به نام خدا

تاریخ: ۱۳۹۶/۰۴/۰۱
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

۰۱۵–۲۲

نیمسال دوم ۹۶–۹۵

مدت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. نمودار تابع $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x) = [(x^2 + 1)(x + 2)]^{-\frac{1}{2}}$$

راحول محور x ها دوران می دهیم. حجم ناحیه حاصل رامحاسبه کنید.

(۲۰ نمره)

سؤال ۲. تابع $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)\, dt$$

را در نظر بگیرید.

(الف) مشتق تابع f رامحاسبه کنید.

(۱۰ نمره)

(ب) نشان دهید $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(۱۰ نمره)

سؤال ۳. (الف) نشان دهید انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ همگرا ست و مقدارش را محاسبه کنید.

(۱۰ نمره)

(ب) حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\sqrt{\frac{i}{n-i}}$$

(۱۰ نمره)

ادامه سؤالات در پشت برگه

سؤال ۴. همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید:

(الف)

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n \log n}$$

(۱۰ نمره)

(ب)

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{۲}$$

(۱۰ نمره)

سؤال ۵. دنباله $\{a_n\}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a_n = \int_{۰}^{۱} \sin^n(x)\, dx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

(الف) نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$

(۱۰ نمره)

(ب) نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} a_n$ همگرا ست.

(۱۰ نمره)

سؤال ٦. سری توانی $\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{x^k}{(k+۱)!}$ را در نظر بگیرید.

(الف) مقدار $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ را محاسبه کنید و سپس فاصلهٔ همگرایی سری توانی فوق را بیابید.

(۱۰ نمره)

(ب) مشخص کنید (در داخل فاصلهٔ همگرایی) سری توانی فوق برابر با کدام تابع می باشد.

(۱۰ نمره)

نیمسال دوم ۹۶-۹۵ — راه حل سوالات پایان ترم

ریاضی عمومی ۱

۱-

$$V = \text{حجم} = \int_0^1 \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x+2)}$$

اما می‌دانیم: $\frac{1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2}$ که با محاسبه اعداد A ، B ، C داریم:

$$A = \frac{-1}{5},\quad B = \frac{2}{5},\quad C = \frac{1}{5}$$

پس داریم:

$$V = \frac{\pi}{5}\left(\int_0^1 \frac{-x+2}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+2}\right)$$

$$V = \frac{\pi}{5}\left(\frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x+2}\right)$$

$$V = \frac{\pi}{5}\left(-\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1 + 2\Big[\mathrm{Arctg}(x)\Big]_0^1 + \Big[\log(x+2)\Big]_0^1\right)$$

$$V = \frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi}{2} + \log 3 - \frac{3}{2}\log 2\right)$$

۲- (الف)

$$f'(x) = 2\exp(-(2x)^2) - 1\exp(-x^2) = 2\exp(-4x^2) - \exp(-x^2)$$

ب) مطابق قضایا می‌دانیم:

$$f(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)\,dt = (2x - x)\exp(-c^2)$$

که در آن c بین x ، $2x$ است؛ بنابراین

$$0 \leq x e^{-4x^2} \leq f(x) \leq x e^{-x^2}$$

برای هر $x \geq 0$.

اما با توجه به خواص تابع exp (یا استفاده از دستور هوپیتال) می‌دانیم:

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

راه حل (های) دیگری نیز وجود دارد.

۳- (الف)

$$I=\int_{0^+}^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_{0^+}^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \int_{0^+}^{1^-} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

با تغییر متغیر $u=2x-1$ خواهیم داشت:

$$I = \int_{-1^+}^{1^-} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\operatorname{Arcsin}(u)\Big]_{-1^+}^{1^-} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \pi$$

راه دیگر: با تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ نیز می‌توان انتگرال را محاسبه نمود.

(ب) با توجه به تعاریف می‌دانیم:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}(1-\frac{i}{n})}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\sqrt{\frac{i}{n-i}}$$

۴- (الف) توابع $x\mapsto \log x$ و $x \mapsto x$ برای $x\geq 1$، صعودی هستند، بنابراین تابع نامنفی $x\mapsto \frac{1}{x\log x}$ (برای $1\leq x$) نزولی است و مطابق قضیه، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ همگراست $\Leftrightarrow$ انتگرال ناسره $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log x}$ همگراست.

از طرف دیگر داریم: $u=\log x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log x} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{du}{u} = \Big[\log u\Big]_{\log 2}^{\infty} = \infty \quad (\text{واگراست})$$

نتیجتاً، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ واگراست.

(ب) با توجه به خواص تابع log (یا استفاده از دستور هوپیتال)، برای هر $\alpha > 0$، داریم:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}} = 0$$

بنابراین، برای $x > 0$ به اندازه کافی بزرگ، داریم:

$$0 \leq \frac{\log x}{x^{\alpha}} \leq 1$$

سپس، با انتخاب $\alpha = \frac{1}{3}$، عدد طبیعی N_0 چنان موجود است که

$$n \geq N_0 \implies \left(\frac{\log n}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{3}}}$$

هم اکنون، با توجه به اینکه سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{3}}}$ همگراست (مثلاً با استفاده از آزمون انتگرال)، نتیجه خواهیم گرفت که سری $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^2$ همگراست.

راه حل (های) دیگری نیز وجود دارد.

۵ - (الف) با توجه به خواص تابع $\sin$ می دانیم (مثلاً با استفاده از قضیه مقدار میانگین)

$$\forall x \in [0, 1] : \quad 0 \leq \sin x \leq x$$

در این صورت داریم

$$0 \leq a_n = \int_0^1 \sin^n x \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

نتیجتاً، خواهیم داشت:

$$\lim_{n \to} a_n = 0$$

(ب) با توجه به خواص تابع سینوس می‌دانیم: $\forall x \in [0,1] : 0 \leq \sin x \leq 1$

بنابراین $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی خواهد بود، چون

$$\forall x \in [0,1] : 0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x \Longrightarrow \underbrace{\int_0^1 \sin^{n+1} x \, dx}_{a_{n+1}} \leq \underbrace{\int_0^1 \sin^n x \, dx}_{a_n}$$

در این صورت با توجه به قضیه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگراست (با استفاده از قسمت (الف)).

راه حل دیگری نیز وجود دارد.

۶- (الف) به روشنی داریم ($[x]$ = جزء صحیح عدد x):

$$n! = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times \left[\frac{n}{2}\right]}_{I} \times \underbrace{\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right) \times \cdots \times 1}_{II} \geq I \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

سپس خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

بنابراین شعاع همگرایی سری توانی برابر است با

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{(k+1)!}}} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{(k+1)!} \geq \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$$

بنابراین $\rho = \infty$ و نتیجتاً فاصله همگرایی سری توانی برابر $]-\infty, +\infty[$ می‌باشد.

(ب) می‌دانیم که سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ برابر تابع e^x می‌باشد (مثلاً با استفاده از تقریب توابع با چندجمله‌ای تیلور آن). حال اگر $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ را با $f(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$x f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) - 1 = e^x - 1$$

بنابراین برای x مخالف صفر، مقدار $f(x)$ برابر $\frac{e^x - 1}{x}$ می‌باشد.

از طرف دیگر، به وضوح، برای $x = 0$ مقدار سری توانی برابر $f(0) = 1$ می‌باشد.

راه حل دیگری نیز وجود دارد.