

امتحان کوتاه اول ریاضی عمومی ۲، تاریخ ۹۰/۱۲/۳

فرض کنید V و W دو زیر فضای k بعدی و l بعدی $\mathbb{R}^n$ باشند و $k + l \geq n$.

الف. چرا اشتراک این دو زیر فضا حداقل $k + l - n$ بعدی است؟

ب. اگر $V + W$ برابر $\mathbb{R}^n$ نباشد نشان دهید انتقالی از V وجود دارد که اشتراکی با W ندارد.

ج. اگر اشتراک این دو زیر فضا $k + l - n$ بعدی باشد آنگاه هر انتقال V با هر انتقال W دارای اشتراک ناتهی است و این اشتراک انتقالی از اشتراک V و W است.

حل:

الف. از آنجا که $V + W \subseteq \mathbb{R}^n$ خواهیم داشت $\dim(V + W) \leq n$. بنابراین

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) \geq k + l - n$$

توجه داشته باشید که تساوی دقیقاً زمانی برقرار است که $V + W = \mathbb{R}^n$. (۱ نمره)

ب. فرض کنید $u \notin V + W$. نشان می‌دهیم u و $V + u$ اشتراکی ندارند. اگر این دو مجموعه بخواهند اشتراکی داشته

باشند باید اعضای V و W وجود داشته باشند که $w = v + u$. در این صورت داریم

$$u = (-v) + w \in V + W$$

این با فرض $u \notin V + W$ متناقض است. بنابراین $V + u$ و W نمی‌توانند اشتراک داشته باشند. (۱ نمره)

ج. دو انتقال $V + u$ و $W + y$ را در نظر بگیرید. این دو مجموعه زمانی اشتراک دارند که اعضای V و W وجود داشته باشند که $w + y = v + u$ یا به عبارت دیگر $y - u = v + (-w)$. به بیان دیگر $V + u$ و $W + y$ زمانی با هم اشتراک دارند که $y - u \in V + W$. اما با توجه به قسمت الف چون اشتراک این دو زیر فضا $k + l - n$ بعدی است داریم

$$V + W = \mathbb{R}^n. \text{ یعنی برای هر دو بردار } u, y \in \mathbb{R}^n \text{ داریم } y - u \in V + W. \text{ (۱ نمره)}$$

حال کافی است توجه کنید که اگر $z \in V + u$ آنگاه $V + u = V + z$. بنابراین اگر $z \in (W + y) \cap (V + u)$ آنگاه

$$(W + y) \cap (V + u) = (W + z) \cap (V + z) = (W \cap V) + z$$

(۱ نمره)