

۱. زیر فضاهای V و W در زیر معرفی شده‌اند. در صورت وجود بردار $v \in \mathbb{R}^5$ را بیابید که $W \cap (V + v) = \emptyset$.

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

۲. نمایش ماتریسی نگاشت خطی $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ در پایه استاندارد داده شده است.

الف. پایه‌ای برای هسته T بیابید.

ب. مجموعه نقاطی که توسط T به نقطه $(-1, 1, 0, -3, -2)^t$ نگاشته می‌شوند را بدست آورید.

ج. تصویر صفحه تولید شده با بردارهای استاندارد اول و دوم که از نقطه $(0, 0, 1, -1, 0)^t$ می‌گذرد توسط نگاشت T را بیابید.

۳. $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$ و $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ دو مجموعه k عضوی از بردارهای $\mathbb{R}^n$ اند که برای هر i و j داریم

$$v_i \bullet v_j = w_i \bullet w_j. \text{ نشان دهید اگر } \alpha \text{ مستقل خطی باشد آنگاه } \beta \text{ نیز مستقل خطی است.}$$

۴. فرض کنید $m < n$ و A و B به ترتیب ماتریس‌هایی $m \times n$ و $n \times m$ باشند. نشان دهید $\det(BA) = 0$.

ماتریس مربوط به سؤال ۲:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۶ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$