1 = 1$ داریم

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

پس یک کاندید برای بردار ویژه متناظر با آن می‌تواند بردار $\xi_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ باشد. برای $\lambda_2 = 1 + \sqrt{13}$ داریم

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{13} & 2 & 0 \\ 2 & -\sqrt{13} & 3 \\ 0 & 3 & -\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

پس یک کاندید برای بردار ویژه متناظر با آن می‌تواند بردار $\xi_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$ باشد. برای $\lambda_1 = 1 - \sqrt{13}$ داریم

$$\begin{pmatrix} \sqrt{13} & 2 & 0 \\ 2 & \sqrt{13} & 3 \\ 0 & 3 & \sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

پس یک کاندید برای بردار ویژه متناظر با آن می‌تواند بردار $\xi_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$ باشد.

در مجموع ۶ نمره برای به‌دست آوردن برداری ویژه.

پس جواب عمومی به صورت

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} c_1 e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix} c_2 e^{(1+\sqrt{13})t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix} c_3 e^{(1-\sqrt{13})t} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{13} & -\sqrt{13} \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+\sqrt{13})t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-\sqrt{13})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

است. اکنون با توجه به شرط اولیه داریم

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{13} & -\sqrt{13} \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow c_3 = c_2 \Rightarrow \begin{cases} 3c_1 + 4c_2 = 7 \\ -2c_1 + 6c_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{25}{13}, c_2 = \frac{4}{13}.$$

در مجموع ۶ نمره برای محاسبه ضرایب c_1 و c_2 و c_3 .

پس جواب آخر به صورت زیر خواهد بود.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{25}{13} e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{13} e^{(1+\sqrt{13})t} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{13} e^{(1-\sqrt{13})t} \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$$

در مجموع ۲ نمره برای جواب نهایی.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۶. برای $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ دسته خمهای $y = cx^2 + \frac{1}{c}$ را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیل را بیابید که این خمها در آن صدق

کنند. آیا معادله دیفرانسیلی که به دست آورده‌اید به غیر از این خمها و تابع $y = 2x$ جواب دیگری نیز دارد؟

(۱۰ نمره)

پاسخ.

$$y = cx^2 + \frac{1}{c} \Rightarrow y' = 2cx$$

با فرض $c \neq 0$ ، x ، c را حذف می‌کنیم. داریم

$$c = \frac{y'}{2x} \Rightarrow y = \frac{y'}{2x} x^2 + \frac{2x}{y'} \Rightarrow 2yy' = x(y')^2 + 4x.$$

در مجموع ۵ نمره برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل.

* هر معادله دیگری که صحیح باشد قبول است.

توجه کنید که همه توابع $y = cx^2 + \frac{1}{c}$ برای $c \neq 0$ در این معادله صدق می‌کنند.

همچنین توجه کنید که $y = 2x$ در معادله صدق می‌کند و پوش دسته منحنی مربوطه است. بنابر تقارن، تابع $y = -2x$ هم

در معادله صدق می‌کند. پس یک جواب است.

در مجموع ۵ نمره برای به دست آوردن جواب دیگر.

* به هر روشی یک جواب دیگر به دست آورند قابل قبول است.

موفق باشید