



تاریخ امتحان: ۹۲/۱۲/۱۵
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان ترم اول ریاضی عمومی ۲

۲۲ - ۰۱۶

نیمسال دوم ۹۳-۹۲

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در کتابچه امتحانی بنویسید و در هر برگه کتابچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_k$ و B نقاطی از $\mathbb{R}^n$ باشند. ثابت کنید اگر مجموعه‌ای $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ مستقل خطی باشد و $\{A_1 + B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی، آنگاه $\{A_1 - B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی است.

سؤال ۲. نقاط زیر از $\mathbb{R}^4$ را در نظر بگیرید:

$$A_1 = (1, 1, 1, 1), \quad A_2 = (1, 0, 3, 0), \quad A_3 = (2, 1, 4, 1).$$

فرض کنید $E = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ و یک پایهٔ یکا متعامد برای $E^\perp$ پیدا کنید. (روشی را که برای پیدا کردن پایهٔ یکا متعامد استفاده می‌کنید توضیح دهید.)

سؤال ۳. نقاط زیر از $\mathbb{R}^6$ را در نظر بگیرید:

$$a = (2, 1, 3, -1, 3, 1), \quad A_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad A_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ b = (1, 4, 2, -2, 5, 3), \quad B_1 = (1, -1, 1, 0, 1, -1), \quad B_2 = (1, -1, 0, 1, -1, 1).$$

نقطهٔ P را روی صفحهٔ $E = a + \langle A_1, A_2 \rangle$ و نقطهٔ Q را روی صفحهٔ $F = b + \langle B_1, B_2 \rangle$ طوری پیدا کنید که خط گذرا از P و Q هم بر صفحهٔ E عمود باشد و هم بر صفحهٔ F . (روشی را که برای پیدا کردن نقاط P و Q استفاده می‌کنید توضیح دهید.)

سؤال ۴. فرض کنید $A_1, \dots, A_{k+1}$ نقاطی از $\mathbb{R}^n$ باشند با این ویژگی که برای هر $i \neq j$ ، $A_i \cdot A_j < 0$. ثابت کنید اگر $E = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ، آنگاه $\dim(E) = k$.

(راهنمایی: اگر یک ترکیب خطی از $A_1, \dots, A_k$ برابر با صفر شود، جملات با ضرایب منفی را به طرف دیگر تساوی انتقال دهید تا هر دو طرف تساوی که آنها را B می‌نامیم ضرایب نامنفی داشته باشند. اکنون به $B \cdot B$ و $B \cdot A_{k+1}$ توجه کنید.)

سؤال ۵. فرض کنید $A_1, \dots, A_k$ نقاطی از $\mathbb{R}^n$ باشند. درستی هریک از احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) اگر E کوچکترین زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشد که شامل نقاط $A_1, \dots, A_k$ است، آنگاه

$$E = \{t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}, t_1 + \dots + t_k = 1\}.$$

(E کوچکترین زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ است که شامل نقاط $A_1, \dots, A_k$ است، یعنی E زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ است که شامل نقاط $A_1, \dots, A_k$ می‌باشد و اگر F نیز زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشد که شامل نقاط $A_1, \dots, A_k$ است، آنگاه $E \subseteq F$.)

(ب) اگر $k \geq n+2$ ، آنگاه اعداد حقیقی $t_1, \dots, t_k$ وجود دارند که لااقل یکی از آنها ناصفر است، $t_1 + \dots + t_k = 0$ و نیز $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = 0$.

سؤال ۶. فرض کنید $n+2$ نقطه در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم. ثابت کنید طوری می‌توانیم این نقاط را به دو دسته مجزای ناتهی تقسیم کنیم که کوچکترین زیرفضای مستوی که شامل نقاط دسته اول است، کوچکترین زیرفضای مستوی که شامل نقاط دسته دوم است را قطع کند.
(راهنمایی: از سؤال ۵ استفاده کنید.)

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۵ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره، سؤال ۳: ۲۰ نمره، سؤال ۴: ۱۵ نمره، سؤال ۵: ۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۶: ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره