



فرض کنید $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی C^1 باشد که $\nabla g_1(p_0) \neq 0$. نشان دهید همسایگی V حول p_0 و تابع یک به یک و پوشا $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود دارد که $g_1(\varphi(y_1, \dots, y_n)) = y_1$ به عبارت دیگر تغییر مختصاتی وجود دارد که سطوح تراز تابع g_1 را در نزدیکی نقطه صاف p_0 می‌کند!

این گزاره زمانی که k تابع هموار $g_1, \dots, g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ داشته باشیم به گونه‌ای که $\nabla g_1(p_0), \dots, \nabla g_k(p_0)$ مستقل خطی باشند نیز درست است. یعنی در این حالت هم تغییر مختصات φ وجود دارد به گونه‌ای که سطوح تراز g_i ها را همزمان صاف کند ($g_i(\varphi(y_1, \dots, y_n)) = y_i$). زمانی که $k = n$ باشد این گزاره در واقع همان قضیه تابع وارون است.

حل. برای $n > k$ تابع‌های $g_i(x_1, \dots, x_n)$ را به گونه‌ای معرفی می‌کنیم که $\nabla g_1(p_0), \dots, \nabla g_n(p_0)$ مستقل خطی باشند. در واقع g_i ها را می‌توان خطی در نظر گرفت. کافی است مجموعه مستقل خطی $\nabla g_1(p_0), \dots, \nabla g_k(p_0)$ را به یک پایه مانند $v_{k+1}, \dots, v_n$ برای $\mathbb{R}^n$ گسترش دهیم. حال کافی است قرار دهیم

$$k < i \leq n \quad g_i(X) = v_i \cdot X = v_i^1 x_1 + \dots + v_i^n x_n$$

واضح است که $\nabla g_i(p_0) = v_i$. بنابراین $\nabla g_1(p_0), \dots, \nabla g_n(p_0)$ مستقل خطی اند. برای تابع $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ که به صورت زیر تعریف می‌شود داریم

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \Rightarrow D_{p_0} g = \begin{bmatrix} \nabla g_1(p_0)^t \\ \vdots \\ \nabla g_n(p_0)^t \end{bmatrix}$$

بنابراین g یک تابع هموار (C^1) است که $D_{p_0} g$ وارون پذیر است. طبق قضیه تابع وارون g در همسایگی p_0 دارای

وارون یک به یک و پوشا است به شکل $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ است. کافی است دقت کنید که

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = g \circ \varphi \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} g_1(\varphi(y_1, \dots, y_n)) \\ \vdots \\ g_n(\varphi(y_1, \dots, y_n)) \end{bmatrix}$$

به طور خاص برای $k < i \leq n$ داریم $g_i(\varphi(y_1, \dots, y_n)) = y_i$