به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی یک (۲۲۰۱۵) — مدت امتحان: ۳ ساعت
کلید امتحان پایان ترم (همه‌ی گروه‌ها) — ۱۵:۳۰ بعدازظهر، ۵ تیر ۱۳۹۷

- استفاده از ماشین حساب به هیچ وجه مجاز نیست.
- در آزمون، پاسخ سوالات را به ترتیب و هر یک را در برگه جداگانه‌ای از پاسخنامه بنویسید.
- اگر از گزاره‌ای در کتاب، برای حل سوالها استفاده می‌کنید، لازم است گزاره مورد نظر را ابتدا به صورت شفاف و دقیق بیان کرده و سپس آن را بکار گیرید.

۱. حدهای زیر را محاسبه کنید

(آ) (۱۰ نمره)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}.$$

پاسخ. میخواهیم از قاعده هوپیتال استفاده میکنیم. برای این منظور ابتدا مشتق $(1+x)^{1/x}$ را به دست می آوریم.

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x)^{1/x}\right] = \frac{d}{dx}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right] = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{-\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x}.\frac{1}{x+1}\right)$$
$$= \frac{(1+x)^{1/x}}{x+1}\left(\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}\right)$$

از طرفی میدانیم

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

اکنون با قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{(1+x)^{1/x}}{x+1}\left(\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}\right)$$
$$= e\times\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}$$

(۵ نمره)

مجددا با توجه به اینکه

$$\lim_{x\to 0}(x+1)\ln(x+1)-x=0$$

با استفاده از قاعده هوپیتال دیده میشود

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+1-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{2x}$$

و باز با قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

پس در نهایت

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}=e\times\frac{1}{2}=\frac{e}{2}$$

(۵ نمره)

(ب) (۱۰ نمره)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+2(n-1)}+\frac{1}{n+2n}$$

پاسخ.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+2(n-1)}+\frac{1}{n+2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}$$

(۵ نمره)

اکنون اگر تابع با ضابطه $\frac{1}{1+2x}$ را درنظربگیریم، با توجه به انتگرال پذیری این تابع و تعریف انتگرال ریمان، به روشنی دیده میشود که

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+2(n-1)}+\frac{1}{n+2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+2x}dx=\frac{1}{2}\ln|1+2x|\Big|_0^1=\ln\sqrt{3}\end{aligned}$$

(۵ نمره)

۲. نزدیکترین نقاط از خم $4x^2+xy+4y^2=1$ به مبدا را بدست آورید. راهنمایی: می‌توانید از مختصات قطبی استفاده کنید. یعنی $x=r\cos\alpha$ و $y=r\sin\alpha$. (۱۰ نمره)

پاسخ. راه اول: اگر قرار دهیم $x = r\cos\alpha$ و $y = r\sin\alpha$ به روشنی دیده میشود که

$$۴r^۲\cos^۲\alpha + r^۲\sin\alpha\cos\alpha + ۴r^۲\sin^۲\alpha = ۱ \iff r^۲ = \frac{۲}{۸+\sin ۲\alpha}$$

(۴ نمره) از طرفی $r > ۰$ کمینه است اگر و تنها اگر $r^۲$ کمینه باشد و در اینجا روشن است که $r^۲$ کمینه است اگر و تنها اگر تابع $۸+\sin ۲\alpha$ بیشینه باشد و این هم معادل است با بیشینه بودن تابع با ضابطه $\sin ۲\alpha$ که میدانیم تنها وقتی رخ میدهد که

$$۲\alpha = \frac{\pi}{۲} + ۲k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \implies \alpha = \frac{\pi}{۴} + k\pi \quad k\in\mathbb{Z}.$$

(۴ نمره) پس در صفحه تنها برای نقاط واقع بر خم با زاویه $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$، r کمینه است. توجه کنیم اگر $\frac{\pi}{۴}$ یا $\frac{۳\pi}{۴}$ آنگاه با جایگذاری $r = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$. پس نقاط مورد نظر سوال عبارتند از

$$x_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۳}.\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) \quad y_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۳}.\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) \iff (x_۱,y_۱) = \left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right)$$

و بطور مشابه

$$(x_۲,y_۲) = \left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right).$$

راه دوم: فرض میکنیم حول نقطه کمینه مورد نظر روی خم مساله، y بر حسب x تابع است. با این فرض به محاسبه y' میپردازیم. با مشتق گیری از دو طرف $۴x^۲+xy+۴y^۲ = ۱$ دیده میشود که

$$۸x + y + xy' + ۸yy' = ۰ \iff (x+۸y)y' = -(۸x+y).$$

(۴ نمره) از طرفی در نقطه کمینه $r = \sqrt{x^۲+y^۲}$ داریم

$$\frac{d}{dx}r(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{x^۲+y^۲} = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}(x+yy') = ۰ \iff yy' = -x$$

از کنار هم قرار دادن این دو معادله روشن است که

$$-y(۸x+y) = y(x+۸y)y' = yy'(x+۸y) = -x(x+۸y) \iff$$
$$۸xy + y^۲ = ۸xy + x^۲ \iff x = \pm y.$$

(۴ نمره) پس نقاط مورد نظر روی خم باید شرط بالا را هم داشته باشند. در نتیجه

$$x = y,\ ۴x^۲+xy+۴y^۲ = ۱ \implies x = \pm\frac{۱}{۳}$$
$$\implies (x_۱,y_۱) = \left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right),\ (x_۲,y_۲) = \left(-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۳}\right)$$
$$x = -y,\ ۴x^۲+xy+۴y^۲ = ۱ \implies x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۷}}$$
$$\implies (x_۳,y_۳) = \left(\frac{۱}{\sqrt{۷}},-\frac{۱}{\sqrt{۷}}\right),\ (x_۴,y_۴) = \left(-\frac{۱}{\sqrt{۷}},\frac{۱}{\sqrt{۷}}\right)$$

ولی با جایگذاری به سادگی دیده میشود که

$$r(x_۱) = r(x_۲) = \frac{\sqrt{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۹}} < \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۷}} = r(x_۳) = r(x_۴)$$

پس نقاط $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ پاسخهای سوال هستند. (۲ نمره)

۳. شعاع همگرایی سری زیر را مشخص کرده و سپس مقدار آن را برای xهای داخل ناحیه همگرایی محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{nx^n}{۲^n}$$

پاسخ.

$$a_n := \frac{nx^n}{۲^n} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \frac{(n+۱)|x|}{۲n}, \ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)|x|}{۲n} = \frac{|x|}{۲}$$

اکنون به روشنی با استفاده از آزمون نسبت برای همگرایی سری داریم

$$|x| < ۲ \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| < ۱$$

همچنین از راه دیگر با استفاده از آزمون نسبت میتوان دید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{۲}\sqrt[n]{n} = \frac{|x|}{۲} < ۱ \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < ۲$$

پس $r = ۲$ شعاع همگرایی و $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < ۲\}$ ناحیه همگرایی است. (۵ نمره برای بدست آوردن شعاع همگرایی از هر راه درستی)

برای محاسبه مقدار سری توجه کنید که داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} u^n = \frac{۱}{۱-u} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=۰}^{\infty} nu^{n-۱} = \left(\frac{۱}{۱-u}\right)' = \frac{۱}{(۱-u)^۲} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=۰}^{\infty} nu^n = \frac{u}{(۱-u)^۲}$$

حال با قرار دادن $u = \frac{x}{۲}$ به روشنی دیده میشود که

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{nx^n}{۲^n} = \sum_{n=۰}^{\infty} n\left(\frac{x}{۲}\right)^n = \frac{x/۲}{(۱-x/۲)^۲} = \frac{۲x}{(۲-x)^۲} \quad (|x| < ۲)$$

(۵ نمره)

۴. همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(آ) (۱۰ نمره)

$$\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n\ln(\ln n)}$$

پاسخ. با توجه به مثبت و صعودی بودن دنباله با ضابطه های n و $\ln n$، روشن است که دنباله با ضابطه $\frac{۳}{n\ln(\ln n)}$ مثبت و نزولی است. پس شرایط استفاده از آزمون انتگرال وجود دارد. پس به بررسی همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_{۳}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$ میپردازیم. (۵ نمره)

$$\int_{۳}^{n} \frac{dx}{x\ln(\ln x)} = \int_{\ln ۳}^{\ln n} \frac{d\ln x}{\ln(\ln x)} = \int_{\ln ۳}^{\ln n} \frac{du}{\ln(u)}$$

(۲ نمره)

از طرفی

$$\int_{\ln ۳}^{\ln n} \frac{du}{\ln(u)} \geq \int_{\ln ۳}^{\ln n} \frac{du}{u} = \ln\ln n - \ln\ln ۳$$

در نتیجه

$$\int_{۳}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)} = \lim_{n\to\infty} \int_{۳}^{n} \frac{dx}{x\ln(\ln x)} \geq \lim_{n\to\infty} \ln\ln n - \ln\ln ۳ = +\infty.$$

پس $\int_{۳}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$ واگراست که بنابر آزمون انتگرال این معادل واگرایی $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n\ln(\ln n)}$ است.
(۳ نمره)

(ب) (۵ نمره)

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n}$$

پاسخ. دنباله $\{\frac{۱}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ نامنفی و نزولی است و $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$. از طرفی

$$\left|\sum_{n=۱}^{N}(-۱)^n\right| = \left|\frac{(-۱)^N - ۱}{۲}\right| = ۱.$$

پس $\left|\sum_{n=۱}^{N}(-۱)^n\right|$ کراندار است. اکنون با توجه به آزمونی که در کلاس دیدیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n}$$

همگراست.

توجه کنید که آزمون لایب نیتس حالت خاص آزمون است که در کلاس مطرح شد و در اینجا میتواند مورد استفاده قرار گیرد. برای استقاده از آزمون لایب نیتس چون دنباله $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ نامنفی و نزولی است و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

همگراست.
اشاره و استفاده درست از هر کدام از این آزمونها نمره کامل را خواهد داشت.

۵. انتگرال ناسره زیر را بدست آورید. (۱۵ نمره)

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}$$

پاسخ. ابتدا کسر $\frac{1}{x^3+1}$ را به کسرهای جزیی تفکیک میکنیم. میدانیم که شکل کلی جواب باید به صورت زیر باشد.

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

(۲ نمره)

برای بدست آوردن ضرایب مجهول میتوان از روشهای مختلفی استفاده کرد. برای مثال طرفین تساوی را در $x+1$ ضرب میکنیم

$$\frac{1}{x^2-x+1}=a+\frac{bx+c}{x^2-x+1}(x+1)$$

سپس در طرفین x را به -1 میل میدهیم. پس

$$\frac{1}{1+1+1}=a+0 \quad\Longrightarrow\quad a=\frac{1}{3}.$$

(۱ نمره)

در گام بعدی در طرفین تساوی قرار میدهیم $x=0$. در نتیجه داریم

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{3}+\frac{c}{1} \quad\Longrightarrow\quad c=\frac{2}{3}.$$

(۱ نمره)

در ادامه طرفین را در x ضرب میکنیم و x را به بینهایت میل میدهیم. درنتیجه

$$0=\frac{1}{3}+b \quad\Longrightarrow\quad b=-\frac{1}{3}.$$

(۱ نمره)
اکنون به محاسبه انتگرال میپردازیم.

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left[\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{(-x+2)dx}{x^2-x+1}\right]$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
\int \frac{(-x+2)dx}{x^2-x+1} &= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x-1-3)dx}{x^2-x+1} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

(۳ نمره)
با گرفتن $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ (برای $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$) به روشنی دیده میشود که

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} &= \int \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{(1+\tan^2 t)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2t}{\sqrt{3}}+C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

(۳ نمره)
پس در جمع بندی داریم

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\left[\ln|x+1| - \ln\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]+C \\
&= \frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

(۱ نمره)
حال به محاسبه انتگرال ناسره میپردازیم. (۳ نمره)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \\
&\quad - \left[\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\Big|_{x=0} \\
&= 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{-\pi}{6} = \frac{4\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}
\end{aligned}$$

۶. مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر

(آ) (۱۵ نمره)

$$\int \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

پاسخ. برای $x > 0$ قرار میدهیم $x = \cosh t$ (۲ نمره)
پس داریم

$$\int \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{(\cosh t+1)\sinh t\,dt}{(\cosh t-1)\sqrt{\cosh^2 t-1}} = \int \frac{\cosh t+1\;dt}{\cosh t-1}$$
$$= \int 1 + \frac{2\,dt}{\cosh t-1} = t + \int \frac{2\,dt}{\cosh t-1}$$

(۳ نمره)
در گام بعدی میتوان از اتحادهای هذلولی

$$\cosh 2u = \frac{1+\tanh^2 u}{1-\tanh^2 u}$$

استفاده کرد. اما در اینجا راه ساده تری نیز وجود دارد.

$$\int \frac{2\,dt}{\cosh t-1} = \int \frac{2\,dt}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1} = \int \frac{4e^t\,dt}{(e^t)^2-2e^t+1} = \int \frac{4e^t\,dt}{(e^t-1)^2} = \frac{-4}{e^t-1}+C$$

(۷ نمره)
اکنون توجه کنید که

$$0 < x = \cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \iff (e^t)^2 - 2xe^t + 1 = 0$$
$$\iff e^t = x+\sqrt{x^2-1},\; t = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

پس در نهایت داریم

$$\int \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{4}{x-1+\sqrt{x^2-1}} + C$$

(۳ نمره)
لازم به ذکر است که این محاسبات به بیانی دیگر برای $x < 0$ نیز برقرار است. همچنین میتوان از ابتدا از تغییر متغیر

$$x = \frac{1}{\cos s},\; s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{یا} \quad x = \frac{1+y^2}{1-y^2},\; 0 < y < 1$$

و یا تغییر متغیری مناسب دیگری استفاده کرد و مشابه راه بالا را پیمود. البته ممکن است راه کمی طولانی تر باشد.

(ب)   (۱۵ نمره)

$$\int \frac{x\sqrt{۱ - x^۲}}{\sqrt{۱ + x^۲}}\, dx$$

پاسخ. اگر قرار دهیم $x^۲ = u$ دیده میشود که

$$\int \frac{x\sqrt{۱ - x^۲}}{\sqrt{۱ + x^۲}}\, dx = \int \frac{\sqrt{۱ - u}}{۲\sqrt{۱ + u}} du = \int \sqrt{۱ - u} d[\sqrt{۱ + u}]$$

(۳ نمره)

با قرار دادن $v = \sqrt{۱ + u}$ به روشنی $u = v^۲ - ۱$ و داریم

$$\int \sqrt{۱ - u} d[\sqrt{۱ + u}] = \int \sqrt{۲ - v^۲} dv$$

(۴ نمره)

با قرار دادن $v = \sqrt{۲}\sin t,\ -\frac{\pi}{۲} < t < \frac{\pi}{۲}$ میتوان محاسبه را بصورت پایین پی گرفت.

$$\int \sqrt{۲ - v^۲} dv = \int ۲\cos^۲ t\, dt = \int ۱ + \cos ۲t\, dt = t + \frac{\sin ۲t}{۲} + C = t + \sin t \cos t + C$$

(۴ نمره)

از طرفی

$$x^۲ = u = v^۲ - ۱,\ v = \sqrt{۲}\sin t \quad \Longleftrightarrow \quad \sin t = \sqrt{\frac{x^۲ + ۱}{۲}},\ \cos t = \sqrt{\frac{۱ - x^۲}{۲}}$$
$$,\ t = \sin^{-۱}\sqrt{\frac{x^۲ + ۱}{۲}}.$$

پس در نهایت داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sqrt{۱ - x^۲}}{\sqrt{۱ + x^۲}}\, dx &= \sin^{-۱}\sqrt{\frac{x^۲ + ۱}{۲}} + \sqrt{\frac{x^۲ + ۱}{۲}}\sqrt{\frac{۱ - x^۲}{۲}} + C \\ &= \sin^{-۱}\sqrt{\frac{x^۲ + ۱}{۲}} + \frac{\sqrt{۱ - x^۴}}{۲} + C\end{aligned}$$

(۴ نمره)

البته تغییر متغیرهای دیگری نیز میتواند مفید باشد.

موفق باشید