به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضیات مهندسی — مدت امتحان: ۳ ساعت

پاسخنامه امتحان میان ترم گروه‌های ۵ الی ۱۲ — ساعت ۲ بعدازظهر ۲۴ فروردین ۱۳۹۶

ـ در پاسخ تمام سوالات آزمون، توضیحات کامل و رسا باشد و محاسبات لازم صورت گیرد.

ـ در صورت استفاده از قضیه پیکارد باید آن را بصورت کامل و روشن ثابت کنید، در غیر این صورت راه حل شما که در آن از این قضیه استفاده شده است، پذیرفته نخواهد بود.

سوال ۱. *الف. جوابهای معادله زیر را به شکل قطبی و دکارتی بدست آورید.* (۱۰ نمره)

$$z^{۴} + ۲z^{۲} + ۲ = ۰$$

ب. چرا برابری پایین معتبر نیست؟ دلیل خود را روشن و رسا بیان کنید. (۱۰ نمره)

$$۲ = \left((-۸)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۶}} = \left(-۸\right)^{\frac{۱}{۳}} = -۲$$

پاسخ. الف)

$$\begin{aligned} z^{۴} + ۲z^{۲} + ۲ = ۰ \quad &\iff \quad z^{۲} = -۱ + \sqrt{۱ - ۲} = ۱ \pm i \\ \iff \quad z = \sqrt{۱ \pm i} \quad &, \quad ۱ \pm i = \sqrt{۲} e^{\pm i\pi/۴} \\ \iff \quad z = \sqrt[۴]{۲} e^{i\pi/۸}, \ &\sqrt[۴]{۲} e^{-i\pi/۸}, \ \sqrt[۴]{۲} e^{i۹\pi/۸}, \ \sqrt[۴]{۲} e^{-i۹\pi/۸} \end{aligned}$$

در مورد بدست آوردن شکل دکارتی جواب به صورت کاملتر:

$$\sin\frac{\pi}{۸} = \sqrt{\frac{۱ - \cos(\pi/۴)}{۲}} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{۸} = \sqrt{\frac{۱ + \cos(\pi/۴)}{۲}}$$

$$\implies \quad \sin\frac{\pi}{۸} = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{۸} = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\sqrt[۴]{۲}\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\sqrt{۲}(۲ - \sqrt{۲})} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲\sqrt{۲} - ۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\sqrt{۲} - ۱}$$

$$\sqrt[۴]{۲}\frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\sqrt{۲}(۲ + \sqrt{۲})} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲\sqrt{۲} + ۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\sqrt{۲} + ۱}$$

پس داریم:

$$
\begin{aligned}
z_{۱} &= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big(\sqrt{\sqrt{۲}+۱}+i\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\Big)\\
z_{۲} &= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big(-\sqrt{\sqrt{۲}+۱}+i\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\Big)\\
z_{۳} &= -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big(\sqrt{\sqrt{۲}+۱}+i\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\Big)\\
z_{۴} &= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big(\sqrt{\sqrt{۲}+۱}-i\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\Big)
\end{aligned}
$$

پاسخ. ب)

$$
\begin{aligned}
(-۸)^{\frac{۱}{۳}} &= e^{\frac{۱}{۳}\left(\ln|-۸|+(۲n+۱)\pi i\right)} = ۲e^{(۲n+۱)\pi i/۳} \quad n\in\mathbb{Z}\\
\left((-۸)^{۲}\right)^{\frac{۲}{۶}} &= ۶۴^{\frac{۱}{۶}} = e^{\frac{۱}{۶}\left(\ln ۶۴+۲k\pi i\right)} = ۲e^{k\pi i/۳} \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

اولا به روشنی این دو مقدار برای همه مقادیر k و n برابر با هم نیستند و در واقع دومی به عنوان تابع چند مقداری، شامل اولی است. در ثانی

$$
n=۰ \quad\Rightarrow\quad (-۸)^{\frac{۱}{۳}}=۲\,,\; k=۰ \quad\Rightarrow\quad \left((-۸)^{۲}\right)^{\frac{۲}{۶}}=۲
$$

پس مقادیر داده شده برای $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ و $\left((-۸)^{۲}\right)^{\frac{۲}{۶}}$، برای شاخه های مختلف بوده و طبعا لزومی ندارد که با هم برابر باشند که در این جا هم برابر نیستند. همچنین خاصیت

$$
\left(a^{x}\right)^{y}=a^{xy}
$$

لزوما برای توان مختلط درست نیست و صحت آن برای $a>۰$ و توان حقیقی برقرار است و در حالت دیگر ممکن است درست نباشد که آنچه در صورت سوال مطرح شده است خود مثال نقضی است برای این قاعده در توان با پایه منفی (که در واقع همان توان مختلط است)

سوال ۲. *تعریف می‌کنیم* $\mathbb{H}^{۲} := \{x+iy=z\in\mathbb{C} \mid y>۰\}$ *و* $\overline{\mathbb{H}^{۲}} = \{x+iy=z\in\mathbb{C} \mid y<۰\}$. *اگر تابع* $f:\mathbb{H}^{۲}\to\mathbb{C}$ *تحلیلی باشد، آیا تابع پایین نیز تحلیلی است؟ چرا؟* (۱۰ نمره)

$$
\begin{cases}
g:\mathbb{H}^{۲}\cup\overline{\mathbb{H}^{۲}}\to\mathbb{C}\\
g(z)=\begin{cases} f(z) & z\in\mathbb{H}^{۲}\\ \overline{f(\bar z)} & z\in\overline{\mathbb{H}^{۲}}\end{cases}
\end{cases}
$$

پاسخ. فرض کنید که $\mathrm{Re}(g)(x,y)=U(x,y)$ و $\mathrm{Im}(g)(x,y)=V(x,y)$ و همچنین برای تابع f، $\mathrm{Re}(f)(x,y)=u(x,y)$ و $\mathrm{Im}(f)(x,y)=v(x,y)$.

با توجه به تحلیلی بودن $f:\mathbb{H}^{۲}\to\mathbb{C}$ معادلات کوشی ریمان را در این ناحیه داریم. پس

$$
\forall\,(x,y)\in\mathbb{H}^{۲}\quad U_x=u_x=v_y=V_y\;,\;U_y=u_y=-v_x=-V_x
$$

حال برای

$$
\begin{aligned}
&\forall\,(x,y)\in\overline{\mathbb{H}^{۲}}\quad g(x,y)=U(x,y)+iV(x,y)=\big(u(x,-y)+iv(x,-y)\big)\\
&\implies\quad U(x,y)=u(x,-y)\quad,\quad V(x,y)=-v(x,-y)\\
&\implies\quad \frac{\partial}{\partial x}U(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,-y)\quad,\quad \frac{\partial}{\partial x}V(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}v(x,-y)\\
&\frac{\partial}{\partial y}U(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}u(x,-y)\quad,\quad \frac{\partial}{\partial y}V(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}v(x,-y)\\
&\frac{\partial}{\partial x}U(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,-y)=\frac{\partial}{\partial y}v(x,-y)=\frac{\partial}{\partial y}V(x,y)\\
&\frac{\partial}{\partial y}U(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}u(x,-y)=(-۱)(-۱)\frac{\partial}{\partial x}v(x,-y)=-\frac{\partial}{\partial x}V(x,y)\\
&\Rightarrow\quad \forall\,(x,y)\in\overline{\mathbb{H}^{۲}}\quad U_y=V_x\ ,\ V_y=-U_x
\end{aligned}
$$

پس معادلات کوشی_ریمان در کل $\mathbb{H}^{۲}\cup\overline{\mathbb{H}^{۲}}$ برای تابع g برقرار است. حال با توجه به اینکه f تحلیلی است و در نتیجه از هر مرتبه مشتق پذیر است، پس u و v نیز حتما داری مشتقات جزیی پیوسته هستند، پس در نهایت تابع g در هر نقطه از دامنه مشتقپذیر به معنای مختلط است و این یعنی در تحلیلی است.

سوال ۳. *الف. نگاشتی همدیس معرفی کنید که ناحیه A در پایین را به ناحیه $B-\{p\}$ در پایین برای یک $p\in\mathbb{C}$ دلخواه با شرط $|p|<۱$ به صورت یک به یک و پوشا تصویر کند. (۱۰ نمره)*

$$A:=\mathbb{C}-\{۱+i+e^{it}\in\mathbb{C}\mid t\in[-\pi,۰]\}$$
$$B-\{p\}:=\{w\in\mathbb{C}\mid |w|<۱\ ,\ w\neq p\}$$

ب. تابع تحلیلیA $f:\mathbb{C}\to$ که در آن $f(i)=۰$ را در نظر بگیرید. برد تابع f را با ذکر دلیل بیابید. (۱۰ نمره)

پاسخ. الف) ابتدا با نگاشتی موبیوس A را به کل صفحه منهای نمیخط نامنفی محور x ها تصویر میکنیم. برای این منظور از قضیه سه نقطه سه تصویر بهره میبریم:

$$M(z)=\frac{z-i}{z-(۲+i)}\frac{۱-(۲+i)}{۱-i}=\frac{z-i}{z-۲-i}\frac{i+۱}{i-۱}$$
$$M(i)=۰\ ,\ M(۱)=۱\ ,\ M(۲+i)=\infty\in\overline{\mathbb{C}}$$

حال چون این یک نگاشت موبیوس است، تصویر این نیمدایره تحت این نگاشت نیم خطی است که از سه نقطه ۰ و ۱ و ∞ میگذرد.

حال نگاشت $G(w)=\sqrt{w}$ را با شاخه ۲π در نظر میگیریم. در این شاخه داریم

$$
\begin{aligned}
&\forall\,w\in\mathbb{C}-\{x+iy\mid x\geq۰\ ,\ y=۰\}\quad w=re^{i\alpha}\ r>۰\ ,\ \alpha\in(۰.,۲\pi)\\
&\implies\quad \sqrt{w}=e^{\frac{۱}{۲}\log w}=\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{۲}}\in\mathbb{H}^{۲}
\end{aligned}
$$

به روشنی G میدان حاصل از حذف کردن نیم خط نامنفی محور x ها را به نیم صفحه بالا یا همان $\mathbb{H}^۲$ مینگارد.

حال با استفاده از نگاشت $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$، میتوان نیم صفحه بالا را بصورت یک به یک و پوشا و همدیس بر دورن قرص واحد نگاشت. حال نگاشت $F : A \to \mathbb{C}$ را به صورت پایین معرفی میکنیم

$$F(z) := T(G(M(z))) = \frac{\sqrt{\frac{i+۱}{i-۱}\frac{z-i}{z-۲-i}} - i}{\sqrt{\frac{i+۱}{i-۱}\frac{z-i}{z-۲-i}} + i} =$$

نگاشت F ترکیب توابع تحلیلی در دامنه مورد نظر است و همگی همدیسی هستند. پس F نیز تحلیلی و همدیس است.

* توجه کنید که اگر F را روی کره ریمان هم تعریف کنیم به روشنی

$$F(\infty) = T(G(M(\infty))) = T\Big(G\Big(\frac{i+۱}{i-۱}\Big)\Big) =: p$$

پس روشن است که $F(A) = B - \{p\}$.

بدیهی است که نگاشت مورد نظر سوال، یکتا نیست. برای مثال نگاشتهای بسیاری نیم صفحه بالا به دورن قرص واحد بصورت همدیس و یک به یک و پوشا تصویر میکنند.

پاسخ. ب) چون F تحلیلی است، پس $F(f(z))$ نیز چنین است و چون دامنه آن کل صفحه مختلط است پس تام است. ولی $|F(f(z))| < ۱$. پس بنابر قضیه لیوویل $F(f(z))$ تابعی ثابت است. با توجه به ساختن تابع F روشن است که این تابع وارون پدیر است. در نتیجه داریم

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \quad F(f(z)) = F(f(i)) \quad \Rightarrow \quad f(z) = f(i) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{R}(f) = \{۰\}$$

سوال ۴. *انتگرال مختلط زیر را محاسبه کنید.* (۱۰ نمره)

راهنمایی: توجه کنید که خم γ تنها یک دور به دور مبدا نچرخیده است.

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)\, dz}{z^۲(z^۲+۱)\cosh(z)}$$

$$\begin{cases} \gamma : [۰,۱] \to \mathbb{C} \\ \gamma(t) = \frac{۱}{۱۰۰}\big(۲ + \sin(۲\pi t)\big)e^{۸\pi i t} \end{cases}$$

پاسخ. با توجه به قضیه انتگرال کوشی، آنچه از خم مورد نظر در محاسبه انتگرال مهم است، تعداد چرخش آن به دور مبدا است که چهار بار چرخیده است (چرا؟) پس اگر تعریف کنیم

$$\begin{cases} \eta : [۰,۱] \to \mathbb{C} \\ \eta(t) = e^{۲\pi i t} \end{cases}$$

با استفاده از قضیه مشتق داریم

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)\, dz}{z^۲(z^۲+۱)\cosh(z)} = ۴\int_\eta \frac{\sin(z)\, dz}{z^۲(z^۲+۱)\cosh(z)} = ۴\frac{۲\pi i}{۲\pi i}\int_\eta \frac{\sin(z)\, dz}{z^۲(z^۲+۱)\cosh(z)}$$
$$= ۸\pi i\frac{d}{dz}\Big[\frac{\sin(z)}{(z^۲+۱)\cosh(z)}\Big]\Big|_{z=۰} = ۸\pi i\frac{(\cos ۰)(۰^۲+۱)\cosh ۰ - ۰\times ۰}{(۰^۲+۱)^۲\cosh^۲ ۰} = ۸\pi i$$

سوال ۵. *انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید.* (۱۰ نمره) (مقدار اصلی آن مورد نظر است)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(۱+x^۴)^۲}dx$$

پاسخ. تعریف میکنیم

$$C_R = \{Re^{it} \mid t \in [۰,\pi]\} \quad , \quad \gamma_R = C_R \cup [-R, R]$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(۱+x^۴)^۲}dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{(۱+x^۴)^۲}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x + i\sin x}{(۱+x^۴)^۲}dx = \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{(۱+x^۴)^۲}dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz = \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz
\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz\right| &\le \int_۰^\pi \frac{Re^{-R\sin t}dt}{(R^۴-۱)^۲} \le \int_۰^\pi \frac{Re^{-۲Rt/\pi}dt}{(R^۴-۱)^۲} = \\
&= \frac{-\pi}{۲}\frac{e^{-۲Rt/\pi}}{(R^۴-۱)^۲}\Big|_۰^\pi = \frac{-\pi}{۲}\frac{e^{-۲R}-۱}{(R^۴-۱)^۲} \\
\Longrightarrow \quad \lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz\right| &= ۰ \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz = ۰
\end{aligned}$$

همچنین

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz = \int_{\gamma_۲} \frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}dz = ۲\pi i\Big[\mathrm{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}\Big)\Big|_{e^{i\pi/۴}} + \mathrm{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}\Big)\Big|_{e^{i۳\pi/۴}}\Big]$$

$$\begin{aligned}
z^۴+۱ &= (z-e^{i\pi/۴})(z-e^{۳\pi i/۴})(z-e^{-i\pi/۴})(z-e^{-۳\pi i/۴}) \\
p(z) &:= (z-e^{۳\pi i/۴})^۲(z-e^{-i\pi/۴})^۲(z-e^{-۳\pi i/۴})^۲ \\
\Longrightarrow \quad p'(z) &= ۲(z-e^{۳\pi i/۴})(z-e^{-i\pi/۴})^۲(z-e^{-۳\pi i/۴})^۲+ \\
&+ ۲(z-e^{۳\pi i/۴})^۲(z-e^{-i\pi/۴})(z-e^{-۳\pi i/۴})^۲+ \\
&+ ۲(z-e^{۳\pi i/۴})^۲(z-e^{-i\pi/۴})^۲(z-e^{-۳\pi i/۴}) = \\
&= ۲p(z)\Big(\frac{۱}{z-e^{۳\pi i/۴}} + \frac{۱}{z-e^{-i\pi/۴}} + \frac{۱}{z-e^{-۳\pi i/۴}}\Big)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}\Big)\Big|_{e^{i\pi/۴}} = \frac{d}{dz}\Big[\frac{e^{iz}}{p(z)}\Big]\Big|_{e^{i\pi/۴}} = \frac{ie^{iz}p(z)-p'(z)e^{iz}}{p^۲(z)}\Big|_{e^{i\pi/۴}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dz}\Big[\frac{e^{iz}}{p(z)}\Big]\Big|_{e^{i\pi/۴}} = \frac{-e^{iz}}{p(z)}\Big(-i+\frac{p'(z)}{p(z)}\Big)$$

$$p(e^{i\pi/۴}) = (e^{i\pi/۴}-e^{۳\pi i/۴})^۲(e^{i\pi/۴}-e^{-i\pi/۴})^۲(e^{i\pi/۴}-e^{-۳\pi i/۴})^۲ =$$

$$= \Big(\sqrt{۲}i\sqrt{۲}۲e^{i\pi/۴}\Big)^۲ = ۴^۲ i^۲ e^{۲i\pi/۴} = -۱۶i$$

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{۲}{z-e^{۳\pi i/۴}} + \frac{۲}{z-e^{-i\pi/۴}} + \frac{۲}{z-e^{-۳\pi i/۴}} = ۲\Big(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{i\sqrt{۲}} + \frac{۱}{۲e^{i\pi/۴}}\Big) =$$

$$= ۲\Big(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} - i\frac{\sqrt{۲}}{۴}\Big) = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dz}\Big[\frac{e^{iz}}{p(z)}\Big]\Big|_{e^{i\pi/۴}} = \frac{-\exp(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{-۱۶i}\Big(-i+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

$$= \frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶i}\Big(\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)\Big(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

$$= \frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

$$= \frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)+$$

$$+ i\frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲})\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}\Big)\Big|_{e^{i\pi/۴}} = \frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)+$$

$$+ i\frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲})\Big)$$

و همچنین بطور مشابه داریم:

$$z^۴+۱ = (z-e^{i\pi/۴})(z-e^{۳\pi i/۴})(z-e^{-i\pi/۴})(z-e^{-۳\pi i/۴})$$

$$q(z) := (z-e^{i\pi/۴})^۲(z-e^{-i\pi/۴})^۲(z-e^{-۳\pi i/۴})^۲$$

$$\Longrightarrow \quad q'(z) = ۲(z-e^{i\pi/۴})(z-e^{-i\pi/۴})^۲(z-e^{-۳\pi i/۴})^۲+$$

$$+ ۲(z-e^{i\pi/۴})^۲(z-e^{-i\pi/۴})(z-e^{-۳\pi i/۴})^۲+$$

$$+ ۲(z-e^{i\pi/۴})^۲(z-e^{-i\pi/۴})^۲(z-e^{-۳\pi i/۴}) =$$

$$= ۲q(z)\Big(\frac{۱}{z-e^{i\pi/۴}} + \frac{۱}{z-e^{-i\pi/۴}} + \frac{۱}{z-e^{-۳\pi i/۴}}\Big)$$

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(۱+z^۴)^۲}\Big)\Big|_{e^{۳\pi i/۴}} = \frac{d}{dz}\Big[\frac{e^{iz}}{q(z)}\Big]\Big|_{e^{۳\pi i/۴}} = \frac{ie^{iz}q(z)-q'(z)e^{iz}}{q^۲(z)}\Big|_{e^{۳\pi i/۴}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dz}\Big[\frac{e^{iz}}{q(z)}\Big]\Big|_{e^{۳\pi i/۴}} = \frac{-e^{iz}}{q(z)}\Big(-i+\frac{q'(z)}{q(z)}\Big)\Big|_{e^{۳\pi i/۴}}$$

$$q(e^{۳\pi i/۴}) = (e^{۳\pi i/۴}-e^{i\pi/۴})^{۲}(e^{۳\pi i/۴}-e^{-i\pi/۴})^{۲}(e^{۳\pi i/۴}-e^{-۳\pi i/۴})^{۲} =$$

$$= \Big(-\sqrt{۲}\,۲e^{۳\pi i/۴}i\sqrt{۲}\Big)^{۲} = ۱۶(-۱)e^{۳\pi i/۲} = ۱۶i$$

$$\frac{q'(z)}{q(z)}\Big|_{e^{۳\pi i/۴}} = \Big(\frac{۲}{z-e^{۳\pi i/۴}}+\frac{۲}{z-e^{-i\pi/۴}}+\frac{۲}{z-e^{-۳\pi i/۴}}\Big)\Big|_{e^{۳\pi i/۴}} =$$

$$= ۲\Big(\frac{-۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲e^{۳\pi i/۴}}+\frac{۱}{i\sqrt{۲}}\Big) =$$

$$= ۲\Big(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}-i\frac{\sqrt{۲}}{۴}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big) = \frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dz}\Big[\frac{e^{iz}}{q(z)}\Big]\Big|_{e^{۳\pi i/۴}} = \frac{-\exp(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{۱۶i}\Big(-i-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

$$= \frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶i}\Big(\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)\Big(-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

$$= \frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

$$= \frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)+$$

$$+(-i)\frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(۱+z^{۴})^{۲}}\Big)\Big|_{e^{i\pi/۴}} = \frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)+$$

$$+(-i)\frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

پس در نهایت داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(۱+x^{۴})^{۲}}dx = ۲\pi i\Big[\frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)+$$

$$+i\frac{-e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲})\Big)+$$

$$+\frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)+$$

$$+(-i)\frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)\Big]$$

$$= ۲\pi i(-i)\Big[۲\frac{e^{\sqrt{۲}/۲}}{۱۶}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)\Big]$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(۱+x^{۴})^{۲}}dx = \frac{\pi e^{\sqrt{۲}/۲}}{۴}\Big(\frac{۲+۳\sqrt{۲}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Big)$$

سوال ۶. *سری لوران تابع زیر را حول $z = ۰$ بیابید. توجه کنید که باید ضرایب سری لوران یعنی a_n بر حسب n بیان گردد.* (۱۰ نمره)

$$f(z) = e^{۲z}\cos z\cosh z$$

پاسخ. به روشنی تابع f تابعی تحلیلی است و سری لوران حول مبدا آن همان سری مکلوران آن خواهد بود. پس داریم:

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=۰}^{+\infty} &= e^{۲z}\cos z\cosh z = e^{۲z}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲}\frac{e^{z}+e^{-z}}{۲} \\ &= \frac{e^{۲z}}{۴}\Big(e^{iz+z}+e^{iz-z}+e^{-iz+z}+e^{-iz-z}\Big) \\ &= \frac{۱}{۴}\Big(e^{(۳+i)z}+e^{(۱+i)z}+e^{(۳-i)z}+e^{(۱-i)z}\Big) \\ &= \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{۱}{۴}\frac{z^n}{n!}\Big((۳+i)^n+(۱+i)^n+(۳-i)^n+(۱-i)^n\Big) \\ \implies \quad a_n &= \frac{۱}{۴n!}\Big((۳+i)^n+(۱+i)^n+(۳-i)^n+(۱-i)^n\Big)\; n\in\mathbb{Z}\,,\; n\geq ۰ \end{aligned}$$

سوال ۷. *فرض کنید $u : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی همساز باشد و $\nabla u = (u_x, u_y) \neq (۰,۰)$. آیا سطوح تراز این تابع یعنی*

$$u^{-۱}(a) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \mid u(x,y) = a\}$$

می‌تواند خمی بسته در صفحه باشد؟ چرا؟ (۱۰ نمره)

راهنمایی: لازم به ذکر است که در این حالت سطح تراز همیشه تصویر خمی مشتق‌پذیر با مشتق ناصفر مانند γ خواهد بود و برای چنین خمی، صفحه منهای خم، به دو مولفه همبند باز در صفحه افراز می‌شود که مرز هر دو مولفه، تصویر همان خم γ است.

پاسخ. راه اول: فرض کنید که سطح ترازی وجود دارد که خم بسته است. چون u همساز است، پس مزدوج همسازی مانند v دارد و طبق معادلات کوشی ــ ریمان، $\nabla v = R_{\pi/۲}(\nabla u)$. همچنین در سطح تراز u داریم:

$$a = u(\gamma(t)) \quad\implies\quad ۰ = \frac{d}{dt}u(\gamma(t)) = \nabla u(\gamma(t)).\gamma^{'}(t)$$

با توجه به اینکه مشتق خم یاد شده برداری ناصفر است، پس $\gamma^{'}(t)$ و $\nabla v(\gamma(t))$ که هر دو به $\nabla v(\gamma(t))$ عمود هستند، باید مضرب ناصفری از هم باشند. پس برای مثال داریم

$$\nabla v(\gamma(t)) = f(t)\gamma^{'}(t) \quad , \quad f(t) > (<)۰$$

و همچنین این تابع f پیوسته است. حال اگر خم γ خمی بسته باشد پس برای مثال $\gamma(l) = \gamma(\text{۰})$. از طرفی با توجه به پیوسته بودن f و γ' و این که هر تابع پیوسته روی بازه بسته $[\text{۰}, l]$، از پایین کراندار است، داریم:

$$\frac{d}{dt}v(\gamma(t)) = \nabla v(\gamma(t)).\gamma'(t) = f(t)\gamma'(t).\gamma'(t) = f(t)|\gamma'(t)|^{\text{۲}} \geq b > \text{۰}$$
$$\implies \quad v(\gamma(t)) > at + v(\gamma(\text{۰})) \quad \implies \quad v(\gamma(\text{۰})) = v(\gamma(l)) > al + v(\gamma(\text{۰}))$$

و این تناقض است. پس خم γ خمی بسته نیست.

راه دوم. اگر خم γ خمی بسته باشد، ناحیه را به سه قسمت داخل خم، روی خم و بیرون خم افراز میکند که خود مرز این دو ناحیه بیرون و درون خم است. چون تابع u همساز است، بنا بر اصل بیشینه و اصل کمینه، بیشترین مقدار و کمترین مقدار خود را در داخل خم γ نمیگیرد، بلکه بر روی این خم میگیرد. حال چون این خم سطح ترازی برای u است داریم:

$$\forall\, t \quad u(\gamma(t)) = a \quad \implies \quad \min u|_\gamma = \max u|_\gamma = a$$

پس برای هر تابع u در داخل خم یادشده ثابت است، پس در تمام نقاط درون خم $\nabla u = (\text{۰}, \text{۰})$ و این خلاف فرض است. پس خم یاد شده نمیتواند خمی بسته باشد.

راه سوم (منسوب به آقای امیررضا معمارزاده):

مزدوج همساز u را v مینامیم. به روشنی v روی کل صفحه قابل تعریف است. پس تابع $f(z) := u(z)+iv(z)$ روی کل صفحه مختلط، تحلیلی و در نتیجه تام است. حال توجه کنید که برای یک مقدار $a \in \mathbb{R}$ که $u^{-\text{۱}}(a) \neq \emptyset$ داریم

$$f^{-\text{۱}}(a + i\mathbb{R}) := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid u(x, y) = a\ ,\ v(x, y) \in \mathbb{R}\}$$
$$= u^{-\text{۱}}(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\text{۲}} \mid u(x, y) = a\}$$

پس به روشنی داریم:

$$f(u^{-\text{۱}}(a)) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{\text{۲}} \mid x + iy \in u^{-\text{۱}}(a)\} = a + iv(u^{-\text{۱}}(a))$$

و چون بنا بر قرض خلف $u^{-\text{۱}}(a) = \{\gamma(t) \mid t \in [\text{۰}, l]\}$ یک خم بسته است، پس

$$\exists\, A\ \in \mathbb{R} \quad v(u^{-\text{۱}}(a)) = \{v(\gamma(t)) \mid t \in [\text{۰}, l]\} \subset [-A, A]$$

حل میخواهیم نشان دهیم که در این صورت تابع f ثابت است. برای این منظر از تابع کمکی پایین استفاده میکنیم.

$$M_{\text{۱}}(z) = \frac{z - (a + iA)}{z - (a - iA)}$$

توجه کنید که نگاشت $M_{\text{۱}}$ دو خط $x = a$ را به خط حقیقی تصویر میکند و پاره خط $a + i(-A, A)$ را نیز به بخش منفی خط حقیقی. در نتیجه مابقی نیم خط $x = a$ که در تصویر f قرار ندارد را به قسمت نامنفی

خط حقیقی در $\mathbb{C}$ خواهد برد. حال با استفاده از نگاشت G و T معرفی شده در پاسخ قسمت الف سوال ۳ تابع $N(z) = T(G(M_1(z)))$ را معرفی میکنیم. پس مانند پاسخ قسمت الف سوال ۳ داریم

$$N(f(\mathbb{C})) \subset B$$

و در نتیجه کراندار است و طبق قضیه لیوویل ثابت است. حال با توجه به وارون پذیری نگاشت N روی برد f به روشنی f ثابت است و در نتیجه u ثابت است. پس $\nabla u = (u_x, u_y) = 0$ که با فرض در تناقض است. پس $u^{-1}(a)$ خمی بسته نیست.

سوال ۸. *آیا تابعی پیوسته مانند*

$$u : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \, , \; z \neq 1\} \to \mathbb{R}$$

وجود دارد که در تمام نقاط داخل قرص واحد یعنی $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *همساز بوده و*

$$\forall \, z \in \mathbb{C} \quad |z| = 1 \, , \; z \neq 1 \quad u(z) = 0$$

ولی ثابت نباشد؟ اگر وجود دارد مثال بزنید و اگر وجود ندارد دلیل آن را بیان کنید. (۱۰ نمره)

راهنمایی: از نگاشت موبیوسی استفاده کنید که قرص واحد را به نیم صفحه بالایی می‌برد.

پاسخ. تابع y بر نیم صفحه بالا و همچنین بر کل صفحه همساز است. در واقع این تابع بخش موهومی نگاشت همانی است. حال اگر با نگاشتی موبیوس از درون دایره واحد به نیم صفحه بالا بیاییم بطوریکه نقطه ۱ به ∞ تصویر شود و سپس آن را با نگاشت همانی ترکیب کنیم، پس بخش حقیقی و موهومی تابع حاصل همساز نا ثابت خواهند بود و به ویژه بخش موهومی روی دایره واحد به غیر از ۱ صفر خواهد بود، چون نگاشت موبیوس مورد نظر دایره واحد را به خط حقیقی میبرد و همچنین وقتی به نقطه $z = 1$ نزدیک میشویم، تابع مورد نظر به بینهایت نزدیک خواهد شد. پس داریم:

$$\begin{aligned}
M(z) &= \frac{z-i}{z-1}\frac{2}{i+1} = \frac{(z-i)(\bar{z}-1)}{|z-1|^2}\frac{2(1-i)}{2} = \\
&= \frac{(x+iy-i)(x-iy-1)}{(x-1)^2+y^2}(1-i) = \\
&= \frac{(x+i(y-1))(x-1-iy)(1-i)}{(x-1)^2+y^2} = \\
&= \frac{(x(x-1)+y(y-1)+i[(y-1)(x-1)-xy]}{(x-1)^2+y^2}(1-i) = \\
&= \frac{[x^2-2x+y^2-2y+1]+i[1-x^2-y^2]}{(x-1)^2+y^2} = \\
u(x,y) &:= \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}
\end{aligned}$$

همچنین به روشنی تابع با این خاصیت یکتا نیست. زیرا توابع موبیوسی بیشماری خاصیت یادشده در بالا را دارند.

موفق و پیروز و سربلند باشید