

نشان دهید تصویر هر رویه دوبعدی (یک بعدی) در $\mathbb{R}^3$ توسط نگاشت f یک رویه دو بعدی (یک بعدی) در $\mathbb{R}^4$ است.

فضای مماس رویه حاصل از تصویر S^2 ؛ کره واحد $\mathbb{R}^3$ ؛ را توسط نگاشت زیر در نقطه متناظر $p_0 \in S^2$ بدست آورید.

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x-y} \\ e^{y-z} \\ e^{z-x} \\ e^{x+y+z} \end{bmatrix}$$

حل. ابتدا مشتق تابع f را بررسی می‌کنیم.

$$Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \mid \frac{\partial f}{\partial y} \mid \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} & 0 \\ 0 & e^{y-z} & -e^{y-z} \\ -e^{z-x} & 0 & e^{z-x} \\ e^{x+y+z} & e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه بالا و اینکه e^x هیچ‌گاه صفر نمی‌شود ستون‌های ماتریس بالا مستقل خطی می‌شوند و در نتیجه در هر نقطه نگاشت خطی Df دارای تصویر سه بعدی و هسته صفر بعدی است.

حال فرض کنید S یک رویه دو بعدی در $\mathbb{R}^3$ باشد. بنابراین به صورت موضوعی دارای پرمایشی مانند $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ است که در هر نقطه نگاشت خطی $D\varphi$ دارای تصویر دو بعدی و هسته صفر بعدی است. $f \circ \varphi$ نیز پرمایشی موضعی برای $f(S)$ است که مشتق آن با توجه به قاعده زنجیره‌ای برابر است با $Df \circ D\varphi$. بنابراین هسته مشتق $f \circ \varphi$ زیر فضای بدیهی صفر است. در نتیجه $f(S)$ یک رویه دوبعدی در $\mathbb{R}^4$ است. این استدلال برای رویه‌های یک بعدی (یعنی خم‌ها) نیز برقرار است.

برای بدست آوردن فضای مماس بر $f(S^2)$ در نقطه $f(p_0)$ کافی است تصویر بردارهای مماس بر S^2 را در نقطه p_0 توسط نگاشت خطی Df بدست آوریم. اگر $p_0 = (a, b, c)^t$ و مثلاً $a \neq 0$ آنگاه فضای مماس بر S^2 در نقطه p_0 برابر است با $\langle v_1, v_2 \rangle$ که $v_1 = (b, -a, 0)$ و $v_2 = (c, 0, -a)$ (مستقل خطی بودن v_1, v_2 و عمود بودن آنها بر p_0 واضح است). بنابراین فضای مماس بر $f(S^2)$ در نقطه $f(p_0)$ برابر است با

$$\langle D_{p_0} f(v_1), D_{p_0} f(v_2) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} (b+a)e^{x-y} \\ -ae^{y-z} \\ -be^{z-x} \\ (b-a)e^{x+y+z} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ce^{x-y} \\ ae^{y-z} \\ (c+a)e^{z-x} \\ (c-a)e^{x+y+z} \end{bmatrix} \right\rangle$$