

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	w_1	w_2	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	بردارهای روبرو در $\mathbb{R}^n$ داده شده اند.
$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	الف. کدام یک از بردارهای w_1, w_2 در فضای تولید شده توسط $v_1, \dots, v_6$ قرار دارد.
								ب یک پایه برای فضای تولید شده توسط بردارهای $v_1, \dots, v_6$ معرفی کنید.
								توضیح روش بدست آوردن آنچه در سوال خواسته شده مهم تر از محاسبه صحیح آن است.

راه حل.

برای جواب دادن به قسمت اول باید ببینیم که آیا برای هر یک از w_1, w_2 ، ضرایب $x_1, \dots, x_6$ وجود دارند که

$$x_1 v_1 + \dots + x_6 v_6 = w_i$$

با قرار دادن بردارهای $v_1, \dots, v_6$ در ستون های یک ماتریس رابطه بالا به دستگاه $AX = w_i$ تبدیل می شود که

$$A = [v_1 \mid \dots \mid v_6] \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$$

برای بررسی وجود جواب برای دستگاه های $AX = w_1$ و $AX = w_2$ ستون های w_1, w_2 را به ماتریس A اضافه کرده و با عملیات سطری ماتریس را به شکل ساده تبدیل می کنیم. جواب های دستگاه های حاصل برابر جواب های دستگاه های اول هستند. فضای تولید شده توسط ستون های ماتریس A نیز همان تصویر نگاشت خطی $T(X) = AX$ است که برای بدست آوردن یک پایه برای آن می توان به شکل ساده شده ماتریس A نگاه کرد. ستون هایی از A که بعد از عملیات سطری دارای ۱ پیشرو اند یک پایه برای فضای تولید شده توسط همه ستون های A خواهند بود.

در ادامه با عملیات سطری ماتریس $[A \mid w_1 \mid w_2]$ را ساده می کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به شکل ساده شده معلوم می‌شود که $AX = w_1$ جواب ندارد و $AX = w_7$ دارای جواب است بنابراین

$$w_1 \notin \langle v_1, \dots, v_6 \rangle \quad w_7 \in \langle v_1, \dots, v_6 \rangle$$

همچنین ستون‌های ماتریس A که بعد از عملیات سطری دارای ۱ پیشرو اند ستون‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ هستند. یعنی v_1, v_2, v_3, v_4 یک پایه برای فضای تولید شده توسط $v_1, \dots, v_6$ خواهد بود.