جبر خطی برای ریاضی عمومی ۲

نیمسال دوم ۹۶-۹۵

۱- فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ با پایهٔ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ باشد. نشان دهید $\{u_1-u_2, u_2-u_3, u_3-u_4, u_4\}$ نیز پایه‌ای برای E است.

۲- عدد حقیقی t را طوری پیدا کنید که $\{(3,1,4), (2,-3,5), (5,9,t)\}$ زیرمجموعه‌ای وابستهٔ خطی از $\mathbb{R}^3$ باشد.

۳- اگر $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد، آیا زیرمجموعهٔ $\{5u_1-4u_2, u_2, u_3, \ldots, u_m\}$ نیز مستقل خطی است؟ چرا؟

۴- فرض کنید $\{u_1, \ldots, u_m\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $v\in\mathbb{R}^n$. اگر $\{u_1+v, \ldots, u_m+v\}$ زیرمجموعه‌ای وابستهٔ خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید $v\in\langle u_1, \ldots, u_m\rangle$.

۵- زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^5$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E=\langle (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,1), (0,1,1,1,0), (2,1,-1,0,1)\rangle.$$

یک پایه برای E پیدا کنید. E چند بُعدی است؟

۶- فرض کنید E زیرمجموعهٔ زیر از $\mathbb{R}^4$ باشد:

$$E=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2=0,\ x_3-x_4=0\}.$$

نشان دهید E یک زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^4$ است. پایه‌ای برای E پیدا کنید و آن را به پایه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ گسترش دهید. E چند بُعدی است؟

۷- پایه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ پیدا کنید که شامل $(0,1,0,1)$ و $(1,0,1,0)$ باشد.

۸- یک زیرفضای خطی ۲ بُعدی از $\mathbb{R}^4$ پیدا کنید که شامل (۵، ۲، ۳، ۱) و (۱، ۳، ۴، ۲) نباشد.

۹- زیرفضاهای خطی E_1 و E_2 از $\mathbb{R}^5$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_1=\langle(2,0,3,1,1),(1,0,2,1,1),(2,0,3,1,3)\rangle \text{ و}$$

$$E_2=\langle(2,1,1,0,1),(3,2,3,2,3),(1,1,1,1,1)\rangle.$$

پایه‌ای برای E_1+E_2[1] و پایه‌ای برای $E_1\cap E_2$ پیدا کنید. این دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^5$ چند بُعدی هستند؟

۱۰- فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^n$ باشند. نشان دهید

$$\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1\cap E_2).$$

۱۱- فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^9$ باشند. نشان دهید اگر $\dim E_1=\dim E_2=5$، آنگاه $E_1\cap E_2\neq\{0\}$.

۱۲- فرض کنید $n\geq k\geq 3$ و $\{u_1,\dots,u_k\}$ را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. اگر $\{u_1,\dots,u_{k-1}\}$ و $\{u_2,\dots,u_k\}$ هر دو وابستهٔ خطی باشند و $\{u_2,\dots,u_{k-1}\}$ مستقل خطی، نشان دهید هر زیرمجموعهٔ $(k-1)$تایی از $\{u_1,\dots,u_k\}$ وابستهٔ خطی است.

۱۳- فرض کنید $\{u_1,u_2,u_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ باشد و قرار دهید $u_4=-u_1-u_2-u_3$. نشان دهید هر $u\in\mathbb{R}^3$ را می‌توان به صورت $u=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+c_4u_4$ نوشت که در آن c_1، c_2، c_3 و c_4 اعداد حقیقی منحصربه‌فردی هستند که $c_1+c_2+c_3+c_4=0$. این حکم را برای $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهید.

---

(۱) اگر E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند، قرار می‌دهیم $E_1+E_2=\{u+v \mid u\in E_1, v\in E_2\}$. نشان دهید E_1+E_2 نیز زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است.

۱۴- فرض کنید $\{u_1, u_2, u_3\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد. به ازای چه مقادیری از k، $\{u_2-u_1, ku_3-u_2, u_1-u_3\}$ نیز مستقل خطی است؟

۱۵- فرض کنید $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد طوری که $\{u_1, u_2, u_3\}$ و $\{u_2, u_3, u_4\}$ مستقل خطی اند. نشان دهید u_1 را می‌توان برحسب یک ترکیب خطی از u_2 و u_3 نوشت، لیکن u_4 ترکیبی خطی از u_1، u_2 و u_3 نمی باشد.

۱۶- فرض کنید $n \geq 2$ و $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ را پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. نشان دهید $\{u_1, u_1+u_2, \ldots, u_1+u_2+\cdots+u_n\}$ نیز پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ است. آیا مجموعهٔ $\{u_1+u_2, u_2+u_3, \ldots, u_{n-1}+u_n, u_n+u_1\}$ نیز پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ است؟ آیا عکس این مطالب درست است؟

۱۷- فرض کنید $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q \in \mathbb{R}^n$ و قرار دهید $E_1 = \langle u_1, \ldots, u_p \rangle$ و $E_2 = \langle v_1, \ldots, v_q \rangle$. اگر $E_3 = \langle u_i + v_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q \rangle$، نشان دهید $\dim E_3 \leq \min\{n, \dim E_1 + \dim E_2\}$.

۱۸- به ازای چه مقادیری از x، $\{(x,1,1,1), (1,x,1,1), (1,1,x,1), (1,1,1,x)\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^4$ نمی باشد؟ به ازای هر یک از مقادیری که پیدا می‌کنید، بُعد زیرفضای خطی تولید شده توسط بردارهای ظاهر شده در مجموعهٔ بالا چند است؟

۱۹- فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $E_1 \cup E_2$ زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید $E_1 \subseteq E_2$ یا $E_2 \subseteq E_1$. آیا می‌توانید این حکم را به ۳ زیرفضا تعمیم دهید؟ چگونه؟

۲۰- فرض کنید $E_1=\{(x,x,y,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$. نشان دهید E_1 زیرفضای خطی $\mathbb{R}^4$ است. زیرفضای خطی E_2 از $\mathbb{R}^4$ را چنان پیدا کنید که $\mathbb{R}^4=E_1\oplus E_2$.(۱)

۲۱- فرض کنید $E_1=\{(x,y,x+y,x-y,2x)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$. نشان دهید E_1 زیرفضای خطی $\mathbb{R}^5$ است. زیرفضاهای خطی E_2، E_3 و E_4 از $\mathbb{R}^5$ را که همگی مخالف $\{0\}$ هستند را چنان پیدا کنید که $\mathbb{R}^5=E_1\oplus E_2\oplus E_3\oplus E_4$.(۲)

۲۲- فرض کنید E_1، E_2 و F زیرفضاهای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند. آیا از $\mathbb{R}^n=E_1\oplus F=E_2\oplus F$ می‌توان نتیجه گرفت $E_1=E_2$؟ چرا؟

۲۳- فرض کنید $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^n$ طوری باشند که برای هر $i\neq j$، $u_i\cdot u_j=0$ و نیز برای هر i، $|u_i|=1$. اگر $v\in\mathbb{R}^n$، نشان دهید $|v|^2=(v\cdot u_1)^2+\cdots+(v\cdot u_m)^2$ اگر و فقط اگر $v\in\langle u_1,\dots,u_m\rangle$.

۲۴- حداکثر چند بردار ناصفر در $\mathbb{R}^n$ می‌توان یافت که زاویهٔ دو به دوی آنها منفرجه باشد؟

۲۵- فرض کنید $u,v\in\mathbb{R}^n$. نشان دهید $u\cdot v=0$ اگر و فقط اگر برای هر $c\in\mathbb{R}$، $|u|\leqslant|u+cv|$.

۲۶- فرض کنید $u,v\in\mathbb{R}^n$. نشان دهید برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $|au+bv|=|bu+av|$ اگر و فقط اگر $|u|=|v|$.

۲۷- فرض کنید $u,v\in\mathbb{R}^n$. اگر $|u|=|v|=1$ و $u\cdot v=1$، نشان دهید $u=v$.

۲۸- بردارهای $u,v\in\mathbb{R}^2$ را چنان بدست آورید که u مضربی از $(1,3)$ باشد، v بر $(1,3)$ عمود باشد و $u+v=(1,2)$.

---

(۱) یعنی اینکه $\mathbb{R}^4=E_1+E_2$ و $E_1\cap E_2=\{0\}$. به $E_1\oplus E_2$ جمع مستقیم E_1 و E_2 می‌گویند.

(۲) یعنی اینکه $\mathbb{R}^5=E_1+E_2+E_3+E_4$ و نیز هر کدام از E_iها با جمع بقیه، اشتراکی برابر با $\{0\}$ دارد.

۲۹- فرض کنید $f: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت خطی باشد طوری که برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$، $f(AB)=f(BA)$. نشان دهید عدد حقیقی c وجود دارد طوری که برای هر $X \in M_n(\mathbb{R})$، $f(X) = c\,tr(X)$.

* هر ماتریس $n\times n$ را می‌توان به عنوان یک n^2-تایی مرتب درنظر گرفت. پس $M_n(\mathbb{R})$ همان فضای $\mathbb{R}^{n^2}$ است.

۳۰- آیا ماتریس‌های $n\times n$ مثل A و B وجود دارند طوری که $AB-BA=I$؟

۳۱- مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر با آن‌ها را برای هر یک از ماتریس‌های زیر بیابید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ط) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

۳۲- فرض کنید $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$. نشان دهید E یک زیرفضای خطی از $M_2(\mathbb{R})$ است. E چند بعدی است؟

۳۳- فرض کنید E زیرفضای خطی از $M_n(\mathbb{R})$ باشد که توسط ماتریس‌های به شکل $AB-BA$ تولید می‌شود که در آن $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. نشان دهید $\dim E = n^2-1$.

۳۴- فرض کنید A، B و C سه ماتریس $n\times n$ باشند. نشان دهید که داریم $tr(ABC)=tr(BCA)=tr(CAB)$. آیا $tr(ABC)=tr(BAC)$؟

۳۵- فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. اگر برای هر ماتریس $n\times n$ مثل B، $tr(AB)=0$، نشان دهید $A=0$.

۳۶ـ فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ است. نشان دهید A وارون پذیر است اگر و فقط اگر مجموعهٔ متشکل از ستون‌های A که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است مستقل خطی باشد. آیا حکم مشابهی برای سطرها نیز وجود دارد؟

۳۷ـ فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد $(n>1)$. نشان دهید

$$E=\{X\in M_n(\mathbb{R})\mid AX=XA\}$$

یک زیرفضای خطی $M_n(\mathbb{R})$ است و $\dim E>1$.

۳۸ـ فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد طوری که عدد طبیعی k و $x\in\mathbb{R}^n$ موجود است که $A^k x=0$ و $A^{k-1}x\neq 0$. نشان دهید زیرمجموعهٔ زیر از $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است:

$$\{x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x\}.$$

۳۹ـ فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد طوری که $A^tA=0$. نشان دهید $A=0$.

۴۰ـ فرض کنید $A_1,\dots,A_m$ ماتریس‌های متقارن باشند طوری که $A_1^2+\dots+A_m^2=0$. نشان دهید $A_1=\dots=A_m=0$.

۴۱ـ فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد که k مقدار ویژهٔ دو به دو متمایز دارد، مثلاً $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. اگر u_i یک بردار ویژهٔ متناظر با λ_i باشد $(1\leqslant i\leqslant k)$، نشان دهید $\{u_1,\dots,u_k\}$ یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ است.

۴۲ـ فرض کنید A یک ماتریس پوچ‌توان باشد. نشان دهید $I+A$ وارون پذیر است.

۴۳ - با فرض اینکه بردارهای $(1,1,1)$، $(1,0,-1)$ و $(1,-1,0)$ بردارهای ویژهٔ ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

هستند، a، b، c، d، e، f را بدست آورید.

۴۴ - فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ است. نشان دهید چندجمله‌ای‌های مشخصهٔ A و A^t یکسان هستند؛ درنتیجه مقادیر ویژهٔ A و A^t نیز یکسان هستند. آیا فضاهای ویژهٔ A و A^t نیز یکسان هستند؟

۴۵ - ماتریس 2×2 مثل A را چنان پیدا کنید که دارای مقادیر ویژهٔ 1 و -1 باشد و بردارهای ویژهٔ متناظر با 1 و -1 به ترتیب $(1,2)$ و $(2,1)$ باشند.

۴۶ - فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ است. اگر u و v دو بردار ویژهٔ A^tA باشند که برهم عمودند، نشان دهید Au و Av نیز برهم عمودند.

۴۷ - فرض کنید A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد. اگر u یک بردار ویژهٔ A باشد، نشان دهید u بردار ویژهٔ A^2 و A^{-1} نیز می‌باشد. مقادیر ویژهٔ متناظر را بیابید.

۴۸ - فرض کنید $u,v,w\in\mathbb{R}^n$ دو به دو متعامد باشند و $x=au+bv+cw$، که $a,b,c\in\mathbb{R}$. نشان دهید $|x|^2=a^2|u|^2+b^2|v|^2+c^2|w|^2$. ضریب a را برحسب u و x به دست آورید. فرمول‌هایی برای b و c نیز به صورت مشابه پیدا کنید.

۴۹ - فرض کنید $u,v\in\mathbb{R}^n$ و $|u|=3$، $|u+v|=4$ و $|u-v|=6$. طول v را محاسبه کنید.

۵۰ - نشان دهید برای هر $u,v\in\mathbb{R}^n$، $u\cdot v=\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)$.