

۱. فرض کنید ماتریس روبرو نمایش نگاشت خطی $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ در پایه متداول است. پایه‌ای برای هسته و تصویر T و تصویر صفحه‌های V_1 و V_2 بیابید. (۸ نمره)

$$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲. حجم متوازی السطوح تولید شده با بردارهای $(1, 1, 1, 1)$ و $(0, 0, 0, 1)$ و $(1, -1, 1, 1)$ را بیابید. (۴ نمره)

۳. دترمینان ماتریسی $2k \times 2k$ را حساب کنید که همه دارایی‌های آن بجز درایه‌های روی دو قطر ماتریس صفر و درایه‌های روی قطر اصلی برابر a و درایه‌های روی قطر دیگر برابر b اند. (۴ نمره)

۴. فرض کنید ماتریس روبرو نمایش نگاشت خطی T در پایه متداول است. یک پایه از بردارهای ویژه T را بیابید و نمایش T را در پایه جدید بنویسید. (۸ نمره)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵. فرض کنید A ماتریس نمایش نگاشت خطی $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ در پایه متداول باشد. نشان دهید ماتریس نمایش T در پایه α به شکل B است. به کمک این موضوع A^{1390} را محاسبه کنید. (۸ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} + 4 & -5 \\ 5 & 3\sqrt{3} - 4 \end{bmatrix} \quad \alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad B = a \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

۶. به هر یک از سوالات زیر با یک دلیل کوتاه جواب دهید. (۸ نمره)

الف. بعد هسته نگاشت خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ چه اعدادی می‌تواند باشد.

ب. آیا نگاشت خطی ناصفر $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ وجود دارد که $T^2 (= T \circ T)$ نگاشت صفر باشد.

ج. اگر برای نگاشت خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $T^2 = T$ نشان دهید اشتراک هسته و تصویر T برابر $\{0\}$ است.

د. اگر T یک نگاشت متعامد و U دورانی حول بردار u در $\mathbb{R}^3$ باشند نشان دهید $T \circ U \circ T^{-1}$ نیز یک دوران است و راستای دوران را بیابید.

موفق باشید

توجه. برای درخواست تجدید نظر ذکر شماره صندلی لازم است.