



$$Q = b + s_1 B_1 + s_2 B_2,$$

که در آن $t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. چون خط گذرا از P و Q هم بر E عمود است و هم بر F ، پس $(P - Q) \cdot A_1 = 0$ ، $(P - Q) \cdot A_2 = 0$ ، $(P - Q) \cdot B_1 = 0$ و $(P - Q) \cdot B_2 = 0$. چون

$$P - Q = (1 + t_1 - s_1 - s_2, -3 + t_2 + s_1 + s_2, 1 - s_1, 1 - s_2, -2 - s_1 + s_2, -2 + s_1 - s_2),$$

تساوی‌های بالا به دستگاه معادلات زیر منجر می‌شوند:

$$\begin{cases} 1 + t_1 - s_1 - s_2 = 0 \\ -3 + t_2 + s_1 + s_2 = 0 \\ 5 + t_1 - t_2 - 5s_1 = 0 \\ 5 + t_1 - t_2 - 5s_2 = 0 \end{cases}$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد $t_1 = t_2 = s_1 = s_2 = 1$ است و لذا به دست می‌آوریم:

$$P = (3, 2, 3, -1, 3, 1), \quad Q = (3, 2, 3, -1, 5, 3). \quad \blacksquare$$

سؤال ۴: نشان می‌دهیم مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است. فرض کنید

$$t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = 0$$

که در آن $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. جملات با ضرایب منفی را (در صورت وجود) به طرف راست در تساوی بالا انتقال می‌دهیم. اگر I را مجموعه اندیس‌های طرف چپ و J را مجموعه اندیس‌های طرف راست فرض کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{i \in I} t_i A_i = \sum_{j \in J} s_j A_j := B,$$

که در آن برای هر $i \in I$ و هر $j \in J$ ، $t_i, s_j \geq 0$. در اینجا مجموعه‌های I و J می‌توانند تهی باشند، لیکن مجزا هستند و $I \cup J = \{1, \dots, k\}$. اکنون با توجه به اینکه برای هر $i \in I$ و هر $j \in J$ ، $A_i \cdot A_j < 0$ داریم

$$\begin{aligned} B \cdot B &= \left(\sum_{i \in I} t_i A_i \right) \cdot \left(\sum_{j \in J} s_j A_j \right) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} t_i s_j (A_i \cdot A_j) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

که این نیز ایجاب می‌کند $B = 0$. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} 0 &= B \cdot A_{k+1} \\ &= \left(\sum_{i \in I} t_i A_i \right) \cdot A_{k+1} \\ &= \sum_{i \in I} t_i (A_i \cdot A_{k+1}). \end{aligned}$$

حل مسائل امتحان میان‌ترم اول ریاضی عمومی ۲

۹۲/۱۲/۱۵

سؤال ۱: چون $\{A_1 + B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی است، پس اعداد حقیقی $t_1, \dots, t_2, t_k$ وجود دارند که لااقل یکی از آنها ناصفر است و

$$t_1(A_1 + B) + t_2 A_2 + \dots + t_k A_k = 0.$$

توجه می‌کنیم که اگر $t_1 = 0$ ، آنگاه استقلال خطی مجموعه $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ ایجاب می‌کند که

$$t_2 = \dots = t_k = 0$$

که تناقض است. در نتیجه $t_1 \neq 0$ و لذا

$$A_1 + B = (-t_2/t_1)A_2 + \dots + (-t_k/t_1)A_k$$

که ایجاب می‌کند $A_1 + B \in \langle A_2, \dots, A_k \rangle$. اکنون اگر فرض کنیم $\{A_1 - B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی است، مانند استدلال بالا، نتیجه می‌گیریم که $A_1 - B \in \langle A_2, \dots, A_k \rangle$. لذا

$$A_1 = (A_1 + B + A_1 - B)/2 \in \langle A_2, \dots, A_k \rangle$$

که تناقض با استقلال خطی مجموعه $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ دارد. پس $\{A_1 - B, A_2, \dots, A_k\}$ نمی‌تواند مجموعه‌ای وابسته خطی باشد و لذا مستقل خطی است. $\blacksquare$

سؤال ۲: چون $A_3 = A_1 + A_2$ ، پس داریم $E = \langle A_1, A_2 \rangle$. اما $\{A_1, A_2\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی است، لذا $\dim(E) = 2$ و در نتیجه $\dim(E^\perp) = 4 - 2 = 2$. پس اگر مجموعه $\{B_1, B_2\}$ را طوری پیدا کنیم که مستقل خطی باشد و نیز $B_1 \cdot A_1 = 0$ ، $B_1 \cdot A_2 = 0$ ، $B_2 \cdot A_1 = 0$ ، $B_2 \cdot A_2 = 0$ ، آنگاه مجموعه مذکور پایه‌ای برای $E^\perp$ خواهد بود. مثلاً می‌توانیم مجموعه

$$\{B_1 = (0, -1, 0, 1), B_2 = (-3, 2, 1, 0)\}$$

را به عنوان پایه‌ای برای $E^\perp$ در نظر بگیریم. اکنون اگر قرار دهیم

$$C_1 = B_1 = (0, -1, 0, 1),$$

$$C_2 = B_2 - \frac{B_2 \cdot B_1}{|B_1|^2} B_1 = (-3, 1, 1, 1),$$

آنگاه پایه‌ی یکا متعامد

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(-3, 1, 1, 1) \right\}$$

را برای $E^\perp$ به دست می‌آوریم. $\blacksquare$

سؤال ۳: فرض می‌کنیم

$$P = a + t_1 A_1 + t_2 A_2,$$

حال دسته اول را $\{A_i \mid i \in I\}$ و دسته دوم را $\{A_j \mid j \in J\}$ در نظر می‌گیریم. این دو دسته ناتهی و مجزا هستند و داریم:

$$\sum_{i \in I} \frac{t_i}{\lambda} A_i = \sum_{j \in J} \frac{s_j}{\lambda} A_j := A.$$

در تساوی بالا مجموع ضرایب در هر دو طرف تساوی برابر با یک است و لذا بنابر سؤال ۵ (الف)، A هم نقطه‌ای است در کوچکترین زیرفضای مستوی که شامل نقاط دسته اول است و هم نقطه‌ای است در کوچکترین زیرفضای مستوی که شامل نقاط دسته دوم است و در نتیجه این دو فضا همدیگر را قطع می‌کنند. ■

چون $k+1 \notin I$ پس برای هر $i \in I$ ، $A_i \cdot A_{k+1} < 0$ ، لذا تساوی بالا ایجاب می‌کند که برای هر $i \in I$ ، $t_i = 0$. به همین صورت برای هر $j \in J$ ، $s_j = 0$. پس مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است و لذا $\dim(E) = k$. ■

سؤال ۵: (الف) به راحتی می‌توان دید که

$$E = A_k + \langle A_1 - A_k, \dots, A_{k-1} - A_k \rangle.$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} E &= \left\{ A_k + \sum_{i=1}^{k-1} t_i (A_i - A_k) \mid t_1, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} t_i A_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} t_i \right) A_k \mid t_1, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k t_i A_i \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k t_i = 1 \right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ب) چون $k \geq n+2$ ، پس $k-1 \geq n+1 > n$ و لذا مجموعه

$$\{A_1 - A_k, \dots, A_{k-1} - A_k\}$$

وابسته خطی است. پس اعداد حقیقی $t_1, \dots, t_{k-1}$ وجود دارند که لااقل یکی از آنها ناصفر است و

$$t_1(A_1 - A_k) + \dots + t_{k-1}(A_{k-1} - A_k) = 0,$$

یا معادلاً

$$t_1 A_1 + \dots + t_{k-1} A_{k-1} + (-t_1 - \dots - t_{k-1}) A_k = 0.$$

اکنون اگر فرض کنیم $t_k := -t_1 - \dots - t_{k-1}$ ، نتیجه می‌گیریم که $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = 0$ و نیز $t_1 + \dots + t_k = 0$. ■

سؤال ۶: فرض کنید $n+2$ نقطه مطرح شده در سؤال، نقاط $A_1, \dots, A_{n+2}$ از $\mathbb{R}^n$ باشند. بنابر سؤال ۵ (ب)، اعداد حقیقی $t_1, \dots, t_{n+2}$ وجود دارند که لااقل یکی از آنها ناصفر است،

$$t_1 + \dots + t_{n+2} = 0,$$

و نیز

$$t_1 A_1 + \dots + t_{n+2} A_{n+2} = 0.$$

چون لااقل یکی از t_i ها ناصفر است و مجموع آنها صفر، پس لااقل یکی از آنها مثبت است و یکی نیز منفی. جملات با ضرایب منفی را به طرف راست در تساوی بالا انتقال می‌دهیم. اگر I را مجموعه اندیس‌های طرف چپ و J را مجموعه اندیس‌های طرف راست فرض کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{i \in I} t_i A_i = \sum_{j \in J} s_j A_j,$$

که در آن برای هر $i \in I$ و هر $j \in J$ ، $t_i, s_j \geq 0$ و لااقل یکی از t_i ها و نیز لااقل یکی از s_j ها مثبت‌اند. در اینجا مجموعه‌های I و J ناتهی‌اند، I و J مجزا هستند و $I \cup J = \{1, \dots, n+2\}$. هم‌چنین،

$$\sum_{i \in I} t_i = \sum_{j \in J} s_j := \lambda > 0,$$

که ایجاب می‌کند

$$\sum_{i \in I} \frac{t_i}{\lambda} = \sum_{j \in J} \frac{s_j}{\lambda} = 1.$$