به نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ: ۱۳۹۶/۰۱/۲۳
شماره: ....
پیوست: ....

امتحان میان ترم ریاضی عمومی ۱

۰۱۵–۲۲

نیمسال دوم ۹۶–۹۵

مدت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. فرض کنید اعداد مختلط z_1, z_2, z_3 ریشه های متمایز معادله $z^3 = 1$ باشند. مقدار عبارت

$$\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_1 z_3} + \frac{1}{z_2 z_3}$$

را محاسبه کنید.

(۱۰ نمره)

سؤال ۲. عدد حقیقی $0 < a < 1$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(۱۰ نمره)

(ب) دنباله $\{x_n\}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_0 = a,\ x_1 = \sin(a),\ x_2 = \sin(x_1),\ \cdots\cdots,\ x_{n+1} = \sin(x_n),\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

نشان دهید $\lim_{n\to\infty} x_n$ موجود و مقدارش رامحاسبه کنید.

(۱۰ نمره)

سؤال ۳. فرض کنید $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $f(0) = 1$ و $f(1) = 0$. نشان دهید عدد $c \in [0, 1]$ موجود است بطوری که $f(c) = c^3$.

(۱۰ نمره)

سؤال ۴. تابع $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تابع f پیوسته یکنواخت است.

(۱۰ نمره)

ادامه سؤالات در پشت برگه

سؤال ۵. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. نشان دهید:

$$|a\sin\theta + b\cos\theta| \leq \sqrt{a^{2}+b^{2}}$$

برای هر $\theta \in \mathbb{R}$.

(۱۰ نمره)

سؤال ٦. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+1}$ را در نظر بگیرید.

(الف) با استفاده از تقریب خطی در نقطه $x=1$ مقدار تقریبی $f(1/01)$ را بیابید.

(۸ نمره)

(ب) نشان دهید خطا در این تقریب کمتر از 10^{-4} می باشد.

(۸ نمره)

(ج) مقدار تقریبی محاسبه شده در قسمت (الف) از مقدار واقعی $f(1/01)$، بزرگتر است یا کوچکتر؟ چرا؟

(۴ نمره)

نیمسال دوم ۹۸-۹۶

راه حل سوالات میان‌ترم

ریاضی عمومی ۱

۱- چون z_1, z_2, z_3 ریشه‌های معادله $z^3 - 1 = 0$ می‌باشند، داریم:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_1 z_3} + \frac{1}{z_2 z_3} = z_3 + z_2 + z_1 = 0$$

راه دیگر: می‌توان ریشه‌های معادله $z^3 = 1$ را یافت و عبارت فوق را مستقیماً محاسبه نمود.

۲- (الف) اگر $\sqrt[n]{a}$ را با S_n نمایش دهیم، در این صورت دنباله $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله صعودی است و علاوه $1 \leq S_n \leq a$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. بنابراین مطابق قضیه دنباله S_n، دنباله‌ای همگرا است و حد آن را S نمایش می‌دهیم. از طرف دیگر داریم:

$$S_{2n} = \sqrt{S_n}$$

بنابراین مطابق قضایای (خواص همگرایی) حد، داریم:

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} S_n} \Rightarrow S = \sqrt{S} \Rightarrow S^2 = S \Rightarrow \begin{cases} S = 1 \\ S = 0 \end{cases}$$

چون $1 \leq S_n \leq a$، نتیجه می‌گیریم که $1 \leq S \leq a$. بنابراین داریم: $S = 1$

(ب) با توجه به خواص تابع $\sin$ (با استفاده از تعاریف اولیه و یا استفاده از مشتق) داریم:

$$0 < x < \pi/2 \Longrightarrow 0 < \sin x < x \qquad (*)$$

بنابراین دنباله $\{x_n\}$، دنباله‌ای نزولی و کراندار است و در نتیجه (با استفاده از قضایا) دنباله‌ای همگرا است، به عددی مانند p. همچنین داریم:

$$x_{n+1} = \sin x_n \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \sin(\lim_{n \to \infty} x_n) \Longrightarrow p = \sin p$$

با استفاده مجدد از $(*)$، برای p مقدار صفر را بدست خواهیم آورد.

۳- تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ را بصورت $g(x)=f(x)-x^3$ تعریف می‌کنیم.

سپس داریم: $g(0)=1>0$ & $g(1)=-1<0$ و چون g

(مطابق قضیه) تابعی پیوسته است، عدد $c\in[0,1]$ چنان موجود است که $g(c)=0$

۴- با توجه به رابطه زیر، حکم به سهولت قابل دستیابی است:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{y})}\right|\leq|\sqrt{y}-\sqrt{x}|\leq\sqrt{|y-x|}$$

برای هر x و y نامنفی.

<u>راه دیگر</u>: هر تابع پیوسته روی یک فاصله بسته و کراندار (قضیه) پیوسته یکنواخت است و چون مشتق

تابع f روی $[1,+\infty[$ کراندار است پس f روی $[1,+\infty[$ پیوسته

یکنواخت است. $\Leftarrow$ f روی کل فاصله $[0,+\infty[$ هم پیوسته یکنواخت است.

۵- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(\theta)=a\sin\theta+b\cos\theta$ در نظر بگیرید.

بوضوح f و f' موجود و پیوسته هستند و f تابعی با دوره تناوب 2π است

و بنابراین داریم:

$$M=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|f(\theta)|=\sup_{[0,2\pi]}|f(\theta)|=|f(c)|\ ,\quad \exists\, c\in[0,2\pi]$$

بنابراین مطابق قضیه داریم:

$$M=\max\{\overbrace{|f(0)|}^{|b|},\overbrace{|f(2\pi)|}^{|b|},|f(t_1)|,|f(t_2)|,\dots,|f(t_n)|\}\quad(*)$$

که در آن t_i ها در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$f'(t_i)=0\qquad 1\leq i\leq n$$

بنابراین کافی است، جوابهای معادله $f'(\theta)=0$ را بیابیم، یعنی

$$a\cos\theta-b\sin\theta=0\Rightarrow tg\theta=\frac{a}{b}$$

با بدست آوردن θ مقدار $\cos\theta$ برحسب $tg\theta$ و داشتن رابطه $(*)$ حکم به سهولت بدست می‌آید.

«مسئله فوق دارای راه حلهای دیگری نیز می‌باشد.»

✓ ٦ ج- ابتدا f' و f'' را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \\[2ex] f''(x) = \dfrac{-2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \end{cases}$$

مطابق قضیه می‌دانیم:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(c) h^2$$

به ازاء عدد c بین x و $x+h$.

با انتخاب $x=1$ و $h=0.01$ داریم:

$$f(1.01) = \frac{1}{2} - 0.01 + \frac{1}{2} f''(c)(0.01)^2 = 0.49 + \frac{1}{2} f''(c) 10^{-4}$$

که در آن $1 < c < 1.01$ می‌باشد:

از طرف دیگر برای هر $1 < \tilde{c} < 1.01$ داریم.

$$0 \leq f''(\tilde{c}) \leq \frac{2(3(1.01)^2 - 1)}{((1)^2+1)^3}$$

و در نتیجه داریم:

$$0 \leq f''(\tilde{c}) \leq \frac{2(3\times 2-1)}{(1+1)^3} = \frac{10}{8}$$

سرانجام خواهیم داشت:

$$f(1.01) = 0.49 + \overbrace{\frac{1}{2} f''(c)\, 10^{-4}}^{R}$$

همچنین R رابطه زیر صدق می‌کند:

$$0 \leq R < \frac{5}{8} \times 10^{-4} < 10^{-4}$$