سوال ۱ مختصات جدید را فاصله از نقطه $(-a,0)$ و $(a,0)$ در نظر گرفتیم. به ترتیب:

$$u=\sqrt{(x+a)^2+y^2}\ ,\ v=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

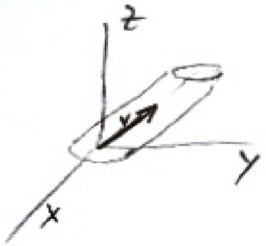
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\\ \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\end{bmatrix}\ ,\ det=\frac{2ay}{uv}$$

$$\iint_D \frac{1}{y}\,dA_{x,y}=\int_{r_2}^{r_4}\int_{r_1}^{r_3} y\left|det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\int_{r_2}^{r_4}\int_{r_1}^{r_3} y\left|\frac{1}{det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}\right|du\,dv$$

$$=\int_{r_2}^{r_4}\int_{r_1}^{r_3}\frac{uv}{2a}\,du\,dv=\frac{1}{8a}(r_3^2-r_1^2)(r_4^2-r_2^2)$$

سوال ۲

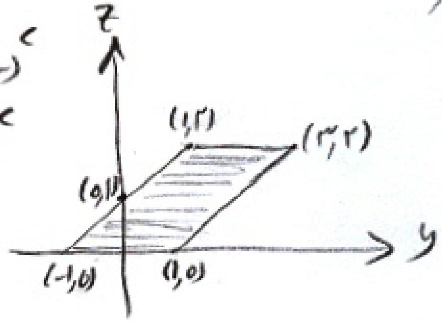
نقاط طرح اسپرند : $(x,y,z)=(\underbrace{\cos t}_{x},\underbrace{2t+1}_{y},\underbrace{2}_{z})$



$z\pm\sqrt{1-x^2}=y$

$1-x^2=(y-z)^2$

$x^2=1-(y-z)^2$

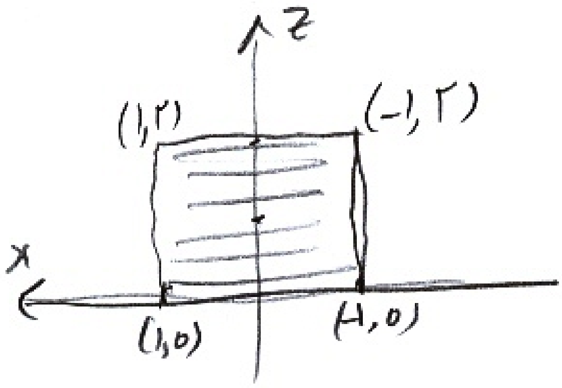


تصویر روی صفحه yz :

در یافتن ناحیه :

$$\begin{cases}0\le z\le 2\\ z-1\le y\le z+1\\ -\sqrt{1-(y-z)^2}\le x\le\sqrt{1-(y-z)^2}\end{cases}$$

$$\int_0^2\left(\int_{z-1}^{z+1}\left(\int_{-\sqrt{1-(y-z)^2}}^{\sqrt{1-(y-z)^2}} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz$$

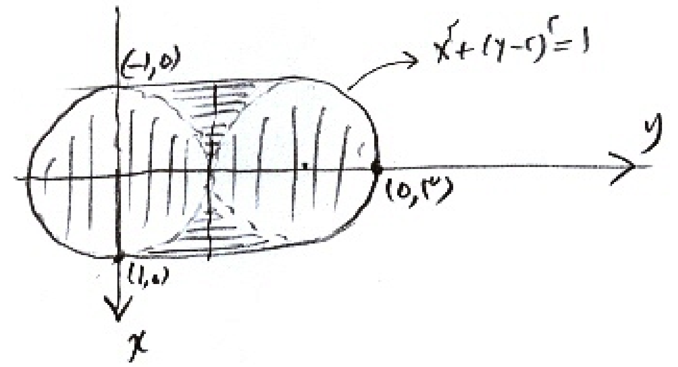


تصویر روی صفحه xz

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \\ z-\sqrt{1-x^2} \le y \le z+\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1}\left(\int_{0}^{2}\left(\int_{z-\sqrt{1-x^2}}^{z+\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\,dy\right)dz\right)dx$$

تصویر روی صفحه xy



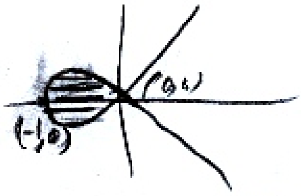
۶ ناحیه داریم:

$$\begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 \le z \le y+\sqrt{1-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -1 \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ y-\sqrt{1-x^2} \le z \le y+\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{1-y^2} \le x \le 1 \\ y-\sqrt{1-x^2} \le z \le y+\sqrt{1-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ -1 \le x \le -\sqrt{1-(y-2)^2} \\ y-\sqrt{1-x^2} \le z \le y+\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ \sqrt{1-(y-2)^2} \le x \le 1 \\ y-\sqrt{1-x^2} \le z \le y+\sqrt{1-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ -\sqrt{1-(y-2)^2} \le x \le \sqrt{1-(y-2)^2} \\ y-\sqrt{1-x^2} \le z \le y+\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

سوال ۳



از تقارن نسبت به محور x نتیجه می‌شود که $\bar{y}=0$.

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-x\sqrt{1+x}}^{x\sqrt{1+x}} x\,dy\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(xy\Big|_{-x\sqrt{1+x}}^{x\sqrt{1+x}}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}2x^2\sqrt{1+x}\,dx \qquad \begin{cases}1+x=t, & dx=dt\\ x=t-1\end{cases}$$

$$=\int_{0}^{1}2(t-1)^2t^{1/2}\,dt=2\int_{0}^{1}\left[t^{5/2}-2t^{3/2}+t^{1/2}\right]dt$$

$$=2\left[\frac{2}{7}t^{7/2}-\frac{4}{5}t^{5/2}+\frac{2}{3}t^{3/2}\right]\Big|_{0}^{1}=2\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right)$$

$$=2\times\frac{30-84+70}{105}=\frac{32}{105}$$

$$S=\int_{-1}^{0}\int_{-x\sqrt{1+x}}^{x\sqrt{1+x}}dy=\int_{-1}^{0}2x\sqrt{1+x}\,dx$$

با همان روش قبلی

$$=\int_{0}^{1}2(t-1)\,t^{1/2}\,dt=2\int_{0}^{1}\left(t^{3/2}-t^{1/2}\right)dt=2\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{-8}{15}\Rightarrow\boxed{S=-\frac{8}{15}=\frac{-8}{15}}$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{32}{105}}{\frac{-8}{15}}=-\frac{60}{105}=-\frac{4}{7}\qquad \bar{y}=0$$

سؤال ۴

$$F=(F_1,F_2)=\left(\frac{-x^2y}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

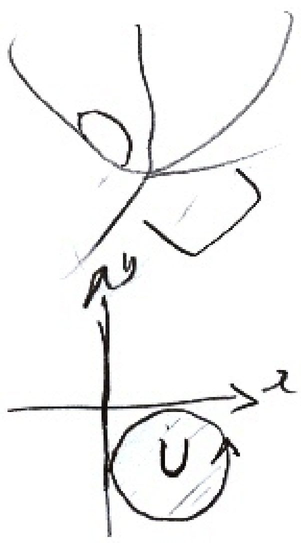
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial y}=\dfrac{-x^2(x^4+2x^2y^2+y^4)+4x^4y^2+4x^2y^4}{(x^2+y^2)^4}\\[2ex]\dfrac{\partial F_2}{\partial x}=\dfrac{3x^2(x^4+2x^2y^2+y^4)-4x^6-4x^4y^2}{(x^2+y^2)^4}\end{cases}$$

بنابراین $\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}$ شرط یکسان بودن مشتقات جزئی برقرار است. بنابراین اگر منحنی
تحقیق می‌کنیم $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ روی هر منحنی بسته‌ای که در درون آن تکینی F دارا باشد
باشد. یعنی درون آن شامل نقطه $(0,0)$ نباشد، صفر است. از طرفی
دیگر اگر C خم بسته‌ای که نقطه $(0,0)$ را در درون داشته باشد
مقدار انتگرال مستقل از خم خاص خواهد بود. لذا کافی است مقدار را برای دایره
واحد محاسبه کنیم:

$$(0\le t\le 2\pi)\begin{cases}dx=-\sin t\,dt\\ dy=\cos t\,dt\end{cases}\quad\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{(-\cos^2 t)(\sin t)}{1}(-\sin t)+\frac{\cos^3 t}{1}(\cos t)\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\pi$$



سوال ۵

خم اشتراک :

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 2x-2y-1 \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = 2x-2y-1 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 1$$

تصویر روی صفحه xy دایره به شعاع ۱ و مرکز (۱،-۱) است

محاسبه مستقیم

پارامتری خم

$$\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = -1+\sin t \\ z = 2\cos t - 2\sin t + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -\sin t\, dt \\ dy = \cos t\, dt \\ dz = (-2\sin t - 2\cos t)\, dt \end{cases}$$

$$\int_\gamma \vec F\cdot d\vec r = \int_0^{2\pi} \Big[(-1+\sin t)(-\sin t) + (2\cos t - 2\sin t + 3)(\cos t) + (-\sin t + 2\cos t + 2)(-2\sin t - 2\cos t)\Big] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\sin^2 t - 4\cos^2 t\right] dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - 2\cos^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right) dt = -\pi$$

استوکس

تمام جاها $\vec n$ را با مولفه z مثبت در نظر گرفته ایم که در فرمول استوکس با جهت مثبت سازگار شود (ناحیه را در ی سطح سهمی وار $z = x^2+y^2$ در نظر می گیریم) . از طرف دیگر صفحه $f(x,y,z) = z-x^2-y^2$ ، پس

$$\nabla f = (-2x,-2y,1) \Rightarrow \vec n = \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} = \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{1+4z}}$$

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy = \sqrt{1+4z}\, dx\,dy$$

$$\operatorname{curl}\vec F = (0,0,-1), \quad (\operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n)\, dS = \frac{-1}{\sqrt{1+4z}}\sqrt{1+4z}\, dx\,dy = -dx\,dy$$

$$\iint_\Sigma \operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n\, dS = \iint_U (-1)\, dx\,dy = (-1)(\text{مساحت } U) = -\pi$$

سوال ۶

$\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ ، $\vec{G}=(G_1,G_2,G_3)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_2G_3-F_3G_2)+\frac{\partial}{\partial y}(F_3G_1-F_1G_3)+\frac{\partial}{\partial z}(F_1G_2-F_2G_1)=$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\cdot G_3+F_2\frac{\partial G_3}{\partial x}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\cdot G_1+F_3\frac{\partial G_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot G_2+F_1\frac{\partial G_2}{\partial z}$$

$$-\left[\frac{\partial F_3}{\partial x}G_2+F_3\frac{\partial G_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}G_3+F_1\frac{\partial G_3}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}G_1+F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}\right]$$

$$=G_1\cdot\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+G_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+G_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$-\left[F_1\cdot\left(\frac{\partial G_3}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial z}\right)+F_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial x}\right)+F_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)\right]$$

$$=G\cdot \mathrm{Curl}(F)-F\cdot \mathrm{curl}(G)$$

ب) قرار می‌دهیم $\vec{F}=\nabla f$, $\vec{G}=\nabla g$. از قسمت الف نتیجه می‌شود

$$\mathrm{div}(\nabla f\times\nabla g)=\nabla g\cdot\underbrace{\mathrm{curl}(\nabla f)}_{0}-\nabla f\cdot\underbrace{\mathrm{curl}(\nabla g)}_{0}=0$$

حال اگر D را کره یکه در درون D در نظر بگیریم از قضیه دیورژانس نتیجه می‌شود که انتگرال $(\nabla f\times\nabla g)\cdot n\,dS$ روی D و S صفر است. بنابراین حکم در حالت کلی نیز برقرار است.