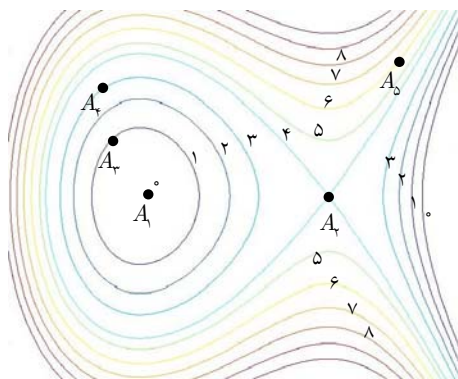
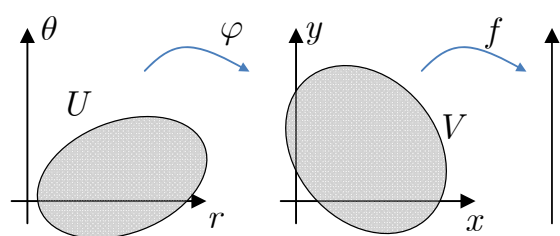




۱. تعدادی از سطوح تراز تابع f به همراه مقدارشان در شکل مشخص شده است. به صورت تقریبی بردار گرادیان را در نقاط مختلف شکل رسم کنید. با توضیح کافی مشخص کنید که p_i ها کدام یک از نقاط A_i مشخص شده در شکل است. مقدار تقریبی تابع f را در نقطه $f(p_\tau + ae_\tau + be_\tau)$ برای مقادیر کوچک a, b محاسبه کنید. (e_i ها پایه استاندارد اند)

$$\nabla f(p_1) = 2\nabla f(p_\tau) = 3\nabla f(p_\delta) \quad H(p_\tau) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad H(p_\delta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(p_\tau) = \nabla f(p_\delta) = (0, 0)$$



۲. فرض کنید $f: V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی C^1 ، φ تغییر متغیر قطبی صفحه باشد. به این ترتیب x, y را می‌توان تابعی از r, θ (با رابطه φ) دانست و همچنین r, θ را نیز می‌توان تابعی از x, y (با رابطه φ^{-1}) فرض کرد. به صورت مشابه z را می‌توان تابعی برحسب x, y دانست و همچنین z را می‌توان تابعی از r, θ فرض کرد.

$$\varphi \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

• عبارت‌های z_x, z_y و z_{xy} را برحسب مشتق‌های z نسبت به r, θ بدست آورید.

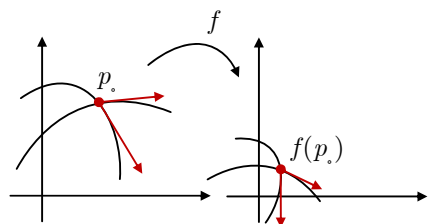
• عبارت‌های z_r, z_θ و $z_{r\theta}$ را برحسب مشتق‌های z نسبت به x, y بدست آورید.

$$z_{r\theta} = -r(\cos \theta \sin \theta)z_{xx} + r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)z_{xy} + r(\cos \theta \sin \theta)z_{yy} - (\sin \theta)z_x + (\cos \theta)z_y$$

$$z_{xy} = (\cos \theta \sin \theta)z_{rr} + r^{-1}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)z_{r\theta} - r^{-1}(\cos \theta \sin \theta)z_{\theta\theta} - r^{-1}(\cos \theta \sin \theta)z_r - r^{-1}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)z_\theta$$

۳. نقاط بحرانی تابع $f(x, y, z) = xy + yz + zx + 3(x + y + z)$ را بدست آورده و نوع آنها را از جهت ماکسیمم، مینیمم و زینی بودن مشخص کنید. نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع بالا را روی ناحیه $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ بدست آورید.

۴. نشان دهید تابع زیر زاویه را حفظ می‌کند. یعنی تصویر هر دو خمی که همدیگر را در نقطه p با زاویه θ قطع کنند دو خم خواهد بود که همدیگر را در نقطه $f(p)$ با زاویه θ قطع می‌کنند.



$$f: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \quad f(x) = \frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{\langle x, x \rangle}$$

(راهنمایی. کافی است نشان دهید برای هر نقطه p ضرب داخلی بردارهای سرعت تصویر هر دو خم مضرب ثابتی از ضرب داخلی بردارهای سرعت آن دو است.)

موفق باشید

سید رضا مقدسی

بسمه تعالی

سوال قبل از امتحان میان‌ترم دوم - زمان ۲۰ دقیقه - ابتدا این سوال را (دقیقاً) در همین برگه جواب دهید و آن را تحویل دهید. بعد از آن سوال‌های امتحان را حل کرده و در پاسخ نامه مربوطه بنویسید.

نشان دهید در فضای سه بعدی

الف. انحنای یک خم روی کره واحد در هیچ نقطه‌ای از یک کمتر نمی‌شود.

ب. خم‌های روی کره واحد که انحنای آنها همه جا برابر یک است دایره‌های عظیمه کره اند.

(راهنمایی: می‌توانید نشان دهید اگر $\gamma(s)$ پرمایش برحسب طول خم باشد برای هر بردار v ، تابع $f(s) = v \cdot \gamma(s)$ دارای

این خاصیت است که $f'(s)^2 + f(s)^2$ مقداری ثابت است. بردار v را بگونه‌ای انتخاب کنید که این مقدار برابر صفر باشد!)