

۴

$$u \in \ker f \Rightarrow f(u) = 0 \Rightarrow f(f(u)) = 0 \Rightarrow u \in \ker f \circ f \quad (1)$$

براین $\ker f \subseteq \ker f \circ f$

۴

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

از طرف دیگر:

$$= \dim \ker f \circ f + \dim \operatorname{Im} f \circ f$$

۳

و چون $\dim \ker f = \dim \ker f \circ f$ و $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f \circ f$ پس داریم:

۱

در نتیجه این دو زیرفضای برداری همپوشان و غیر متقاطع هستند پس مساویند.

۳

$$u \in \operatorname{Im} f \cap \ker f \Rightarrow u = f(u) \Rightarrow 0 = f(u) = f^2(u) = u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u = 0$$

۵+۲

$$A = Df_a = \begin{bmatrix} 1+yz & 1+xz & 1+xy \\ 1-yz \sin xyz & 1-xz \sin xyz & 1-xy \sin xyz \\ 1+yze^{xyz} & 1+xze^{xyz} & 1+xye^{xyz} \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

۴

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=-z$$

$$\Rightarrow \ker A = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

برای $\ker A$ بردارهای پایه می‌گیریم.

۴

$$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

و چون این دو بردار مستقل خطی اند یک پایه برای $\operatorname{Im} A$ خواهند بود.

④ اگر $t=0$ باشد رابطه مورد نظر با توجه به این است

1 $f(0) = \nabla f(0) \cdot 0 = 0$ است خواهرم

برای $t \neq 0$ از تابع $\mathcal{Q}$ مشتق میگیریم:

۱۲
$$\begin{aligned} \mathcal{Q}'(t) &= \frac{-f(tx)}{t^2} + \frac{1}{t} (\nabla f(tx) \cdot x) = \frac{-f(tx)}{t^2} + \frac{1}{t^2} (\nabla f(tx) \cdot (tx)) \\ &= \frac{-f(tx)}{t^2} + \frac{f(tx)}{t^2} = 0 \quad (\text{با توجه به فرض مسئله}) \end{aligned}$$

بنابراین تابع $\mathcal{Q}$ ثابت است اما داریم $\mathcal{Q}(1) = \frac{f(x)}{1} = f(x)$ بنابراین

۲
$$f(x) = \mathcal{Q}(1) = \mathcal{Q}(t) = \frac{f(tx)}{t} \Rightarrow tf(x) = f(tx)$$

۴
$$\nabla f(x, y) = (2xy - 2x, x^2 - 2y + 1)$$

⑤

۲
$$\nabla f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \vee y=1 \\ x^2 = 2y-1 \end{cases} \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

نقاط بحرانی اند

۴
$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2y-2 & 2x \\ 2x & -2 \end{bmatrix}$$

۳ در نقطه P_1 داریم $Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ مقدار ویژه این ماتریس برابر است با

$$0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+2) - 4 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{5} - 1$$

در این نقطه مقدار ویژه مثبت و یک مقدار ویژه منفی وجود دارد پس این نقطه زینی است

۳ در نقطه P_2 داریم $Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ مقدار ویژه این ماتریس برابر است با

$$0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+2) - 4 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{5} - 1$$

مانند حالت P_1 این نقطه نیز زینی است

۳ در نقطه P_3 داریم $Hf(P_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ این ماتریس قطری است و مقدار ویژه اش $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = -2$ دارند پس هر دو مقدار ویژه منفی اند یعنی P_3 نقطه محلی است

ما کسیم

۱- چون رویه برابر سطح قرار تابع $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ است پس PQ در این براین در مساحت اگر و تنها اگر داشته باشد

$$g(Q) = 1$$

$$\omega \quad (P-Q) \cdot \nabla g(Q) = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 2z = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 2$$

$$\Rightarrow x + y - z = 1 = h(x,y,z)$$

۲ این مجموعه نقاط مورد نظر منتهی به برابر است با $\{Q : g(Q) = 1, h(Q) = 1\}$

۱ فاصله Q از P برابر است با $f(Q) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$

بنابراین طبق قضیه ضرایب لاگرانژ میسیم این تابع در نقطه Q انتی می افتد که $\nabla f(Q) = \lambda_1 \nabla g(Q) + \lambda_2 \nabla h(Q)$ با این شرط که $\nabla h(Q)$ و $\nabla g(Q)$ مستقل خطی باشند.

ابتدا توجه می کنیم روی مجموعه مورد نظر ∇h و ∇g مستقل خطی اند زیرا

$$\nabla h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{bmatrix} \quad \nabla h \parallel \nabla g \Rightarrow x = y = z = t$$

$$\Rightarrow h(x,y,z) = 0$$

که این نقطه روی سطح قرار ندارد. این نشان می دهد در $\{g=1, h=1\}$ این دو بردار مستقل خطی اند

$$\begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{با کم کردن رابطه اول از دوم}} \begin{matrix} 2(y-x) = 2\lambda_1(y-x) \\ 2(y-x) = 2\lambda_1(y-x) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \{y=x \text{ و } \lambda_1=1\}$$

$$\omega \quad \boxed{1} \quad y=x \Rightarrow \begin{matrix} 2x - 2z = 1 \\ 2x^2 - 2z^2 = 1 = 2(x-z)(x+z) = x+z \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \frac{3}{4} = y \\ z = \frac{1}{4} \end{matrix}}$$

$$\boxed{2} \quad \lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -2 \Rightarrow 2z - 2 = -2z + 4 \Rightarrow 2z = 4 \Rightarrow z = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \Rightarrow y=3-x \Rightarrow 2x^2+9-6x=3$$

$$\Rightarrow x^2-3x+3=0$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \Delta = 9 - 12 < 0 \quad \text{بنابراین این معادله جواب ندارد پس تنها جواب مورد نظر همان نقطه}$$

$$\|PQ\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$