



فرض کنید $f : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی C^1 ، $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^2$ تابعی C^1 و یک به یک و پوشا است و $D\varphi$ همه جا وارون پذیر است. به این ترتیب x, y را می توان تابعی از u, v (با ضابطه φ) دانست و همچنین u, v را نیز می توان تابعی از x, y (با ضابطه φ^{-1})

فرض کرد. به صورت مشابه z را می توان تابعی برحسب x, y دانست و همچنین z را می توان تابعی از u, v فرض کرد.

- رابطه مشتق های x, y نسبت به u, v ؛ $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ ؛ را با مشتق های u, v نسبت به x, y ؛ $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ ؛ بیان کنید.
- مشتق های z نسبت به u, v ؛ $\frac{\partial z}{\partial(u, v)}$ ؛ را بر حسب مشتق های z نسبت به x, y ؛ بدست آورید.
- مشتق های z نسبت به x, y ؛ $\frac{\partial z}{\partial(x, y)}$ ؛ را بر حسب مشتق های z نسبت به u, v ؛ بدست آورید.
- اگر $x = e^u + e^v$ و $y = e^v - e^u$ همه رابطه های بالا را محاسبه کنید.
- عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را بر حسب مشتق های z نسبت به u, v بدست آورید. برای مثال قبل این عبارت را حساب کنید.

حل. با توجه به قاعده زنجیره ای داریم

$$I = D(\varphi \circ \varphi^{-1}) = D\varphi \circ D\varphi^{-1} \Rightarrow \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_u y_v - x_v y_u} \begin{bmatrix} y_v & -x_v \\ -y_u & x_u \end{bmatrix}$$

$$D(f \circ \varphi) = Df \circ D\varphi \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial(u, v)} = \frac{\partial z}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial(u, v)} \cdot \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^{-1} = \frac{\partial z}{\partial(x, y)} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_u & z_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} e^u & e^v \\ -e^u & 2e^{2v} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{2e^{u+2v} + e^{u+v}} \begin{bmatrix} 2e^{2v} & -e^v \\ e^u & e^u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^u & e^v \\ -e^u & 2e^{2v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2e^{u+2v} + e^{u+v}} \begin{bmatrix} z_u & z_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2v} & -e^v \\ e^u & e^u \end{bmatrix}$$

عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را برحسب مشتق‌های z نسبت به u, v به دو صورت می‌توان بدست آورد. یکی از روش‌ها برای

محاسبه ضرایب در حالتی که $x = e^u + e^v$ و $y = e^{2v} - e^u$ مناسب‌تر است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

توجه کنید که در مثال بالا مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ معلوم نیست و باید باز به کمک قاعده زنجیره‌ای آن را بدست آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

توجه کنید که عبارت‌های u_x, u_y, v_x, v_y به طور طبیعی باید تابعی از x, y باشند اما همان گونه که در صورت سوال

بیان شده این عبارت‌ها می‌توانند برحسب u, v نیز در نظر گرفته شوند. در مثال بالا عبارت‌های u_x, u_y, v_x, v_y

برحسب خود u, v بدست می‌آیند نه برحسب x, y ! (این به خاطر استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای یافتن مشتق تابع

وارون است) بنابراین عبارت‌های $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ و $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$ و $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ و $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$ در رابطه بالا اگر چه در نگاه اول

گمراه کننده بنظر می‌رسند اما اتفاقاً برای مثال بالا ساده‌تر بدست می‌آیند.