

۱. حدود انتگرال‌های زیر را برای انتگرال گیری از تابع $f(x, y, z)$ روی ناحیه D بدست آورید.

$$D = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

۲. فرض کنید D ناحیه محصور بین خطوط $y = x$, $y = 1 - x$, $y = 2 - x$ و منحنی $x^2 - y^2 = 1$ در صفحه xy است. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_D \frac{e^{x^2}}{e^{y^2}} dx dy$$

۳. فرض کنید $a \leq s \leq b$ $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ پرمایش برحسب طول خم C در صفحه xy است. رابطه مساحت رویه حاصل از دوران C حول نیمساز ربع اول و سوم صفحه xy را بدست آورید.

فرض کنید $1 < c < b < a$ و S رویه دو بعدی حاصل از تقاطع رویه $x^2 - ay^2 + bz^2 - cu^2 = 0$ و کره واحد $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$ در $\mathbb{R}^4$ باشد.

۴. دورترین و نزدیک‌ترین نقاط رویه S از نقطه $(1, 0, 0, 0)$ کدام اند.

۵. الف. فرض کنید $p_* = (x_*, y_*, z_*, u_*) \in S$ و $x_*, y_*, z_*, u_* \neq 0$. نشان دهید در یک همسایگی نقطه p_* هر زوج از مولفه‌های نقاط روی رویه S تابعی مشتق‌پذیر از دو مولفه دیگر اند.

ب. یک پایه برای فضای بردارهای مماس بر رویه S در نقطه p_* معرفی کنید.

۶. میدان برداری $G(x, y, z) = (z, x, -1)$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید.

الف. اگر $F(x, y, z) = (zx, -x, yz)$ نشان دهید $G = \text{curl } F$ و $\text{div } G = 0$.

ب. M را بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ بگیرید که به ازای آن $z \geq -1$ و قائم واحد برون‌گرای کره را با

n نمایش دهید. $\iint_M F \cdot n dS$ را با سه روش مستقیم، قضیه دیورژانس و قضیه استوکس محاسبه کنید.

موفق باشید