

①

۱- فرض کنید (x, y) پتانسیل بر حسب طول r باشد. چون r همواره واحد است داریم:

$$-1 = -\dot{x} \cdot \dot{x} = \dot{x} \cdot \dot{x} \Rightarrow \dot{x} \cdot \dot{x} + \dot{x} \cdot \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} \cdot \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} \cdot \dot{x} = 1$$

رابطه آخر به اینست که پتانسیل بر حسب طول است نه به r .
حال چون طول r برابر یک است رابطه $\dot{x} \cdot \dot{x} = -1$ همیشه می دهد که $K = |\dot{x}| \geq 1$.

ب: $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 - 1)_{(x, y)} = (2, 3)$

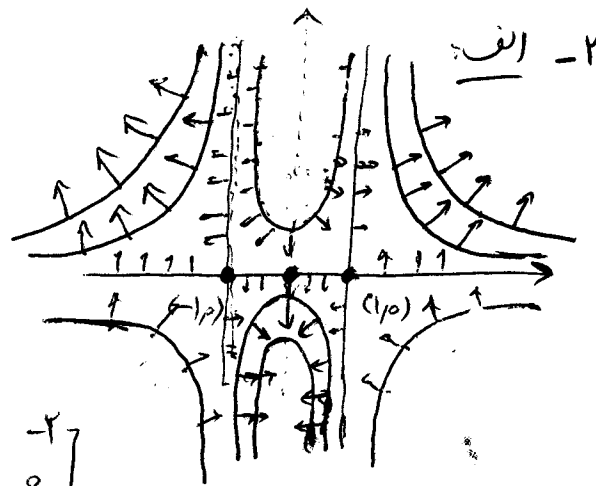
$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{4 + 9} = 5$$

ج: $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 - 1) = (0, 0) \Rightarrow x = \pm 1, y = 0$

نقطه های $P_1 = (1, 0)$ و $P_2 = (-1, 0)$ بحرانی اند.

$$H = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \quad H(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad H(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\lambda = \pm 2$ است. بنابراین در دو نقطه بحرانی هستند.



۳- الف: صفحه مماس بر تابع در نقطه P بر برادرگی (ایمان) عمود است. بنابراین این صفحه با بردار $(0, 0, 1)$ هم‌راستا است. عمود بردار $(0, 0, 1)$ می شود. به عبارت دیگر این صفحه، صفحه ای است که با بردار $(0, 0, 1)$ و بردار $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 0)$ هم‌راستا است. $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:
 $P = (1, 0, 2) + t_1(1, 0, 0) + t_2(0, 1, 0) = (1 + t_1, t_2, 2)$
 همچنین معادله این صفحه را نیز به کمک بردار $(0, 0, 1)$ می توان نوشت:

$$(x-1, y-0, z-2) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z=2}$$

ب: این صفحه هم بر بردار $(\nabla f(P), -1)$ عمود است و از نقطه $(P, f(P))$ می گذرد. بنابراین:

$$(x-1, y-0, z-2, w-1) \cdot (0, 0, 1, -1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z+w=3}$$

به عبارت دیگر این صفحه با بردار $(0, 0, 1, -1)$ هم‌راستا است. $(1, 0, 2, 1)$ نمی گذرد. پس داریم:
 $w = f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)(z-2) = -z+3$

ج: چون $\frac{\partial f}{\partial z}(p)$ نا صفر است طبق قضیه تابع همبستگی سطح در سطح قرار ندرنده از P ، z تابع از x, y خواهد بود.

$$f(x, y, z) = 1 \Rightarrow f_x + f_z \cdot z_x = 0 \Rightarrow z_x = 0 \quad (1)$$

$$f_y + f_z \cdot z_y = 0 \Rightarrow z_y = 0 \quad (2)$$

$$f_x + f_z \cdot z_x = 0 \Rightarrow (f_{xx} + f_{xz} \cdot z_x) + (f_{zx} + f_{zz} \cdot z_x) z_x + f_z \cdot z_{xx} = 0$$

$$(3) \Rightarrow z_{xx} = f_{xx} = 1$$

$$f_x + f_z \cdot z_x = 0 \Rightarrow (f_{xy} + f_{xz} \cdot z_y) + (f_{zy} + f_{zz} \cdot z_y) \cdot z_x + f_z \cdot z_{xy} = 0$$

$$(4) \Rightarrow f_{xy} = z_{xy} = 0$$

$$f_y + f_z \cdot z_y = 0 \Rightarrow (f_{yy} + f_{yz} \cdot z_y) + (f_{zy} + f_{zz} \cdot z_y) \cdot z_y + f_z \cdot z_{yy} = 0$$

$$(5) \Rightarrow z_{yy} = f_{yy} = 3$$

د: تابع به قیمت f در این z_x, z_y برابر می‌شوند، بنابراین P نقطه برای z است! و تابع به این معنی همان z در نقطه P ، برابر است با $[1, 3]$ و مقدار در z مثبت اند، بنابراین z در نقطه P منبسط می‌شود.

$$f(1, 1, 2) = f(1, 0, 2) + \nabla f(p) \cdot (-1, 1, 2) + \frac{1}{2} (-1, 1, 2) H \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$= 1 + (-1) + \frac{1}{2} (-1, 1, 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + (-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(بزرگ برآورد مرتبه اول تابع)

(۳)

تابع قيد $g(x,y,z) = xyz = V$

تابع فرنی: $f(x,y,z) = r(ayz + bxz + cxy)$

$\nabla g = (yz, zx, xy) \neq 0$ اگرچه در سطح قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = V \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} r(bz + cy) &= \lambda yz \\ r(az + cx) &= \lambda xz \\ r(ay + bx) &= \lambda xy \\ xyz &= V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r(bzx + cxy) = \lambda V$$

$$r(azx + cxy) = \lambda V$$

$$r(ayz + bxz) = \lambda V$$

$$xyz = V$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{\lambda}{r}$$

$$xyz = V$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ra}{\lambda}\right)\left(\frac{rb}{\lambda}\right)\left(\frac{rc}{\lambda}\right) = V \Rightarrow \lambda = r \sqrt[3]{\frac{abc}{V}}$$

$$\Rightarrow x = a \sqrt[3]{\frac{V}{abc}} \quad y = b \sqrt[3]{\frac{V}{abc}} \quad z = c \sqrt[3]{\frac{V}{abc}}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = r \sqrt[3]{V \cdot (abc)}$$

دریجه‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا در شرایط قطع اگر از فرم می‌گیریم. باید به این نکته دقت کنید که اگر x, y, z به سمت بی‌نهایت میل کنند، f نیز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. پس باید نقطه به دست آمده بهترین مقدار تابع f باشد.

$$f(x,y,z) = \frac{raV}{x} + \frac{rbV}{y} + \frac{rcV}{z}$$

(هر کدام از جمله‌ها مثبت اند و با هم جمع می‌شوند و اگر x, y, z به سمت بی‌نهایت میل کنند!)

(اگر x, y, z به سمت بی‌نهایت میل کنند، باید که در مجموع نیز به سمت بی‌نهایت میل کنند.)