



تاریخ امتحان: ۱۳/۲/۱۸
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۲

۲۲ - ۰۱۶

نیمسال دوم ۹۲-۹۳

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در کتابچه امتحانی بنویسید و در هر برگه کتابچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی است طوری که زیرفضاهای خطی $f(\mathbb{R}^n)$ و $f \circ f(\mathbb{R}^n)$ بعدی برابر دارند. نشان دهید $\ker(f \circ f) = \ker(f)$ و نتیجه بگیرید $\ker(f) \cap f(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

سؤال ۲. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $f(x, y, z) = (x + y + z + xyz, x + y + z + \cos(xyz), x + y + z + e^{xyz})$ داده شده است. مشتق f را در نقطه $a = (0, 1, 2)$ پیدا کنید و یک پایه برای هسته و تصویر آن بیابید.

سؤال ۳. فرض کنید z تابعی از u و v با مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشد و در نقطه $a = (1, \frac{\pi}{4})$ داشته باشیم:
 $\frac{\partial z}{\partial u}(a) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial v}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(a) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(a) = -1.$
 اگر $u = x + \sin y, v = y + \sin x$ و $b = (0, \frac{\pi}{4})$ ، مقادیر $\frac{\partial z}{\partial x}(b), \frac{\partial z}{\partial y}(b), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(b), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(b)$ را محاسبه کنید.

سؤال ۴. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این ویژگی که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $\nabla f(x) \cdot x = f(x)$. نشان دهید برای هر $t \in \mathbb{R}$ و هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $f(tx) = tf(x)$.

(راهنمایی: برای $x \in \mathbb{R}^n$ داده شده، به تابع $\varphi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\varphi(t) = f(tx)/t$ توجه کنید.)

سؤال ۵. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y) = x^2y - x^2 - y^2 + y + 5$ داده شده است. نقاط بحرانی f را مشخص کنید و تعیین کنید کدامیک نقطه ماکسیم موضعی، نقطه مینیم موضعی یا نقطه زنی است.

سؤال ۶. رویه $1 = x^2 + y^2 - 2z^2$ و نقطه $P = (1, 1, 1)$ را در نظر بگیرید. مجموعه تمام نقاط Q از این رویه را بیابید طوری که پاره خط PQ در نقطه Q بر رویه مماس باشد. کوتاهترین طول، در بین چنین پاره خط‌های مماس PQ چقدر است؟ چرا؟

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۲، ۳، ۴: هر کدام ۱۵ نمره، سؤال‌های ۵، ۶: هر کدام ۲۰ نمره.
مجموع: ۱۰۰ نمره