به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

معادلات دیفرانسیل (۲۲۰۳۴)

کلید امتحان پایان ترم (همه‌ی گروه‌ها)

مدت امتحان: ۳ ساعت

۹ صبح، ۶ تیر ۱۳۹۷

- استفاده از ماشین حساب به هیچ وجه مجاز نیست.
- جدولی از تبدیلات لاپلاس در انتهای سوالات موجود است.
- در آزمون، پاسخ سوالات را به ترتیب و هر یک را در برگه جداگانه‌ای از پاسخنامه بنویسید.
- اگر از گزاره‌ای در کتاب، برای حل سوالها استفاده می‌کنید، لازم است گزاره مورد نظر را ابتدا به صورت شفاف و دقیق بیان کرده و سپس آن را بکار گیرید.

۱. دستگاه زیر را حل کنید. در انتخاب روش حل آزاد هستید. (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \sin 2t \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2 \end{cases}$$

پاسخ.

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 2$$

پس دستگاه مقدار ویژه مکرر دارد. به بررسی بردار ویژه های آن میپردازیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0_{2\times 1} \quad \Longleftrightarrow \quad a = -b$$

پس تنها یک راستای ویژه وجود دارد و آن هم راستای موازی بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ است. اکنون به دنبال بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با این بردار ویژه میپردازیم.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \ h \in \mathbb{R}$$

حال ماتریس تغییر پایه P را بصورت زیر درنظر میگیریم.

$$P=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

پس بنابر آنچه از جبرخطی میدانیم

$$A:=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

و در پی آن

$$\begin{aligned}e^{tA}&=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}\\ &=e^{2t}\begin{bmatrix}1 & t-\frac{1}{2}\\ -1 & -t-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}1-t & -t\\ t & 1+t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

حال با استفاده از قضیه کلی برای حل دستگاههای ناهمگن داریم

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}&=e^{2t}\begin{bmatrix}1-t & -t\\ t & 1+t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\int_0^t e^{2(t-\tau)}\begin{bmatrix}1-(t-\tau) & -(t-\tau)\\ t-\tau & 1+(t-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\tau\\ 0\end{bmatrix}\,d\tau\\ &=e^{2t}\left(\begin{bmatrix}1-3t\\ 2+3t\end{bmatrix}+\int_0^t e^{-2\tau}\begin{bmatrix}1-(t-\tau) & -(t-\tau)\\ t-\tau & 1+(t-\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\tau\\ 0\end{bmatrix}\,d\tau\right)\\ &=e^{2t}\left(\begin{bmatrix}1-3t\\ 2+3t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\int_0^t(1-t)e^{-2\tau}\sin\tau+\tau e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau\\ \int_0^t te^{-2\tau}\sin\tau-\tau e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau\end{bmatrix}\right)\\ &=e^{2t}\left(\begin{bmatrix}1-3t\\ 2+3t\end{bmatrix}+\left[\int_0^t e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau\right]\begin{bmatrix}(1-t)\\ t\end{bmatrix}+\left[\int_0^t \tau e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau\right]\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right)=\end{aligned}$$

حال با انتگرال گیری جز به جز میتوان دید که

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau&=1-e^{-2t}\cos t+2\int_0^t e^{-2\tau}\cos\tau\,d\tau\\ &=1-e^{-2t}\cos t+2e^{-2t}\sin t+4\int_0^t e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau\\ \Longrightarrow\quad \int_0^t e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau&=-\frac{1-e^{-2t}\cos t+2e^{-2t}\sin t}{3}.\end{aligned}$$

برای انتگرال دیگر نیز داریم

$$\begin{aligned}\int\tau e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau&=\frac{e^{-2\tau}\tau\sin\tau}{-2}+\int\frac{e^{-2\tau}(\sin\tau+\tau\cos\tau)}{2}\,d\tau\\ &=\frac{e^{-2\tau}\tau\sin\tau}{-2}+\frac{e^{-2\tau}(\sin\tau+\tau\cos\tau)}{-4}+\int\frac{e^{-2\tau}(2\cos\tau-\tau\sin\tau)}{4}\,d\tau\\ \Longrightarrow\quad \frac{5}{4}\int\tau e^{-2\tau}\sin\tau\,d\tau&=\frac{e^{-2\tau}\tau\sin\tau}{-2}+\frac{e^{-2\tau}(\sin\tau+\tau\cos\tau)}{-4}+\int\frac{e^{-2\tau}\cos\tau}{2}\,d\tau\end{aligned}$$

و باز با انتگرال جز به جز داریم

$$
\begin{aligned}
\int e^{-2\tau}\cos\tau\, d\tau &= \frac{e^{-2\tau}\cos\tau}{-2} - \int \frac{e^{-2\tau}\sin\tau}{2} d\tau \\
&= \frac{e^{-2\tau}\cos\tau}{-2} + \frac{e^{-2\tau}\sin\tau}{4} - \int \frac{e^{-2\tau}\cos\tau}{4} d\tau \\
\Longrightarrow \quad \int e^{-2\tau}\cos\tau\, d\tau &= \frac{e^{-2\tau}\sin\tau - 2e^{-2\tau}\cos\tau}{5} + C
\end{aligned}
$$

پس برای انتگرال مورد نظر جواب دیده میشود که

$$
\int \tau e^{-2\tau}\sin\tau\, d\tau = \frac{e^{-2\tau}}{-5}\left[2\tau\sin\tau + \tau\cos\tau + \frac{3}{5}\sin\tau + \frac{4}{5}\cos\tau\right] + C
$$

و در پی آن

$$
\int_0^t \tau e^{-2\tau}\sin\tau\, d\tau = \frac{4}{25} - \frac{e^{-2t}}{5}\left[2t\sin t + t\cos t + \frac{3}{5}\sin t + \frac{4}{5}\cos t\right]
$$

پس در نهایت جواب به صورت زیر است.

$$
\begin{cases}
x(t) = (1-3t)e^{2t} + \frac{1-t}{3}\left(\cos t - 2\sin t - e^{2t}\right) + \frac{1}{25}\left(4e^{2t} - 10t\sin t - 5t\cos t - 3\sin t - 4\cos t\right) \\
y(t) = (2+3t)e^{2t} + \frac{t}{3}\left(\cos t - 2\sin t - e^{2t}\right) + \frac{1}{25}\left(10t\sin t + 5t\cos t + 3\sin t + 4\cos t - 4e^{2t}\right).
\end{cases}
$$

و یا در بیانی خلاصه تر

$$
\begin{cases}
x(t) = \left(\frac{62}{25} - \frac{8}{3}t\right)e^{2t} + \frac{13}{75}\cos t - \frac{59}{75}\sin t - \frac{8}{5}t\cos t + \frac{4}{15}t\sin t \\
y(t) = \left(\frac{46}{25} + \frac{8}{3}t\right)e^{2t} + \frac{4}{25}\cos t - \frac{3}{25}\sin t + \frac{8}{5}t\cos t - \frac{7}{15}t\sin t
\end{cases}
$$

البته میتوان این دستگاه را با استفاده از تبدیل لاپلاس یا روشهای دیگری نیز حل کرد.

۲. دستگاه زیر را با استفاده از **تبدیل لاپلاس** حل کنید. راه دیگری قابل قبول نیست. (۱۵ نمره)

$$
\begin{cases}
x'(t) = 2x(t) - y(t) - u_0(t) \\
y'(t) = x(t) + 2y(t) + \delta(t-5) \\
x(0) = y(0) = 1
\end{cases}
$$

یادآوری: $\delta(t-5)$ تابع ضربه در $t=5$ است و

$$
\begin{cases}
u_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c. \end{cases}
\end{cases}
$$

پاسخ. با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم

$$
\begin{cases}
s\mathcal{L}(x) - 1 = 2\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) - \frac{1}{s} \\
s\mathcal{L}(y) - 1 = \mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(y) + e^{-5s}
\end{cases}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathcal{L}(x) \\ \mathcal{L}(y) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{s} \\ 1 + e^{-5s} \end{bmatrix}
$$

اکنون با حل این دستگاه داریم

$$\begin{bmatrix}\mathcal{L}(x)\\ \mathcal{L}(y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-۲ & ۱\\ -۱ & s-۲\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۱-\frac{۱}{s}\\ ۱+e^{-۵s}\end{bmatrix}=\frac{۱}{(s-۲)^۲+۱}\begin{bmatrix}s-۲ & -۱\\ ۱ & s-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱-\frac{۱}{s}\\ ۱+e^{-۵s}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{(s-۲)^۲+۱}\begin{bmatrix}s-۲-\frac{s-۲}{s}-۱-e^{-۵s}\\ ۱-\frac{۱}{s}+(s-۲)+(s-۲)e^{-۵s}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{s-۲}{(s-۲)^۲+۱}-\frac{s-۲}{s((s-۲)^۲+۱)}-\frac{۱}{(s-۲)^۲+۱}-\frac{e^{-۵s}}{(s-۲)^۲+۱}\\ \frac{۱}{(s-۲)^۲+۱}-\frac{۱}{s((s-۲)^۲+۱)}+\frac{s-۲}{(s-۲)^۲+۱}+\frac{(s-۲)e^{-۵s}}{(s-۲)^۲+۱}\end{bmatrix}$$

از طرفی با استفاده از جدول دیده میشود که

$$f(t)=e^{۲t}\cos t \iff \mathcal{L}(f)=\frac{s-۲}{(s-۲)^۲+۱}$$

$$g(t)=e^{۲t}\sin t \iff \mathcal{L}(g)=\frac{۱}{(s-۲)^۲+۱}$$

برای محاسبه لاپلاس وارون عبارت $\frac{s-۲}{s((s-۲)^۲+۱)}$ میتوان از تفکیک کردن به کسرهای جزیی استفاده کرد و هم از قضیه پیچش. با نمادگذاری بالا و قضیه پیچش و توجه به اینکه $\mathcal{L}(۱)=\frac{۱}{s}$، میتوان دید که

$$\mathcal{L}(f*۱)=\frac{s-۲}{s((s-۲)^۲+۱)},\quad \mathcal{L}(g*۱)=\frac{۱}{s((s-۲)^۲+۱)},$$

$$f*۱(t)=\int_۰^t e^{۲\tau}\cos\tau\,d\tau=\int_۰^t\frac{e^{(۲+i)\tau}+e^{(۲-i)\tau}}{۲}\,d\tau=\frac{۱}{۲}\left[\frac{e^{(۲+i)\tau}}{۲+i}+\frac{e^{(۲-i)\tau}}{۲-i}\right]\Big|_۰^t$$

$$=\frac{e^{۲t}(۲\cos t+\sin t)-۲}{۵}$$

$$g*۱(t)=\int_۰^t e^{۲\tau}\sin\tau\,d\tau=\int_۰^t\frac{e^{(۲+i)\tau}-e^{(۲-i)\tau}}{۲i}\,d\tau=\frac{۱}{۲i}\left[\frac{e^{(۲+i)\tau}}{۲+i}-\frac{e^{(۲-i)\tau}}{۲-i}\right]\Big|_۰^t$$

$$=\frac{e^{۲t}(۲\sin t-\cos t)+۱}{۵}$$

اگر برای راحتی قرار دهیم $\delta_۵(t):=\delta(t-۵)$ داریم

$$\mathcal{L}(f*\delta_۵)=\frac{(s-۲)e^{-۵s}}{(s-۲)^۲+۱},\ \mathcal{L}(g*\delta_۵)=\frac{e^{-۵s}}{(s-۲)^۲+۱}$$

$$f*\delta_۵(t)=\int_۰^t\delta_۵(\tau)e^{۲(t-\tau)}\cos(t-\tau)\,d\tau=u_۵(t)e^{۲(t-۵)}\cos(t-۵)$$

$$g*\delta_۵(t)=\int_۰^t\delta_۵(\tau)e^{۲(t-\tau)}\sin(t-\tau)\,d\tau=u_۵(t)e^{۲(t-۵)}\sin(t-۵)$$

پس در نهایت داریم

$$\begin{cases}x(t) &=e^{۲t}\cos t-\frac{e^{۲t}(۲\cos t+\sin t)-۲}{۵}-e^{۲t}\sin t-u_۵(t)e^{۲(t-۵)}\cos(t-۵)\\ y(t) &=e^{۲t}\sin t-\frac{e^{۲t}(۲\sin t-\cos t)+۱}{۵}+e^{۲t}\cos t+u_۵(t)e^{۲(t-۵)}\sin(t-۵)\end{cases}$$

یا در بیانی خلاصه تر

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{e^{2t}(3\cos t - 6\sin t) - 2}{5} - u_5(t)e^{2(t-5)}\cos(t-5) \\ y(t) &= \frac{e^{2t}(3\sin t + 6\cos t) + 1}{5} + u_5(t)e^{2(t-5)}\sin(t-5) \end{cases}$$

۳. معادله انتگرالی زیر را روی $[0, +\infty)$ حل کنید. (۱۵ نمره)

$$y''(t) = y(t) + 1 + 15\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

پاسخ. با تبدیل لاپلاس داریم

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(y) + \frac{1}{s} + \mathcal{L}(y)\frac{15}{1+s^2} \\ \Longrightarrow \quad \frac{s^4-16}{s^2+1}\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{s} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(y) = \frac{s^2+1}{s(s^4-16)} \end{aligned}$$

از طرفی میدانیم که

$$\frac{s^2+1}{s(s^4-16)} = \frac{s^2+1}{s(s-2)(s+2)(s^2+4)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-2} + \frac{c}{s+2} + \frac{ks+g}{s^2+4}$$

با ضرب کردن طرفین به ترتیب در s و $s-2$ و $s+2$ و سپس میل دادن به ترتیب 0 و 2 و -2 دیده میشود که

$$a = -\frac{1}{16},\ b = \frac{5}{64},\ c = \frac{5}{64}$$

اکنون با ضرب کردن طرفین در s و میل دادن آن به بینهایت داریم

$$0 = a+b+c+k \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{16} - \frac{5}{32} = -\frac{3}{32}$$

در قدم بعدی با قرار دادن $s = 1$ میتوان دید که

$$\frac{2}{-15} = a - b + \frac{c}{3} + \frac{k+g}{5} \quad \Longrightarrow \quad g = -\frac{3}{64}$$

اکنون با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس انتهای سوالات داریم

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{16} + \frac{5(e^{2t}+e^{-2t})}{64} + \frac{3\cos 2t}{32} - \frac{3\sin 2t}{128} \\ &= -\frac{1}{128}\left(8 + 20\cosh 2t + 12\cos 2t - 3\sin 2t\right) \end{aligned}$$

۴. نشان دهید که مبدا برای معادله زیر نقطه تکین منظم است. سپس جواب این معادله به شکل سری حول مبدا که برای آن

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0$$

است را بیابید. (۲۰ نمره)

$$2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0$$

پاسخ.

$$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0 \iff y''+\frac{x(2x+1)}{2x^2}y'-\frac{1}{2x^2}y=0$$
$$\iff y''+\left(\frac{1}{2x}+1\right)y'+\frac{-1}{2x^2}y=0,\ p(x)=\frac{1}{2x}+1, q(x)=\frac{-1}{2x^2}$$
$$\lim_{x\to 0} xp(x)=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0} x^2q(x)=-\frac{1}{2}$$

با توجه به تساوی بالا، مبدا برای معادله مورد نظر سوال نقطه تکین منظم است. اکنون معادله مشخصه متناظر با معادله را درنظر میگیریم.

$$r^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)r-\frac{1}{2}=0 \iff 2r^2-r-1=0 \iff r=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=1,-\frac{1}{2}$$

از طرفی تفاضل این دو ریشه صحیح نیست. پس جواب کلی به صورت

$$x>0 \quad y=ax\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+bx^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$
$$x<0 \quad y=cx\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+dx^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

ولی در اینجا جواب را میخواهیم که $\lim_{x\to 0} y(x)=0$. پس باید $b=d=0$. پس تنها کافی است که ضرایب a_n ها را بیابیم. برای این منظور جواب به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}$ را در معادله قرار میدهیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(n+1)nx^{n+1}+(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$
$$\implies \sum_{n=0}^{\infty}\left(2a_n(n+1)n+(n+1)a_n-a_n\right)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)a_nx^{n+2}=0$$
$$\implies \sum_{n=1}^{\infty}[(2n^2+3n)a_n+2na_{n-1}]x^{n+1}=0 \implies a_n=-\frac{2}{2n+3}a_{n-1}$$
$$\implies a_n=a_0(-1)^n2^n\Pi_{k=1}^n\left(\frac{1}{2k+3}\right)$$

پس جواب نهایی میتواند به صورت

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_0(-1)^n2^n\Pi_{k=1}^n\left(\frac{1}{2k+3}\right)\ x\geq 0$$
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(-1)^n2^n\Pi_{k=1}^n\left(\frac{1}{2k+3}\right)\ x\leq 0$$

است. همچنین هر دو نمایش

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_0(-1)^n2^n\Pi_{k=1}^n\left(\frac{1}{2k+3}\right)x^{n+1},$$
$$y(x)=|x|\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_0(-1)^n2^n\Pi_{k=1}^n\left(\frac{1}{2k+3}\right)x^n$$

نیز به عنوان یک جواب قابل قبول است.

۵. دستگاه غیرخطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = x(۶ - x - ۳y) \\ \frac{d}{dt}y = y\,(۶ - ۳x - y) \end{cases}$$

(آ) نقطه یا نقاط بحرانی دستگاه را پیدا کنید. (۵ نمره)

پاسخ.

$$\begin{cases} ۰ = x(۶ - x - ۳y) \\ ۰ = y\,(۶ - ۳x - y) \end{cases} \iff \begin{cases} ۰ = x \text{ یا } ۶ - x - ۳y = ۰ \\ ۰ = y \text{ یا } ۶ - ۳x - y = ۰ \end{cases}$$

$$\iff (x_۱, y_۱) = (۰, ۰),\ (x_۲, y_۲) = (۶, ۰),\ (x_۳, y_۳) = (۰, ۶),\ (x_۴, y_۴) = \left(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}\right)$$

(ب) پایداری یا عدم پایداری آن نقاط را با ذکر دلیل مشخص کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ. حول هر چهار نقطه دستگاه بحرانی، دستگاه تقریبا خطی آن را بررسی میکنیم.

$$F(x,y) = (x(۶ - x - ۳y), y(۶ - ۳x - y)) \implies DF = \begin{bmatrix} ۶ - ۲x - ۳y & -۳x \\ -۳y & ۶ - ۳x - ۲y \end{bmatrix}$$

$$DF_{(x_۱,y_۱)} = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix},\ DF_{(x_۲,y_۲)} = \begin{bmatrix} -۶ & -۱۸ \\ ۰ & -۱۲ \end{bmatrix},\ DF_{(x_۳,y_۳)} = \begin{bmatrix} -۱۲ & ۰ \\ -۱۸ & -۶ \end{bmatrix},$$

$$DF_{(x_۴,y_۴)} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & -\frac{۹}{۲} \\ -\frac{۹}{۲} & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix} = -\frac{۳}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای نقطه $(x_۱, y_۱)$ دو مقدار ویژه $۶ > ۰$ هستند. پس مبدا نقطه تعادل ناپایدار است. برای هر دو نقطه $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ هر دو مقدار ویژه برابر $۰ > ۶-$ و $۰ > ۱۲-$ هستند، پس این دو نقطه بحرانی، نقاط نعادل پایدار هستند. حال به بررسی نقطه آخر میپردازیم.

$$\det \begin{bmatrix} ۱ - \eta & ۳ \\ ۳ & ۱ - \eta \end{bmatrix} = (۱ - \eta)^۲ - ۹ = \eta^۲ - ۲\eta - ۸ = ۰ \implies \eta = ۱ \pm \sqrt{۱ + ۸} = ۱ \pm ۳ = -۲,\ ۴$$

با توجه به ضریب $-\frac{۳}{۲}$ که در بالا آمد، مقادیر ویژه $DF_{(x_۴, y_۴)}$ به صورت زیر هستند.

$$\lambda_۱ = -۲ \times \frac{-۳}{۲} = ۳,\ \lambda_۱ = ۴ \times \frac{-۳}{۲} = -۶$$

و در نتیجه بنابر قضیه دستگاههای خطی این نقطه بحرانی برای دستگاه، نقطه ناپایدار است.

(ج) شکل تقریبی جوابهای دستگاه را در ربع اول $(x \geq ۰,\ y \geq ۰)$ رسم کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ. نموار تقریبی خمهای جواب در ربع اول در شکل زیر آمده است.

۶. دستگاه غیرخطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = x^3 + xy^2 \\ y' = 2x^2y + y^3 \end{cases}$$

با استفاده از روش لیاپانف، پایدار بودن یا نبودن دستگاه حول نقطه یا نقاط بحرانی را بررسی کنید.

راهنمایی: قرار دهید $V(x,y) = ax^2 + by^2$ و a و b مناسبی را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ. ابتدا نقاط بحرانی یا همان نقاط تعادل دستگاه را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} 0 = x(x^2 + y^2) \\ 0 = y(2x^2 + y^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ یا } x^2 + y^2 = 0 \\ y = 0 \text{ یا } 2x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \iff x = 0,\ y = 0$$

(۳ نمره) با گرفتن $V(x,y) = ax^2 + by^2$ برای محاسبه $\dot{V}$ دستگاه مورد بررسی داریم

$$\dot{V} = 2ax' + 2by' = 2ax(x^3 + xy^2) + 2by(2x^2y + y^3) = 2ax^4 + 2(a + 2b)x^2y^2 + 2by^4$$

اکنون برای هر a و b مثبت داریم

$$V(x,y),\ \dot{V}(x,y) > 0,\ (x,y) \neq (0,0)$$

پس بنابر قضیه لیاپانوف، دستگاه حول مبدا ناپایدار است. (۷ نمره)

جدولی از تبدیلات لاپلاس

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos\ at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > 0$
$e^{at}f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s-a)$	$s > a$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}	$s > 0$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau$	$\mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s)$	
$f'(t)$	$s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$	

موفق باشید