



سؤال ۳: اگر قرار دهیم

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\},$$

آنگاه حجم مطلوب برابر است با

$$\text{vol}(D) = \iiint_D dx dy dz.$$

به راحتی می‌توان دید که تغییر متغیرهای $u = \frac{x}{a}$, $v = \frac{y}{b}$ و $w = \frac{z}{c}$ ناحیه D را به صورت یک به یک و پوشا به ناحیه

$$D' = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \right\}$$

تصویر می‌کند. چون $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = abc$ بنابر قضیه تغییر متغیر می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz \\ &= \iiint_{D'} (abc) du dv dw \\ &= abc \times \iiint_{D'} du dv dw \\ &= abc \times \text{vol}(D') = \frac{4}{3} \pi abc. \blacksquare \end{aligned}$$

سؤال ۴: قرار می‌دهیم

$$I = \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

فرض کنید D یک ناحیه همبند ساده در $\mathbb{R}^2$ باشد که مبدأ مختصات را در بر ندارد و شامل خم داده شده C و نیز نیم‌دایره C' است که نقطه $(-1, 0)$ را در نیم صفحه پایینی به نقطه $(1, 0)$ وصل می‌کند. اگر

$$P(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

آنگاه $\mathbf{F} = (P, Q)$ و محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که روی D داریم

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

پس قضیه گرین نتیجه می‌دهد که انتگرال $\mathbf{F}$ روی هر خم بسته قطعه به قطعه هموار در D برابر با صفر است و لذا $\mathbf{F}$ روی D پایستار است. در نتیجه

$$I = \int_{C'} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

حل مسائل امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

۹۳/۳/۲۲

سؤال ۱: قرار دهید $I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \cos x^2 dx \right) dy$ و فرض کنید

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1 \right\}.$$

در نتیجه، بنابر قضیه فوبینی، $I = \iint_D \cos x^2 dA$ اما می‌توانیم بنویسیم

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \right\},$$

ولذا مجدداً بنابر قضیه فوبینی،

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \cos x^2 dA = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \cos x^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^2 \cos x^2 dx = \left[\frac{1}{3} \sin x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \sin 1. \blacksquare \end{aligned}$$

سؤال ۲: قرار دهید $I = \iint_D \cos \left(\frac{y-x}{y+x} \right) dx dy$ به راحتی

می‌توان دید که تغییر متغیرهای $u = y - x$ و $v = y + x$ ناحیه D را به صورت یک به یک و پوشا به ناحیه دوزنقه‌ای شکل D' تصویر می‌کند که رؤوس آن نقاط $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, 2)$ و $(2, 2)$ هستند. با توجه به اینکه $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$ و نیز

$$D' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v \right\},$$

لذا بنابر قضیه‌های تغییر متغیر و فوبینی می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \cos \left(\frac{u}{v} \right) \left(\frac{1}{2} \right) du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_{-v}^v \cos \left(\frac{u}{v} \right) du \right) dv \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^v \cos \left(\frac{u}{v} \right) du \right) dv \\ &= \int_1^2 \left(v \sin \left(\frac{u}{v} \right) \right) \Big|_0^v dv \\ &= \int_1^2 (v \sin 1) dv = \frac{2}{3} \sin 1. \blacksquare \end{aligned}$$

در نتیجه

$$I = -\frac{1}{6} \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

توجه می‌کنیم که کره S' که جهت آن به طرف مرکز کره است پرمایشی به صورت $\mathbf{r} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(u, v) = (R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, R \cos u)$$

دارد. همچنین،

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-R \sin u)(R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, R \cos u).$$

پس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6} \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dudv \\ &= -\frac{1}{6} \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \sin u \, dudv \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin u \, du \right) dv \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \left(-\cos u \Big|_0^\pi \right) dv \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^{2\pi} 2 \, dv = -\frac{1}{3} (2\pi) = -\frac{2\pi}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

سؤال ۶: مرز رویه S داده شده برابر است با

$$\partial(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1 \right\}.$$

در واقع $\partial(S)$ دایره‌ای در $\mathbb{R}^3$ است که در صفحه $z = 1$ قرار دارد و تصویر آن در صفحه xy دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱. برای استفاده از قضیه استوکس، جهت $\partial(S)$ را طوری در نظر می‌گیریم که تصویر آن در صفحه xy جهتی خلاف جهت مثلثاتی را به خود بگیرد. در این صورت، $\partial(S)$ پرمایشی به صورت $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$$

دارد. پس بنابر قضیه استوکس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{\partial(S)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (e \sin t, e \cos t, -e^{-\sin t} \sin t \cos t) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -e \, dt = -2\pi e. \blacksquare \end{aligned}$$

اما نیم‌دایره C' پرمایشی به صورت $\gamma : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

دارد. پس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} I &= \int_{C'} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_\pi^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt \\ &= \int_\pi^{2\pi} dt = \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

سؤال ۵: محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ که

$$F_1(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

قرار می‌دهیم $I = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$. چون رویه S پرمایشی به صورت $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1)$ ، $\mathbf{r} : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ دارد (توجه می‌کنیم که $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = i \times j = k$)، پس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} I &= \iint_{[-1, 1] \times [-1, 1]} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dudv \\ &= \iint_{[-1, 1] \times [-1, 1]} \mathbf{F}(u, v, 1) \cdot k \, dudv \\ &= \iint_{[-1, 1] \times [-1, 1]} F_3(u, v, 1) \, dudv \\ &= \iint_{[-1, 1] \times [-1, 1]} \frac{-1}{(u^2 + v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \, dudv. \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید D ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^2$ به شکل مکعب مربع باشد که وجه بالایی آن S است. وجه S همراه با پنج وجه دیگر از این مکعب مربع، مرز D را تشکیل می‌دهند. اگر جهت مرز D را برون‌گرا فرض کنیم، به راحتی می‌توان دید که انتگرال $\mathbf{F}$ روی هر کدام از وجوه برابر با I است. در نتیجه

$$I = \frac{1}{6} \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

حال کره S' به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R را طوری در نظر می‌گیریم که S' درون D قرار بگیرد. جهت S' را نیز به طرف مرکز کره در نظر می‌گیریم. ناحیه بین مکعب D و کره S' را D' می‌نامیم. چون در ناحیه D' شرایط قضیه دیورژانس برقرار است و نیز $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ ، لذا

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ = \iint_{\partial D'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{D'} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = 0. \end{aligned}$$