

فرض کنید e_i بردار استاندارد i ام در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد (ستونی از n عدد که درایه i ام آن برابر یک و بقیه درایه‌های آن برابر صفر است) و v_i برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد که درایه i ام آن برابر صفر و بقیه درایه‌های آن برابر یک است. همچنین فرض کنید که u برداری در $\mathbb{R}^{2n}$ باشد که همه درایه‌های آن برابر یک است. ضابطه تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ را که نمودار آن در $\mathbb{R}^{2n}$ صفحه تعمیم یافته زیر است را بیابید.

$$u + \left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ e_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} v_n \\ e_n \end{bmatrix} \right\rangle$$

(یعنی مقدار تابع f را روی بردار با درایه‌های $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ بدست آورید)

حل. می‌دانیم تابعی که نمودار آن یک صفحه تعمیم یافته است به صورت $f(X) = T(X) + v$ خواهد بود که در آن T یک نگاشت خطی است. همچنین نمودار نگاشت خطی T از انتقال نمودار تابع f به مبدأ بدست می‌آید. بنابراین نمودار نگاشت T زیر فضای زیر در $\mathbb{R}^{2n}$ است.

$$\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ e_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} v_n \\ e_n \end{bmatrix} \right\rangle$$

با توجه به اینکه در نمودار بالا اعضای به صورت $\begin{bmatrix} v_i \\ e_i \end{bmatrix}$ قرار دارند نتیجه می‌گیریم که $T(v_i) = e_i$ برای محاسبه نمایش ماتریسی نگاشت خطی T در پایه استاندارد کافی است به کمک اطلاعات بالا مقدار $T(e_i)$ را محاسبه کنیم. با توجه به تعریف v_i ها داریم

$$v_1 + \dots + v_n = (n-1) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)(e_1 + \dots + e_n)$$

$$v_i = (e_1 + \dots + e_n) - e_i = \frac{1}{n-1}(v_1 + \dots + v_n) - e_i$$

بنابراین بدست می‌آید

$$T(e_i) = \frac{1}{n-1}(T(v_1) + \dots + T(v_n)) - T(v_i) = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - e_i$$

به عبارت دیگر ماتریس نمایش نگاشت T در پایه استاندارد برابر است با

$$A = [T] = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - I$$

حال که نگاشت T را کاملاً بدست آورده‌ایم می‌توانیم قسمت ثابت تابع f (یعنی بردار v_*) را بدست آورد. کافی است مقدار تابع f را در یک نقطه در نظر بگیریم. با توجه به فرض‌های مسئله می‌دانیم بردار u عضو نمودار تابع f است. بنابراین مقدار تابع f روی n مولفه اول u برابر n مولفه دوم u است. یعنی داریم

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) + v_* = A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + v_*$$

بنابراین

$$v_* = \frac{n-2}{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) &= A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + v_* = \frac{(x_1 + \cdots x_n)}{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \frac{n-2}{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \frac{(x_1 + \cdots x_n) + n-2}{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$