



۱. در شکل مقابل C_1, C_2, C_3, C_4 به ترتیب دایره‌هایی به شعاع $r_1 < r_2$ و $r_3 < r_4$ به مرکزهای $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ اند. انتگرال

تابع $f(x, y) = y^{-1}$ را روی ناحیه D محاسبه کنید. (۱۲ نمره)

۲. فرض کنید $v = (0, 1, 1)$. استوانه کج و توپر C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$C = \{rv + s(\cos t, \sin t, 0) : 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq s \leq 1\}$$

حدود انتگرال گیری را برای هر یک از انتگرال‌های زیر بنویسد. (ممکن است در بعضی موارد لازم باشد انتگرال سه گانه به صورت جمع دو یا چند انتگرال نوشته شود). (۱۸ نمره)

$$\int_{\square} \left(\int_{\square} \left(\int_{\square} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_{\square} \left(\int_{\square} \left(\int_{\square} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx$$

$$\int_{\square} \left(\int_{\square} \left(\int_{\square} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$$

۳. مرکزوار ناحیه درون حلقه منحنی $y^2 = x^2 + x^3$ را پیدا کنید. مرکزوار یک ناحیه نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ است که در آن

$$S = \iint_D dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \iint_D y dA, \quad \bar{x} = \frac{1}{S} \iint_D x dA$$

(۱۰ نمره)

۴. میدان برداری زیر در ناحیه $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ تعریف شده است. انتگرال این میدان را روی همه خم‌های بسته و ساده با جهت مثلثاتی داخل این ناحیه بدست آورید. (۱۲ نمره)

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}(-x^2y, x^2)$$

۵. خم اشتراک رویه $z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 2x - 2y - 1$ به گونه‌ای جهت دار شده که تصویر آن روی صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. انتگرال میدان $F(x, y, z) = (y, z, y + z)$ را روی این خم یک بار به صورت مستقیم و یک بار به کمک قضیه استوکس (قضیه کرل) محاسبه کنید. (۱۴ نمره)

۶. الف. رابطه زیر را برای میدان‌های برداری هموار F و G ثابت کنید. (۷ نمره)

$$\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{curl}(F) - F \cdot \operatorname{curl}(G)$$

ب. فرض کنید f و g دو تابع هموار در $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ باشند و S_1 و S_2 دو کره متفاوت شامل مبدأ با بردار نرمال به سمت بیرون باشند. نشان دهید: (۷ نمره)

$$\iint_{S_1} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_2} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS$$