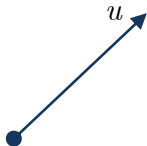
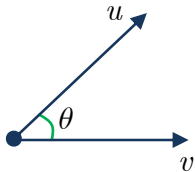


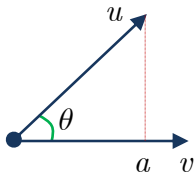
طول و زاویه در صفحه



طول و زاویه در صفحه

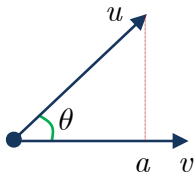


طول و زاویه در صفحه



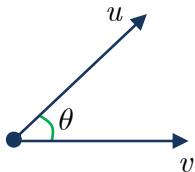
$$a = |u| \cos \theta$$

طول و زاویه در صفحه



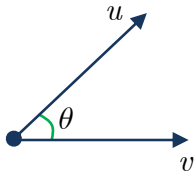
$$f(u, v) = a = |u| \cos \theta$$

طول و زاویه در صفحه



$$f(u, v) = |u| |v| \cos \theta$$

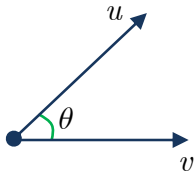
طول و زاویه در صفحه



$$f(u, v) = |u| |v| \cos \theta$$

$$|u|^2 = f(u, u), \quad \theta = \text{ArcCos} \frac{f(u, v)}{|u| |v|} = \text{ArcCos} \frac{f(v, u)}{|u| |v|}$$

طول و زاویه در صفحه



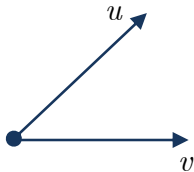
$$f(u, v) = |u| |v| \cos \theta$$

$$|u|^2 = f(u, u), \quad \theta = \text{ArcCos} \frac{f(u, v)}{|u| |v|} = \text{ArcCos} \frac{f(v, u)}{|u| |v|}$$

$$f(u, u) = 1 \quad f(v, v) = 1 \quad f(u, v) = f(v, u) = \cos \theta$$

طول و زاویه برای یک فضای برداری V

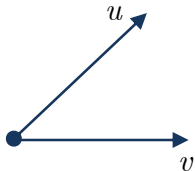
تابع $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ که نسبت به هر مولفه خطی است



طول و زاویه برای یک فضای برداری V

تابع $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ که نسبت به هر مولفه خطی است

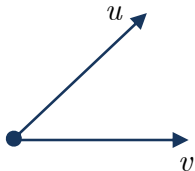
$$|u| = \sqrt{f(u, u)}, \quad \theta = \text{ArcCos} \frac{f(u, v)}{|u||v|}$$



طول و زاویه برای یک فضای برداری V

تابع $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ که نسبت به هر مولفه خطی است

$$|u| = \sqrt{f(u, u)}, \quad \theta = \text{ArcCos} \frac{f(u, v)}{|u||v|}$$

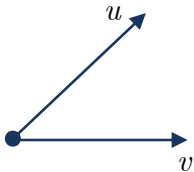


$\forall v \in V : f(v, v) \geq 0$ و تساوی تنها برای $v = 0$ برقرار است

طول و زاویه برای یک فضای برداری V

تابع $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ که نسبت به هر مولفه خطی است

$$|u| = \sqrt{f(u, u)}, \quad \theta = \text{ArcCos} \frac{f(u, v)}{|u||v|}$$



$\forall v \in V : f(v, v) \geq 0$ و تساوی تنها برای $v = 0$ برقرار است

$$- |u||v| \leq f(u, v) \leq |u||v| \text{ و } f(u, v) = f(v, u)$$

نامساوی کوشی_شوارتز.

نامساوی کوشی-شوارتز.

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

نامساوی کوشی-شوارتز.

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

۱. متقارن. $f(u, v) = f(v, u)$.

۲. خطی نسبت به هر مولفه.

۳. مثبت. $\circ f(v, v) \geq 0$ و تساوی تنها برای $v = 0$ برقرار است

نامساوی کوشی-شوارتز.

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

۱. متقارن. $f(u, v) = f(v, u)$.

۲. خطی نسبت به هر مولفه.

۳. مثبت. $\circ \quad \forall v \in V : f(v, v) \geq 0$ و تساوی تنها برای $v = 0$ برقرار است

$$f(u, v)^2 \leq f(u, u) \cdot f(v, v) \quad \Leftarrow$$

نامساوی کوشی-شوارتز.

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

۱. متقارن. $f(u, v) = f(v, u)$.

۲. خطی نسبت به هر مولفه.

۳. مثبت. $\circ \quad \forall v \in V : f(v, v) \geq 0$ و تساوی تنها برای $v = 0$ برقرار است

$$f(u, v)^2 \leq f(u, u) \cdot f(v, v) \quad \Leftarrow$$

تساوی تنها زمانی اتفاق می افتد که u و v وابسته خطی باشند.

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^{\flat} f(v, v) \\ &= f(u, u) + \flat tf(u, v) + t^{\flat} f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \\ p'(t) &= 2(t f(v, v) + f(u, v)) \end{aligned}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$p'(t) = 2(t f(v, v) + f(u, v))$$

$$t = -\frac{f(u, v)}{f(v, v)}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$p'(t) = 2(f(u, v) + tf(v, v))$$

$$t = -\frac{f(u, v)}{f(v, v)}$$

$$\circ \leq f(u, u) - \frac{2f(u, v)^2}{f(v, v)} + \frac{f(u, v)^2}{f(v, v)} f(v, v) = f(u, u) - \frac{f(u, v)^2}{f(v, v)}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$p'(t) = 2(f(u, v) + tf(v, v))$$

$$t = -\frac{f(u, v)}{f(v, v)}$$

$$\circ \leq f(u, u) - \frac{2f(u, v)^2}{f(v, v)} + \frac{f(u, v)^2}{f(v, v)} f(v, v) = f(u, u) - \frac{f(u, v)^2}{f(v, v)}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$t = -\frac{f(u, v)}{f(v, v)}$$

$$\circ \leq f(v, v)f(u + tv, u + tv) = f(u, u)f(v, v) - f(u, v)^2$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$t = -\frac{f(u, v)}{f(v, v)}$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(v, v)f(u + tv, u + tv) &= f(u, u)f(v, v) - f(u, v)^2 \\ \circ &= f(u, u)f(v, v) - f(u, v)^2 \Rightarrow u + tv = 0 \end{aligned}$$

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(u + tv, u + tv) &= f(u, u) + tf(u, v) + tf(v, u) + t^2 f(v, v) \\ &= f(u, u) + 2tf(u, v) + t^2 f(v, v) = p(t) \end{aligned}$$

$$t = -\frac{f(u, v)}{f(v, v)}$$

$$\begin{aligned} \circ \leq f(v, v)f(u + tv, u + tv) &= f(u, u)f(v, v) - f(u, v)^2 \\ \circ &= f(u, u)f(v, v) - f(u, v)^2 \Rightarrow u + tv = 0 \end{aligned}$$

ضرب داخلی

ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{R}^n$

$$f(X, Y) = Y^t X = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

ضرب داخلی

ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{R}^n$

$$f(X, Y) = Y^t X = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

ضرب داخلی استاندارد $\mathbb{R}$

$$f(x, y) = xy \quad \Rightarrow \quad |x|^2 = x^2, \theta = k\pi$$

عمود بودن در یک فضای ضرب داخلی

u و v برهم عمود اند اگر $f(u, v) = 0$

مجموعه متعامد - یکه - متعامد و یکه از بردارها

پایه استاندارد یک پایه متعامد و یکه با ضرب داخلی استاندارد است.

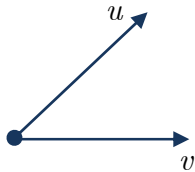
$$\lambda_i > 0$$

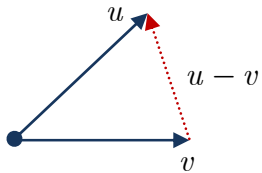
$$f(X, Y) = Y^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} X = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$$

$$f(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$$

از این به بعد ضرب داخلی دو بردار u و v را به اختصار با (u, v) نمایش می‌دهیم.
ضربهای داخلی متفاوت را نیز به صورت $(u, v)_1$ و $(u, v)_2$ و ... مشخص می‌کنیم.

فاصله دو بردار





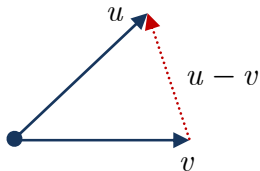
فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

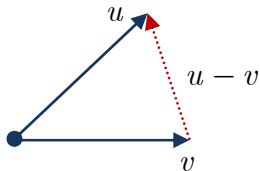
$$u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \text{ و } d(u, v) \in \mathbb{R}^+.$$



فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

$$u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \text{ و } d(u, v) \in \mathbb{R}^+.$$



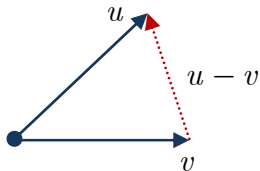
$$d(u, v) = 0 \Rightarrow |u - v| = 0 \Rightarrow u - v = 0$$

فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

$$u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \text{ و } d(u, v) \in \mathbb{R}^+$$

$$d(u, v) = d(v, u)$$

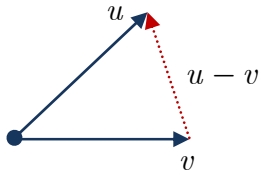


فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

$$u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \text{ و } d(u, v) \in \mathbb{R}^+ . ۱$$

$$d(u, v) = d(v, u) . ۲$$



$$d(u, v) = |u - v| = |v - u| = d(v, u)$$

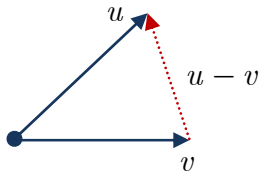
فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

$$u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \text{ و } d(u, v) \in \mathbb{R}^+$$

$$d(u, v) = d(v, u)$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$



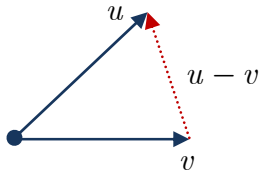
فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

$$u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \text{ و } d(u, v) \in \mathbb{R}^+$$

$$d(u, v) = d(v, u)$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$



$$|u - v| \leq |u - w| + |w - v|$$

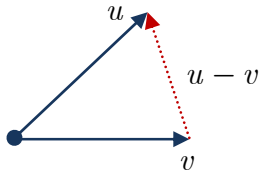
فاصله دو بردار

$$d(u, v) = |u - v|$$

$$u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \text{ و } d(u, v) \in \mathbb{R}^+$$

$$d(u, v) = d(v, u)$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$



$$|u - v| \leq |u - w| + |w - v|$$

$$|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \text{ .۳}$$

$$|v_l + v_r| \leq |v_l| + |v_r|$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \text{ .۳}$$

$$|v_{\lambda} + v_{\gamma}| \leq |v_{\lambda}| + |v_{\gamma}|$$

$$\begin{aligned} |v_{\lambda} + v_{\gamma}|^2 &= (v_{\lambda} + v_{\gamma}, v_{\lambda} + v_{\gamma}) = (v_{\lambda}, v_{\lambda}) + (v_{\gamma}, v_{\gamma}) + (v_{\lambda}, v_{\gamma}) + (v_{\gamma}, v_{\lambda}) \\ &= |v_{\lambda}|^2 + |v_{\gamma}|^2 + 2 \operatorname{Re}(v_{\lambda}, v_{\gamma}) \\ &\leq |v_{\lambda}|^2 + |v_{\gamma}|^2 + 2 |v_{\lambda}| |v_{\gamma}| = (|v_{\lambda}| + |v_{\gamma}|)^2 \end{aligned}$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \text{ .۳}$$

$$|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$$

$$\begin{aligned} |v_1 + v_2|^2 &= (v_1 + v_2, v_1 + v_2) = (v_1, v_1) + (v_2, v_2) + (v_1, v_2) + (v_2, v_1) \\ &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2\operatorname{Re}(v_1, v_2) \\ &\leq |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2|v_1||v_2| = (|v_1| + |v_2|)^2 \end{aligned}$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \text{ .۳}$$

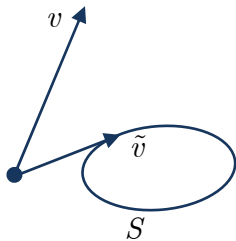
$$|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$$

$$\begin{aligned} |v_1 + v_2|^2 &= (v_1 + v_2, v_1 + v_2) = (v_1, v_1) + (v_2, v_2) + (v_1, v_2) + (v_2, v_1) \\ &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2(v_1, v_2) \\ &\leq |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2|v_1||v_2| = (|v_1| + |v_2|)^2 \end{aligned}$$

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \text{ .۳}$$

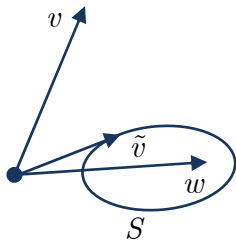
$$|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$$

$$\begin{aligned} |v_1 + v_2|^2 &= (v_1 + v_2, v_1 + v_2) = (v_1, v_1) + (v_2, v_2) + (v_1, v_2) + (v_2, v_1) \\ &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2(v_1, v_2) \\ &\leq |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2|v_1||v_2| = (|v_1| + |v_2|)^2 \end{aligned}$$



بهترین تقریب یک بردار در یک مجموعه

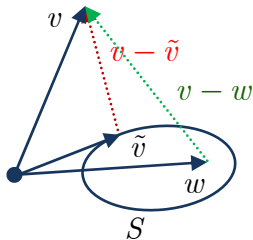
برای هر $w \in S$



بهترین تقریب یک بردار در یک مجموعه

برای هر $w \in S$

$$d(v, w) \geq d(v, \tilde{v})$$



بهترین تقریب یک بردار در یک مجموعه

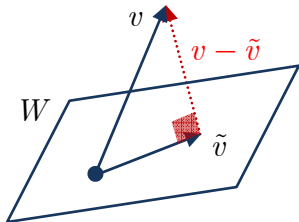
برای هر $w \in S$

$$d(v, w) \geq d(v, \tilde{v})$$

$$|v - w| \geq |v - \tilde{v}|$$

آیا بهترین تقریب وجود دارد؟

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

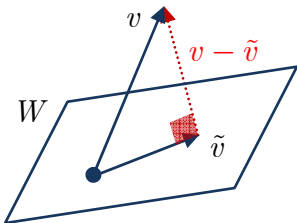


$\tilde{v} \in W$ بهترین تقریب بردار $v \in V$ در زیرفضای W است



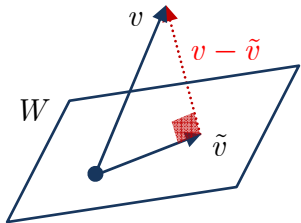
$v - \tilde{v}$ بر همه اعضای W عمود باشد.

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا



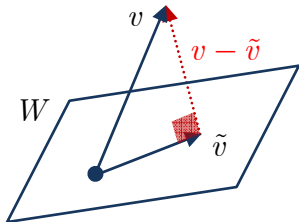
$$d(v, \tilde{v} + tw)^2$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا



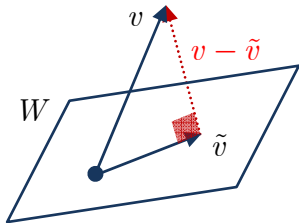
$$\begin{aligned}
 d(v, \tilde{v} + tw)^2 \\
 = (v - \tilde{v} - tw, v - \tilde{v} - tw)
 \end{aligned}$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا



$$\begin{aligned}
 d(v, \tilde{v} + tw)^2 &= (v - \tilde{v} - tw, v - \tilde{v} - tw) \\
 &= (v - \tilde{v}, v - \tilde{v}) - 2t(v - \tilde{v}, w) + t^2(w, w)
 \end{aligned}$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

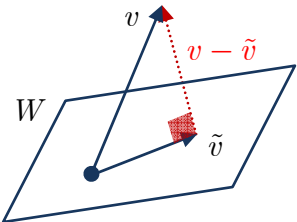


$$\begin{aligned}
 d(v, \tilde{v} + tw)^2 &= (v - \tilde{v} - tw, v - \tilde{v} - tw) \\
 &= (v - \tilde{v}, v - \tilde{v}) - 2t(v - \tilde{v}, w) + t^2(w, w)
 \end{aligned}$$

$$\frac{d(v, \tilde{v} + tw)^2 - d(v, \tilde{v})^2}{t^2} = -2 \frac{1}{t}(v - \tilde{v}, w) + (w, w)$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

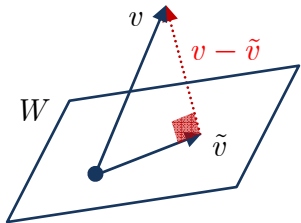
اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است



$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

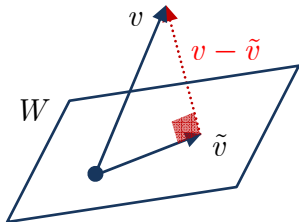
اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است



$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\} \quad \tilde{v} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است



$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\} \quad \tilde{v} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$$

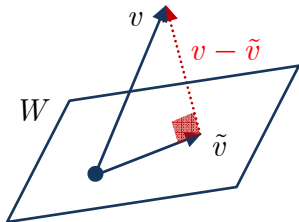
$$(v - \tilde{v}, w_1) = 0$$

$$\vdots$$

$$(v - \tilde{v}, w_m) = 0$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است



$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\} \quad \tilde{v} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$$

$$(v - \tilde{v}, w_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v, w_1) = (\tilde{v}, w_1)$$

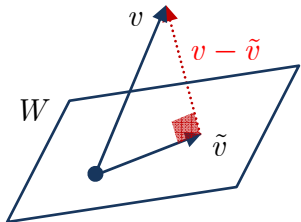
$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$(v - \tilde{v}, w_m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v, w_m) = (\tilde{v}, w_m)$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است



$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\} \quad \tilde{v} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$$

$$(v - \tilde{v}, w_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v, w_1) = (\tilde{v}, w_1) = x_1(w_1, w_1) + \dots + x_m(w_m, w_1)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(v - \tilde{v}, w_m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v, w_m) = (\tilde{v}, w_m) = x_1(w_1, w_m) + \dots + x_m(w_m, w_m)$$

بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است

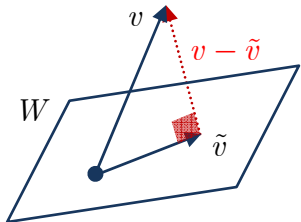
اگر α متعامد باشد

$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\} \quad \tilde{v} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$$

$$(v - \tilde{v}, w_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v, w_1) = x_1 (w_1, w_1)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(v - \tilde{v}, w_m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v, w_m) = x_m (w_m, w_m)$$



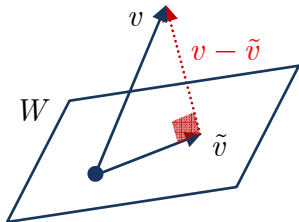
بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است

اگر α متعامد باشد

$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\} \quad \tilde{v} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$$

$$\tilde{v} = \frac{(v, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 + \dots + \frac{(v, w_m)}{(w_m, w_m)} w_m$$



بهترین تقریب یک بردار در یک زیرفضا

اگر W با بعد متناهی باشد دارای بهترین تقریب است

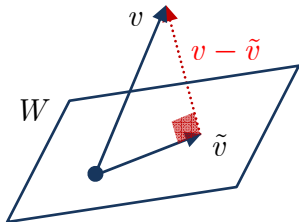
اگر α متعامد باشد

$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\} \quad \tilde{v} = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m$$

$$\tilde{v} = \frac{(v, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 + \dots + \frac{(v, w_m)}{(w_m, w_m)} w_m$$

اگر α متعامد و یکه باشد

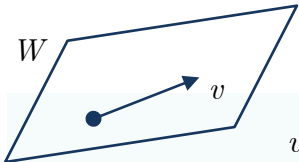
$$\tilde{v} = (v, w_1) w_1 + \dots + (v, w_m) w_m$$



اهمیت وجود یک پایه متعامد و یکه

$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$ یک پایه متعامد برای W

$$v = \frac{(v, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 + \dots + \frac{(v, w_m)}{(w_m, w_m)} w_m$$



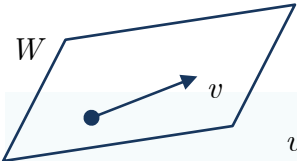
اهمیت وجود یک پایه متعامد و یکه

$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$ یک پایه متعامد برای W

$$v = \frac{(v, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 + \dots + \frac{(v, w_m)}{(w_m, w_m)} w_m$$

$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$ یک پایه متعامد و یکه برای W

$$v = (v, w_1) w_1 + \dots + (v, w_m) w_m$$



اهمیت وجود یک پایه متعامد و یکه

هر مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر مستقل خطی است.

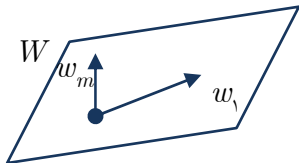
هر مجموعه متعامد و یکه مستقل خطی است

وجود پایه متعامد و یکه

استقرا روی بعد فضا

وجود پایه متعامد و یکه

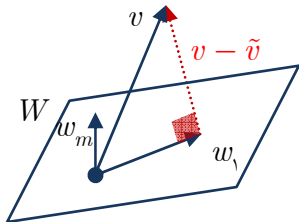
استقرا روی بعد فضا



$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$$

وجود پایه متعامد و یکه

استقرار روی بعد فضا

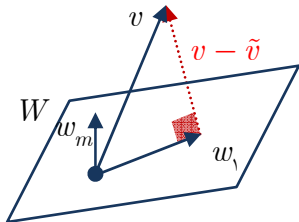


$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$$

وجود پایه متعامد و یکه

استقرار روی بعد فضا

روش گرام اشمیت برای متعامد سازی



$$\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$$

مکمل عمود یک فضای برداری (یا یک مجموعه)

$$S^{\perp} = \{v \in V : v \perp S\}$$

مکمل عمود یک فضای برداری (یا یک مجموعه)

$$S^{\perp} = \{v \in V : v \perp S\}$$

$S^{\perp}$ زیرفضایی از V است.

مکمل عمود یک فضای برداری (یا یک مجموعه)

$$S^\perp = \{v \in V : v \perp S\}$$

$S^\perp$ زیرفضایی از V است.

اگر $v_1, v_r \in S^\perp$ آنگاه برای هر $s \in S$ داریم

$$(v_1 + \alpha v_r, s) = (v_1, s) + \alpha(v_r, s) = 0.$$

مکمل عمود یک فضای برداری (یا یک مجموعه)

$$S^{\perp} = \{v \in V : v \perp S\}$$

$S^{\perp}$ زیرفضایی از V است.

اگر $v_1, v_r \in S^{\perp}$ آنگاه برای هر $s \in S$ داریم

$$(v_1 + \alpha v_r, s) = (v_1, s) + \alpha(v_r, s) = 0.$$

اگر $\langle S \rangle$ با بعد متناهی باشد آنگاه $(S^{\perp})^{\perp} = \langle S \rangle$.

اگر W زیرفضای با بعد متناهی V باشد آنگاه $V = W \oplus W^\perp$.

اگر W زیرفضای با بعد متناهی V باشد آنگاه $V = W \oplus W^\perp$.

عملگر $P : V \rightarrow V$ تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $P = P^\intercal$ و $\text{Im } P \perp \ker P$.

اگر W زیرفضای با بعد متناهی V باشد آنگاه $V = W \oplus W^\perp$.

عملگر $P : V \rightarrow V$ تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $P = P^\top$ و $\text{Im } P \perp \ker P$.

اگر دو بردار u و v عمود بر هم باشند، آنگاه $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

اگر W زیرفضای با بعد متناهی V باشد آنگاه $V = W \oplus W^\perp$.

عملگر $P : V \rightarrow V$ تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $P = P^\top$ و $\text{Im } P \perp \ker P$.

اگر دو بردار u و v عمود بر هم باشند، آنگاه $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &= (u + v, u + v) = (u, u) + (v, v) + (u, v) + (v, u) \\ &= (u, u) + (v, v) = |u|^2 + |v|^2 \end{aligned}$$

اگر W زیرفضای با بعد متناهی V باشد آنگاه $V = W \oplus W^\perp$.

عملگر $P : V \rightarrow V$ تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $P = P^\top$ و $\text{Im } P \perp \ker P$.

اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ متعامد و یکه باشد آنگاه

$$|t_1 v_1 + \dots + t_n v_n|^2 = |t_1|^2 + \dots + |t_n|^2$$

اگر W زیرفضای با بعد متناهی V باشد آنگاه $V = W \oplus W^\perp$.

عملگر $P : V \rightarrow V$ تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $P = P^*$ و $\text{Im } P \perp \ker P$.

اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ متعامد و یکه باشد آنگاه

$$|t_1 v_1 + \dots + t_n v_n|^2 = |t_1|^2 + \dots + |t_n|^2$$

برای هر دو بردار u و v داریم $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

ضرب داخلی و دوگانی

V یک فضای ضرب داخلی و $v \in V$

$$f_v : V \rightarrow F; \quad f_v(u) \rightarrow (u, v)$$

ضرب داخلی و دوگانی

V یک فضای ضرب داخلی و $v \in V$

$$f_v : V \rightarrow F; \quad f_v(u) \rightarrow (u, v)$$

$$\varphi : V \rightarrow V^*; \quad \varphi(v) = f_v$$

ضرب داخلی و دوگانی

V یک فضای ضرب داخلی و $v \in V$

$$f_v : V \rightarrow F; \quad f_v(u) \rightarrow (u, v)$$

$$\varphi : V \rightarrow V^*; \quad \varphi(v) = f_v$$

نگاشت φ پادخطی است. یعنی برای هر $v_1, v_2 \in V$ و $c \in F$ داریم

$$\varphi(v_1 + cv_2) = \varphi(v_1) + \bar{c}\varphi(v_2)$$

ضرب داخلی و دوگانی

اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه

$$\varphi(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \bar{c}_1 \varphi(v_1) + \dots + \bar{c}_n \varphi(v_n)$$

ضرب داخلی و دوگانی

اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه

$$\varphi(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \bar{c}_1 \varphi(v_1) + \dots + \bar{c}_n \varphi(v_n)$$

φ نگاشتی یک به یک است.

ضرب داخلی و دوگانی

اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه

$$\varphi(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \bar{c}_1 \varphi(v_1) + \dots + \bar{c}_n \varphi(v_n)$$

φ نگاشتی یک به یک است.

$$f_{v_1}(u) = f_{v_2}(u) \Rightarrow (u, v_1) = (u, v_2) \Rightarrow (u, v_1 - v_2) = 0$$

ضرب داخلی و دوگانی

اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه

$$\varphi(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \bar{c}_1 \varphi(v_1) + \dots + \bar{c}_n \varphi(v_n)$$

φ نگاشتی یک به یک است.

φ پوشا است.

$$\begin{aligned} c_1 \varphi(v_1) + \dots + c_n \varphi(v_n) = 0 &\Rightarrow \varphi(\bar{c}_1 v_1 + \dots + \bar{c}_n v_n) = 0 \\ &\Rightarrow \bar{c}_1 v_1 + \dots + \bar{c}_n v_n = 0 \end{aligned}$$

ضرب داخلی و دوگانی

اگر $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه

$$\varphi(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \bar{c}_1 \varphi(v_1) + \dots + \bar{c}_n \varphi(v_n)$$

φ نگاشتی یک به یک است.

φ پوشا است.

$$\begin{aligned} c_1 \varphi(v_1) + \dots + c_n \varphi(v_n) = 0 &\Rightarrow \varphi(\bar{c}_1 v_1 + \dots + \bar{c}_n v_n) = 0 \\ &\Rightarrow \bar{c}_1 v_1 + \dots + \bar{c}_n v_n = 0 \end{aligned}$$

$$W \subsetneq V, \quad \Leftrightarrow \quad \text{وجود دارد } f \in V^* \text{ که } W \subset \ker f.$$

$$W \subsetneq V \iff \exists f \in V^* \text{ وجود دارد که } W \subset \ker f.$$

$$W \subsetneq V \iff \exists v \in V \text{ وجود دارد که } v \perp W$$

اثبات دیگری برای وجود پایه متعامد و یکه

پایه یکتای $\alpha^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* وجود دارد $\Leftrightarrow$ پایه‌ای برای V $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$f_i(v_j) = \delta_{ij}$$

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V $\Leftrightarrow$ پایه یکتای $\alpha^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* وجود دارد

$$f_i(v_j) = \delta_{ij}$$

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V $\Leftrightarrow$ پایه یکتای $\tilde{\alpha} = \{u_1, \dots, u_n\}$ برای V وجود دارد

$$(v_i, u_j) = \delta_{ij}$$

اگر α متعامد و یکه باشد، آنگاه $\alpha = \tilde{\alpha}$.

برای هر مجموعه $S \subset V$

S° زیر فضایی از V^* است و $(S^\circ)^\circ = \langle S \rangle$. به علاوه اگر W زیر فضایی از V باشد، آنگاه

$$\dim W^\circ + \dim W = \dim V$$

برای هر مجموعه $S \subset V$

S° ، زیر فضایی از V^* است و $(S^\circ)^\circ = \langle S \rangle$. به علاوه اگر W زیر فضایی از V باشد، آنگاه

$$\dim W^\circ + \dim W = \dim V$$

برای هر مجموعه $S \subset V$

$$S^\perp = \{u \in V : u \perp S\} = \{u \in V : \forall v \in S, (u, v) = 0\}$$

برای هر مجموعه $S \subset V$

S° زیر فضایی از V^* است و $(S^\circ)^\circ = \langle S \rangle$. به علاوه اگر W زیر فضایی از V باشد، آنگاه

$$\dim W^\circ + \dim W = \dim V$$

برای هر مجموعه $S \subset V$

$S^\perp$ زیر فضایی از V است و $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$. به علاوه برای هر زیر فضای $W \subseteq V$ داریم

$$\dim W^\perp + \dim W = \dim V$$

$$g \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^k \ker f_i \subseteq \ker g \Leftrightarrow \langle f_1, \dots, f_k \rangle^\circ \subseteq \{g\}^\circ$$

$v \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ اگر و تنها اگر هر بردار عمود بر $v_1, \dots, v_k$ بر v نیز عمود باشد.

$$T : V \rightarrow W$$
$$T^t : W^* \rightarrow V^*$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^t : W^* \rightarrow V^*$$

$$f \circ T \in V^*$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^t : W^* \rightarrow V^*$$

$$f \circ T \in V^*$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V
 \end{array}$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^t : W^* \rightarrow V^*$$

$$f \circ T \in V^*$$

$$\begin{array}{ccc} W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\ \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\ W & \xrightarrow{T^*} & V \end{array}$$

$$T^* = \varphi_V^{-1} \circ T \circ \varphi_W$$

$$T^t(f) = f \circ T$$

$$\begin{array}{ccc} W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\ \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\ W & \xrightarrow{T^*} & V \end{array}$$

$$T^t(f) = f \circ T$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V \\
 \\
 f & \xrightarrow{T^*} & T^t(f) \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 w & \xrightarrow{T} & T(w)
 \end{array}$$

$$T^t(f) = f \circ T$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V \\
 \\
 f & \xrightarrow{T^t} & T^t(f) \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 w & \xrightarrow{T^*} & T^*(w)
 \end{array}$$

$$T^t(f) = f \circ T$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V \\
 \\
 f & \xrightarrow{T^t} & T^t(f) \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 w & \xrightarrow{T^*} & T^*(w)
 \end{array}$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) \quad f(v) = (v, w)$$

$$T^t(f) = f \circ T$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V \\
 \\
 f & \xrightarrow{T^t} & T^t(f) \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 w & \xrightarrow{T^*} & T^*(w)
 \end{array}$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) \quad f(u) = (u, w)$$

$$T^t(f) = f \circ T$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V \\
 \\
 f & \xrightarrow{T^t} & T^t(f) \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 w & \xrightarrow{T^*} & T^*(w)
 \end{array}$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) \quad f(u) = (u, w)$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) = f \circ T(v) = f(T(v)) = (T(v), w)$$

$$T^t(f) = f \circ T$$

$$\begin{array}{ccc}
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V \\
 \\
 f & \xrightarrow{T^t} & T^t(f) \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 w & \xrightarrow{T^*} & T^*(w)
 \end{array}$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) \quad f(u) = (u, w)$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) = f \circ T(v) = f(T(v)) = (T(v), w)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & T^t(f) = f \circ T & \\
 W^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 W & \xrightarrow{T^*} & V \\
 f & \xrightarrow{T^t} & T^t(f) \\
 \varphi_W \uparrow & & \uparrow \varphi_V \\
 w & \xrightarrow{T^*} & T^*(w)
 \end{array}$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) \quad f(u) = (u, w)$$

$$(v, T^*(w)) = T^t(f)(v) = f \circ T(v) = f(T(v)) = (T(v), w)$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

الحاقی نگاشت T

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

الحاقی نگاشت T

$$\begin{aligned} (v, T^*(w_1 + rw_2)) &= (T(v), w_1 + rw_2) = (T(v), w_1) + \bar{r}(T(v), w_2) \\ &= (v, T^*(w_1)) + \bar{r}(v, T^*(w_2)) = (v, T^*(w_1) + rT^*(w_2)) \end{aligned}$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

الحاقی نگاشت T

$$\begin{aligned} (v, T^*(w_\downarrow + rw_\uparrow)) &= (T(v), w_\downarrow + rw_\uparrow) = (T(v), w_\downarrow) + \overline{r}(T(v), w_\uparrow) \\ &= (v, T^*(w_\downarrow)) + \overline{r}(v, T^*(w_\uparrow)) = (v, T^*(w_\downarrow) + rT^*(w_\uparrow)) \end{aligned}$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

الحاقی نگاشت T

$$\begin{aligned} (v, T^*(w_l + rw_r)) &= (T(v), w_l + rw_r) = (T(v), w_l) + \bar{r}(T(v), w_r) \\ &= (v, T^*(w_l)) + \bar{r}(v, T^*(w_r)) = (v, T^*(w_l) + rT^*(w_r)) \end{aligned}$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

الحاقی نگاشت T

$$\begin{aligned} (v, T^*(w_{\text{ل}} + rw_{\text{ر}})) &= (T(v), w_{\text{ل}} + rw_{\text{ر}}) = (T(v), w_{\text{ل}}) + \bar{r}(T(v), w_{\text{ر}}) \\ &= (v, T^*(w_{\text{ل}})) + \bar{r}(v, T^*(w_{\text{ر}})) = (v, T^*(w_{\text{ل}})) + rT^*(w_{\text{ر}}) \end{aligned}$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

الحاقی نگاشت T

$$\begin{aligned}(v, T^*(w_l + rw_r)) &= (T(v), w_l + rw_r) = (T(v), w_l) + \bar{r}(T(v), w_r) \\ &= (v, T^*(w_l)) + \bar{r}(v, T^*(w_r)) = (v, T^*(w_l) + rT^*(w_r))\end{aligned}$$

$$T : V \rightarrow W$$

$$T^* : W \rightarrow V$$

$$(v, T^*(w)) = (T(v), w)$$

الحاقی نگاشت T

$$\begin{aligned} (v, T^*(w_l + rw_r)) &= (T(v), w_l + rw_r) = (T(v), w_l) + \bar{r}(T(v), w_r) \\ &= (v, T^*(w_l)) + \bar{r}(v, T^*(w_r)) = (v, T^*(w_l) + rT^*(w_r)) \\ T^*(w_l + rw_r) &= T^*(w_l) + rT^*(w_r) \end{aligned}$$

برای نگاشت‌هایی خطی $T, U : V \rightarrow W$ و $L : W \rightarrow Z$ داریم

$$(T + rU)^t = T^t + rU^t, \quad (LT)^t = T^t L^t, \quad (T^t)^t = T$$

برای نگاشت‌هایی خطی $T, U : V \rightarrow W$ و $L : W \rightarrow Z$ داریم

$$(T + rU)^t = T^t + rU^t, \quad (LT)^t = T^t L^t, \quad (T^t)^t = T$$

برای نگاشت‌هایی خطی $T, U : V \rightarrow W$ و $L : W \rightarrow Z$ داریم

$$(T + rU)^* = T^* + \bar{r}U^*, \quad (LT)^* = T^* L^*, \quad (T^*)^* = T$$

$$\begin{aligned}(v, (T + rU)^*(w)) &= ((T + rU)(v), w) \\&= (T(v) + rU(v), w) \\&= (T(v), w) + r(U(v), w) \\&= (v, T^*(w)) + r(v, U^*(w)) \\&= (v, T^*(w) + rU^*(w)) = (v, (T^* + rU^*)(w))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v, (T + rU)^*(w)) &= ((T + rU)(v), w) \\&= (T(v) + rU(v), w) \\&= (T(v), w) + r(U(v), w) \\&= (v, T^*(w)) + r(v, U^*(w)) \\&= (v, T^*(w) + rU^*(w)) = (v, (T^* + rU^*)(w))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v, (T + rU)^*(w)) &= ((T + rU)(v), w) \\&= (T(v) + rU(v), w) \\&= (T(v), w) + r(U(v), w) \\&= (v, T^*(w)) + r(v, U^*(w)) \\&= (v, T^*(w) + rU^*(w)) = (v, (T^* + rU^*)(w))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v, (T + rU)^*(w)) &= ((T + rU)(v), w) \\&= (T(v) + rU(v), w) \\&= (T(v), w) + r(U(v), w) \\&= (v, T^*(w)) + r(v, U^*(w)) \\&= (v, T^*(w) + rU^*(w)) = (v, (T^* + rU^*)(w))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v, (T + rU)^*(w)) &= ((T + rU)(v), w) \\&= (T(v) + rU(v), w) \\&= (T(v), w) + r(U(v), w) \\&= (v, T^*(w)) + r(v, U^*(w)) \\&= (v, T^*(w) + rU^*(w)) = (v, (T^* + rU^*)(w))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v, (T + rU)^*(w)) &= ((T + rU)(v), w) \\&= (T(v) + rU(v), w) \\&= (T(v), w) + r(U(v), w) \\&= (v, T^*(w)) + r(v, U^*(w)) \\&= (v, T^*(w) + \bar{r}U^*(w)) = (v, (T^* + \bar{r}U^*)(w))\end{aligned}$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow V$ داریم

$$[T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*} = ([T]_{\beta}^{\alpha})^t \quad ([T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*})_{ij} = ([T]_{\beta}^{\alpha})_{ji}$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow V$ داریم

$$[T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*} = ([T]_{\beta}^{\alpha})^t \quad ([T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*})_{ij} = ([T]_{\beta}^{\alpha})_{ji}$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow V$ داریم

$$[T^*]_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} = \overline{([T]_{\beta}^{\alpha})^t} \quad ([T^*]_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}})_{ij} = \overline{([T]_{\beta}^{\alpha})_{ji}}$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow V$ داریم

$$[T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*} = ([T]_{\beta}^{\alpha})^t \quad ([T^t]_{\alpha^*}^{\beta^*})_{ij} = ([T]_{\beta}^{\alpha})_{ji}$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow V$ داریم

$$[T^*]_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} = \overline{([T]_{\beta}^{\alpha})^t} \quad ([T^*]_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}})_{ij} = \overline{([T]_{\beta}^{\alpha})_{ji}}$$

اگر α و β پایه‌هایی متعامد و یک‌ه برای V و W باشند آنگاه

$$[T^*]_{\alpha}^{\beta} = \overline{([T]_{\beta}^{\alpha})^t}$$

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $\bar{\alpha} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ پایه‌هایی دوگان برای V

$$v = (v, \tilde{v}_1)v_1 + \dots + (v, \tilde{v}_n)v_n$$

V پایه‌هایی دوگان برای $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $\bar{\alpha} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$

$$v = (v, \tilde{v}_1)v_1 + \dots + (v, \tilde{v}_n)v_n$$

W پایه‌هایی دوگان برای $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ و $\bar{\beta} = \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n\}$

$$([T]_{\beta}^{\alpha})_{ij} = (T(v_j), \tilde{w}_i)$$

V پایه‌هایی دوگان برای $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $\bar{\alpha} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$

$$v = (v, \tilde{v}_1)v_1 + \dots + (v, \tilde{v}_n)v_n$$

W پایه‌هایی دوگان برای $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ و $\bar{\beta} = \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n\}$

$$([T]_{\beta}^{\alpha})_{ij} = (T(v_j), \tilde{w}_i)$$

اگر α و β پایه‌هایی متعامد و یک‌ه برای V و W باشند آنگاه

$$v = (v, v_1)v_1 + \dots + (v, v_n)v_n$$

$$([T]_{\beta}^{\alpha})_{ij} = (T(v_j), w_i)$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ داریم

$$(\ker T)^\circ = \operatorname{Im} T^t, \quad (\operatorname{Im} T)^\circ = \ker T^t, \quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^t$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ داریم

$$(\ker T)^\circ = \operatorname{Im} T^t, \quad (\operatorname{Im} T)^\circ = \ker T^t, \quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^t$$

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ داریم

$$(\ker T)^\perp = \operatorname{Im} T^*, \quad (\operatorname{Im} T)^\perp = \ker T^*, \quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^*$$

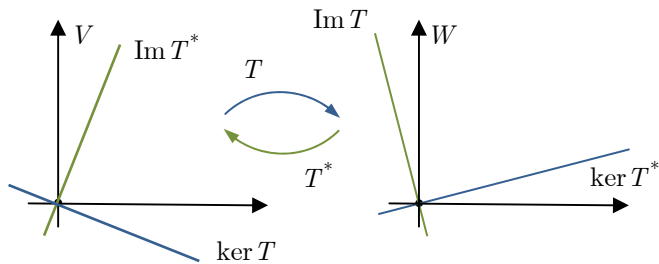
برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ داریم

$$(\ker T)^\circ = \operatorname{Im} T^t, \quad (\operatorname{Im} T)^\circ = \ker T^t, \quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^t$$

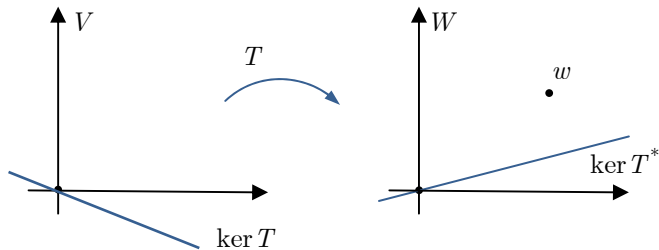
برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ داریم

$$(\ker T)^\perp = \operatorname{Im} T^*, \quad (\operatorname{Im} T)^\perp = \ker T^*, \quad \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^*$$

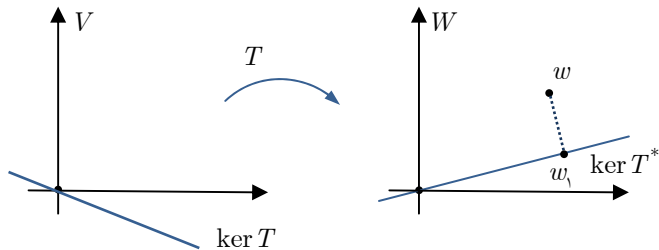
$$\begin{aligned} w \in (\operatorname{Im} T)^\perp &\Leftrightarrow \forall v \in V : (T(v), w) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V : (v, T^*(w)) = 0 \\ &\Leftrightarrow T^*(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \ker T^* \end{aligned}$$



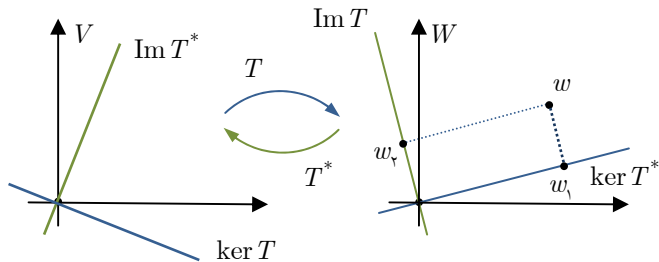
$$T : \text{Im } T^* \leftrightarrow \text{Im } T, \quad T^* : \text{Im } T \leftrightarrow \text{Im } T^*$$



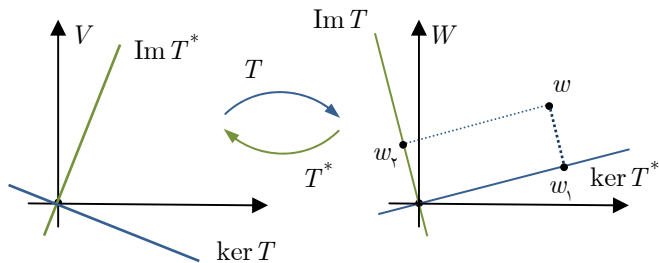
$$T(v) = w$$



$$T(v) = w$$

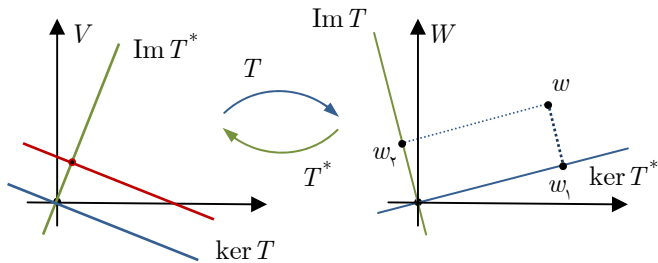


$$T(v) = w$$



$$T(v) = w$$

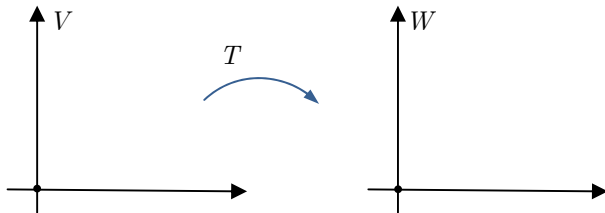
$$T^*T(v) = T^*w$$

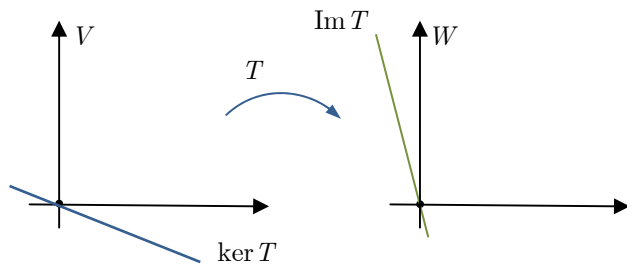


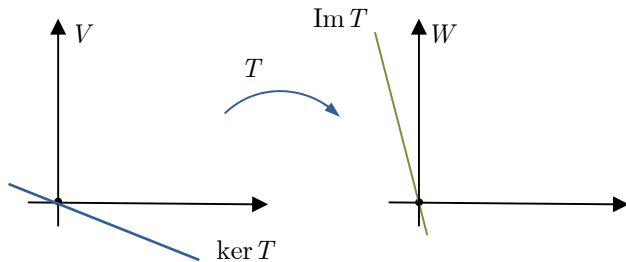
$$T(v) = w$$

فرض کنید $T : V \rightarrow V$ یک عملگر یکانی باشد در این صورت $|\det T| = 1$ و اگر λ مقدار ویژه‌ای برای آن باشد آنگاه $|\lambda| = 1$.

فرض کنید α و β پایه‌هایی متعامد و یکه برای فضای ضرب داخلی V باشند. در این صورت $[I_V]_{\beta}^{\alpha}$ یک ماتریس یکانی است. اگر A یک ماتریس یکانی $n \times n$ و V یک فضای ضرب داخلی n بعدی باشد آنگاه به ازای هر پایه متعامد و یکه α برای V ، پایه‌های متعامد و یکه β و γ یافت می‌شوند که $[I]_{\beta}^{\alpha} = A$ و $[I]_{\alpha}^{\gamma} = A$.

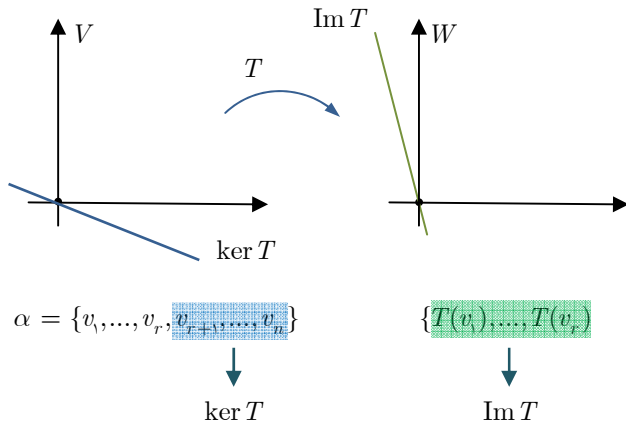


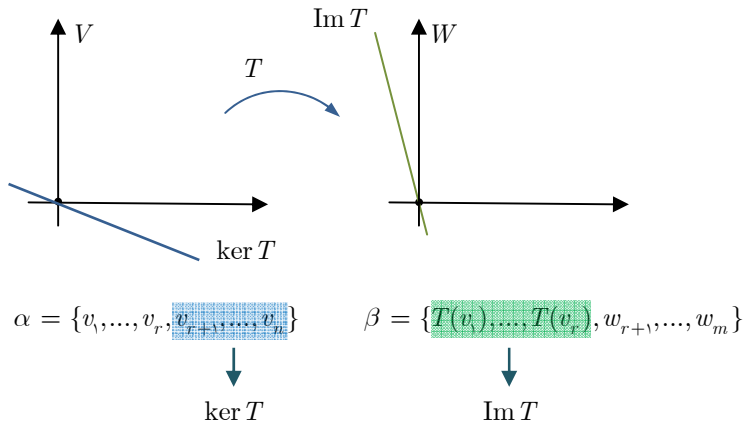


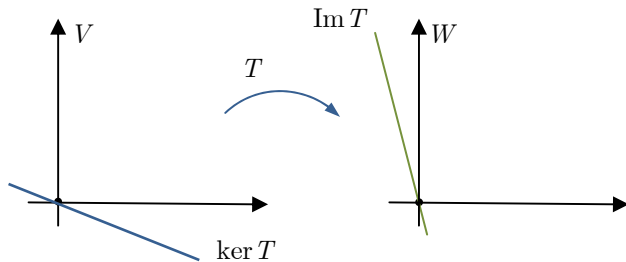


$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

↓
 $\ker T$







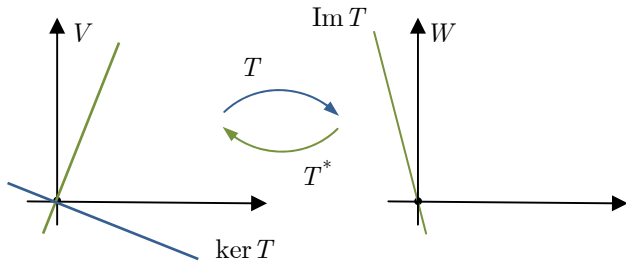
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

$\downarrow$
 $\ker T$

$$\beta = \{\boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

$\downarrow$
 $\operatorname{Im} T$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$



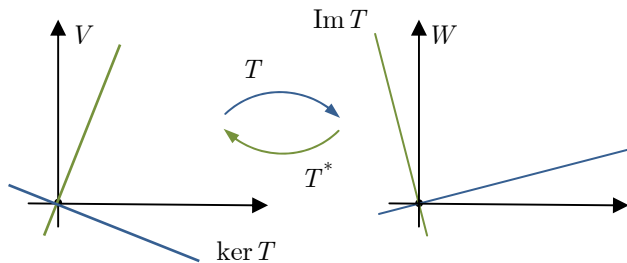
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

↓
 $\ker T$

$$\beta = \{\boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

↓
 $\operatorname{Im} T$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$



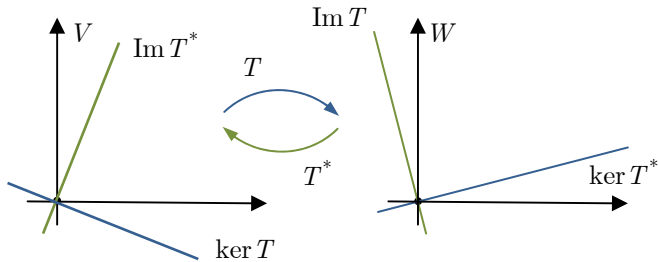
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

↓
 $\ker T$

$$\beta = \{\boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

↓
 $\operatorname{Im} T$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$



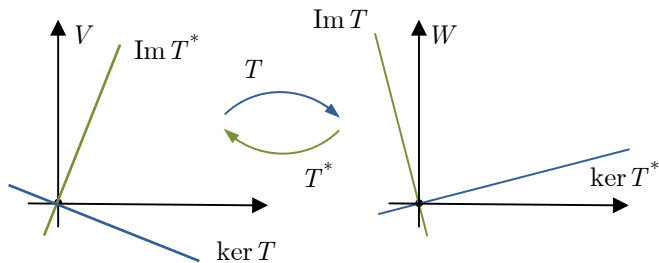
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

$\downarrow$
 $\ker T$

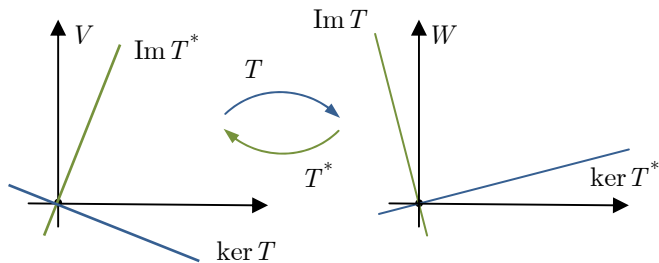
$$\beta = \{\boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

$\downarrow$
 $\text{Im } T$

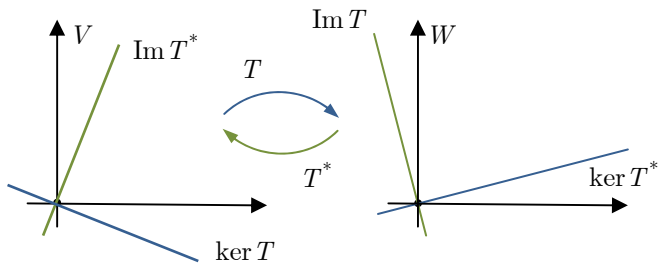
$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$



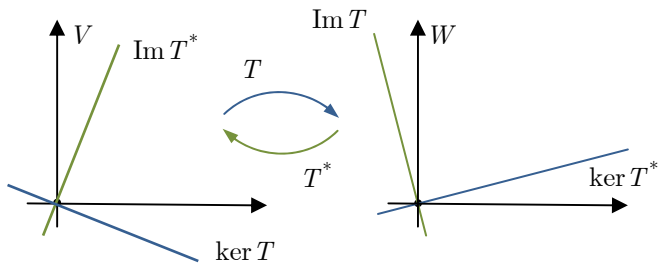
$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$



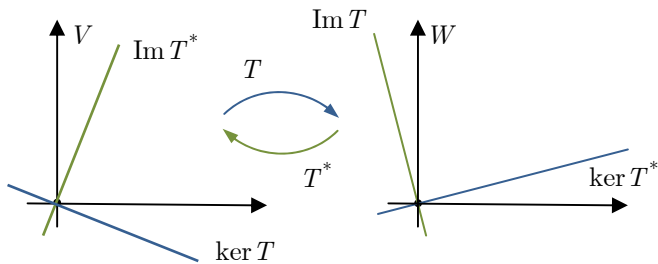
$$[T^*]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \Leftarrow [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$



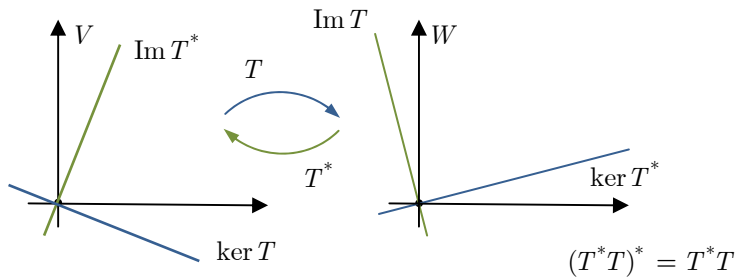
$$[T^*T]_{\alpha}^{\alpha} = [T^*]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad [T^*]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

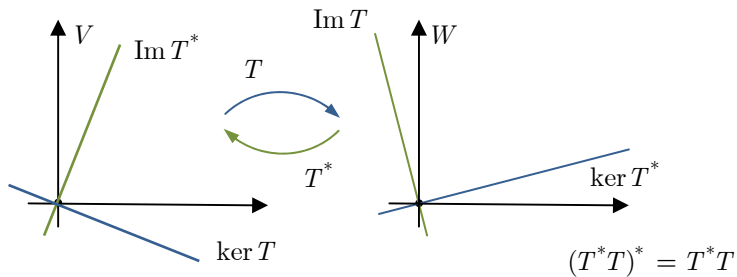


$$[T^*T]_{\alpha}^{\alpha} = [T^*]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad [T^*]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_r & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

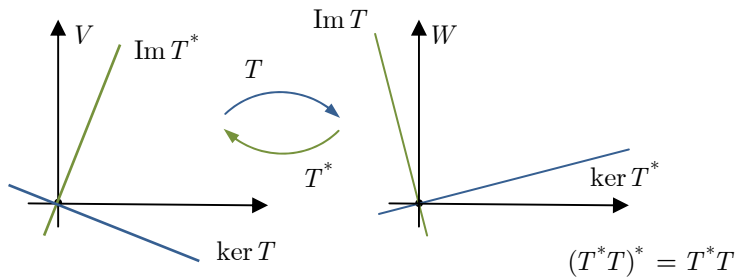


$$[T^*T]_{\alpha}^{\alpha} = [T^*]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \bar{D}D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \Leftarrow [T^*]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} \bar{D} & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \Leftarrow [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$



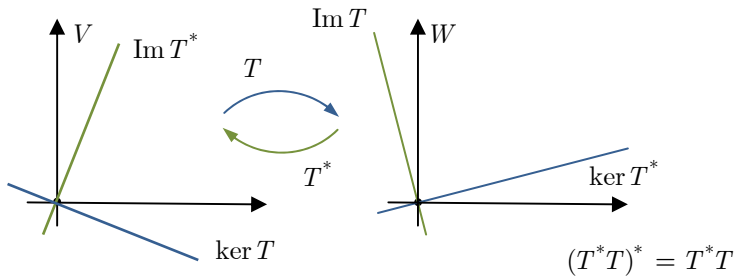


$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$



$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

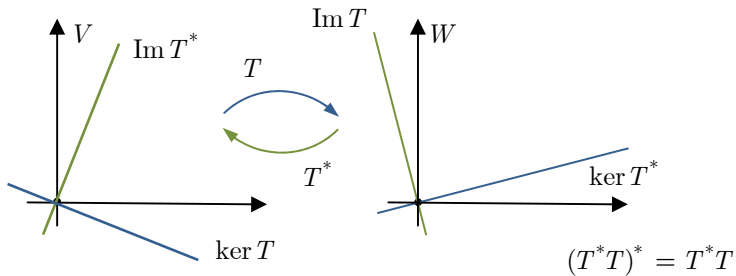
$$T^*T \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \mu_1 v_1 \\ \mu_r v_r \\ \circ \\ \circ \end{array}$$



$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

$$T^*T \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\mu_1 v_1 \quad \mu_r v_r \quad \circ \quad \circ$$

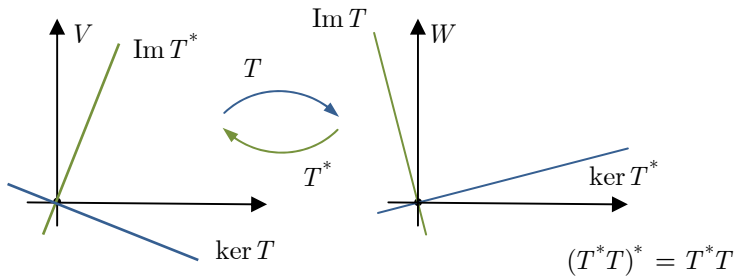


$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

$$T^*T \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\mu_1 v_1 \quad \mu_r v_r \quad \circ \quad \circ$$

$$\boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}$$



$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

$$T^*T \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\mu_1 v_1$$

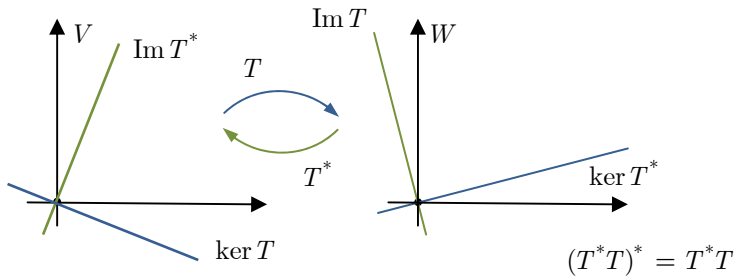
$$\mu_r v_r$$

$$\circ$$

$$\circ$$

$$\boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}$$

$$(T(v_i), T(v_j))$$

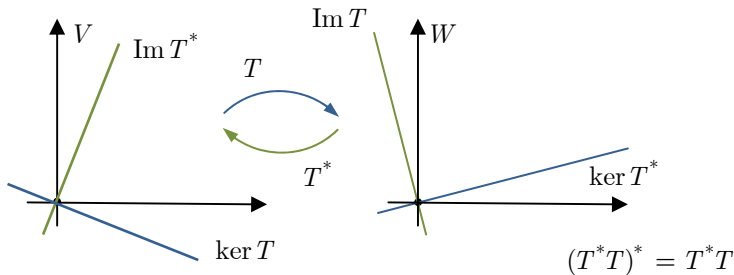


$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

$$T^*T \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mu_1 v_1 & \mu_r v_r & \circ & \circ \end{matrix}$$

$$T(v_1), \dots, T(v_r)$$

$$(T(v_i), T(v_j)) = (T^*T(v_i), v_j)$$

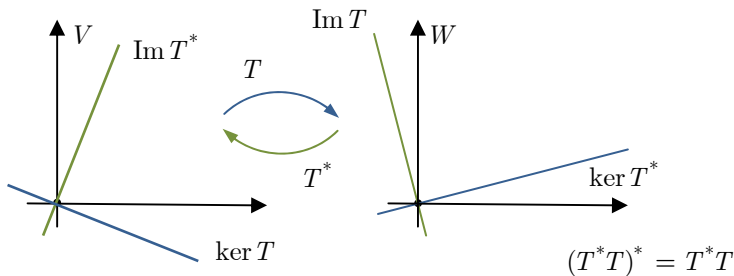


$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

$$T^*T \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \mu_1 v_1 \\ \mu_r v_r \\ \circ \\ \circ \end{array}$$

$$\boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}$$

$$(T(v_i), T(v_j)) = (T^*T(v_i), v_j) = \mu_i(v_i, v_j)$$



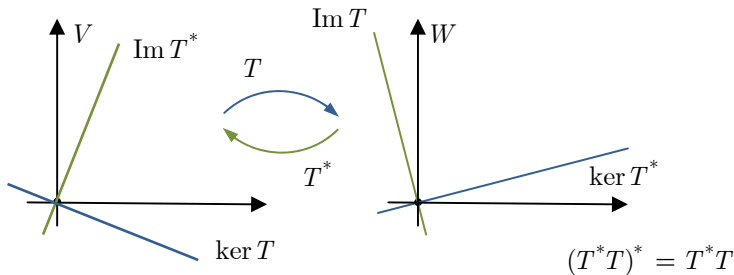
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, \boxed{v_{r+1}, \dots, v_n}\}$$

$$T^*T \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \mu_1 v_1 \\ \mu_r v_r \\ \circ \\ \circ \end{array}$$

$$\boxed{w_1, \dots, w_r}$$

$$(T(v_i), T(v_j)) = (T^*T(v_i), v_j) = \mu_i(v_i, v_j)$$

$$w_i = (\mu_i)^{-1/r} T(v_i) \quad (i \leq r)$$



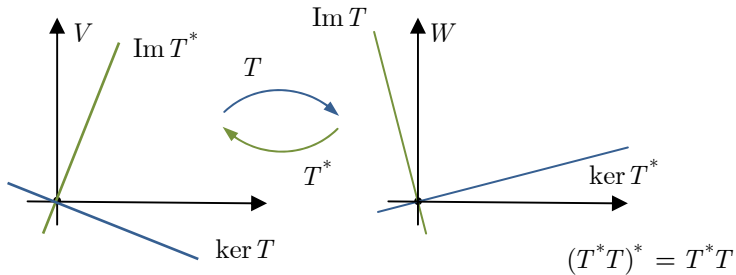
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

$$T^*T \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mu_1 v_1 & \mu_r v_r & \circ & \circ \end{matrix}$$

$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

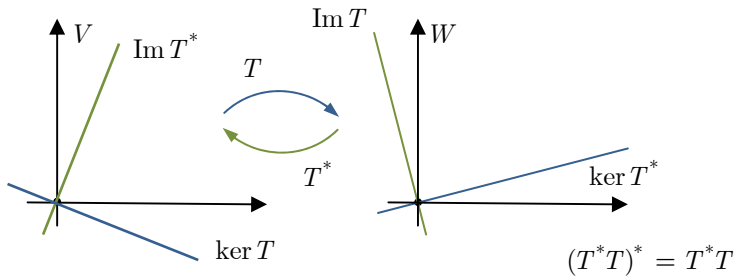
$$(T(v_i), T(v_j)) = (T^*T(v_i), v_j) = \mu_i(v_i, v_j)$$

$$w_i = (\mu_i)^{-1/2} T(v_i) \quad (i \leq r)$$



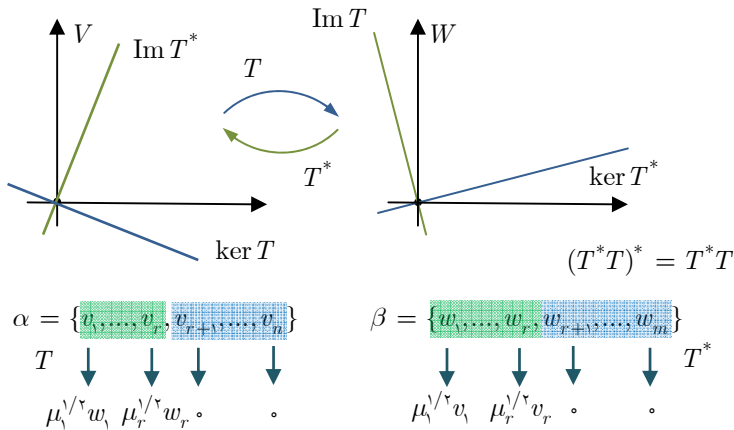
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

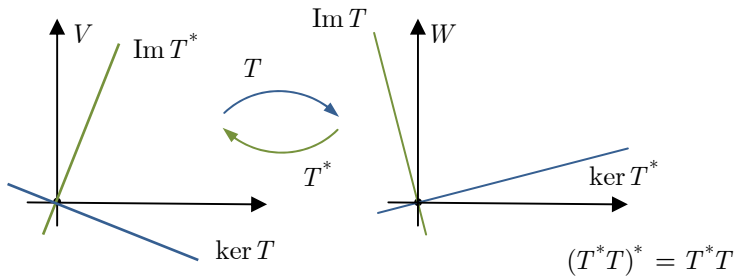
$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$



$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$



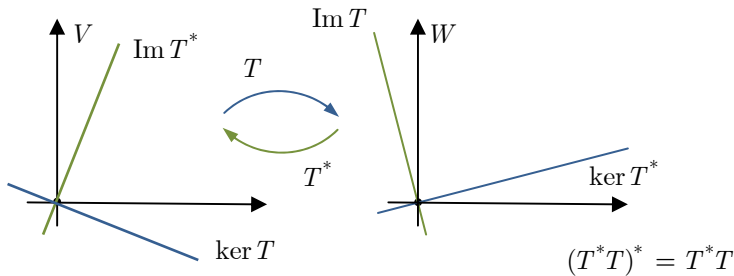


$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} \mu_1^{1/r} & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & \mu_r^{1/r} \end{bmatrix}$$



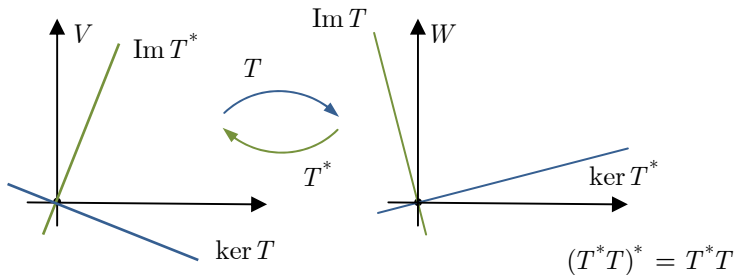
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

$$[T^*]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} \mu_1^{1/r} & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & \mu_r^{1/r} \end{bmatrix}$$

$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه عملگر T^*T است.



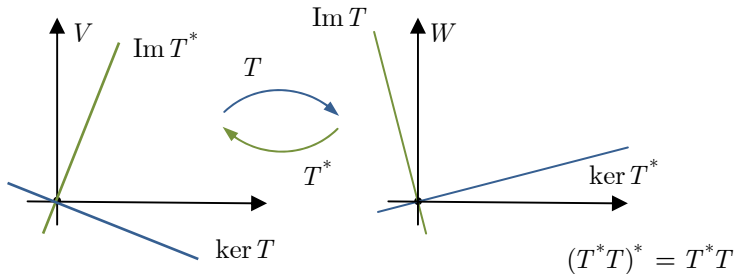
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

T $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\mu_1^{1/r} w_1$ $\mu_r^{1/r} w_r$ $\circ$ $\circ$

$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

T^* $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\mu_1^{1/r} v_1$ $\mu_r^{1/r} v_r$ $\circ$ $\circ$

$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$ پایه متعامد و یکه از بردارهای ویژه عملگر TT^* است.



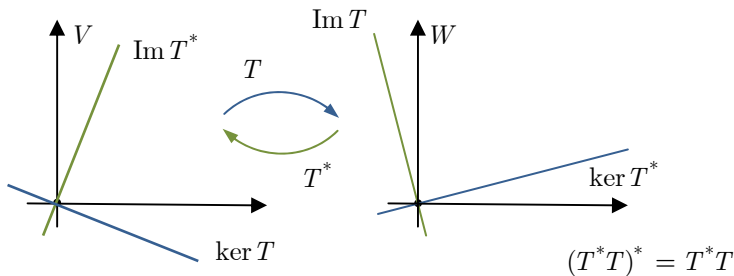
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

$$\begin{array}{c} T \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mu_1^{1/r} w_1 \quad \mu_r^{1/r} w_r \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

$$\begin{array}{c} T^* \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mu_1^{1/r} v_1 \quad \mu_r^{1/r} v_r \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

$\mu_1, \dots, \mu_r$ مقادیر ویژه ناصفر عملگرهای T^*T و TT^* اند



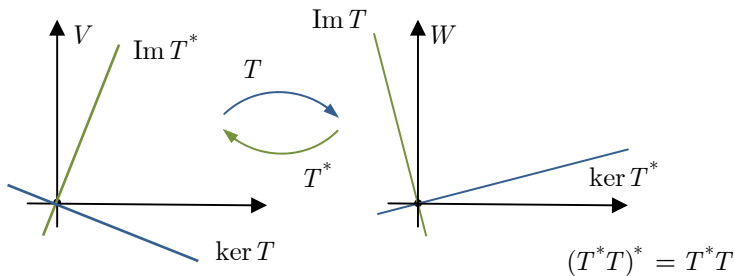
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow T \\ \mu_1^{1/r} w_1 \quad \mu_r^{1/r} w_r \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

$$\beta = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow T^* \\ \mu_1^{1/r} v_1 \quad \mu_r^{1/r} v_r \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

جذر مقادیر ویژه T^*T را مقادیر تکین عملگر T می‌نامند.



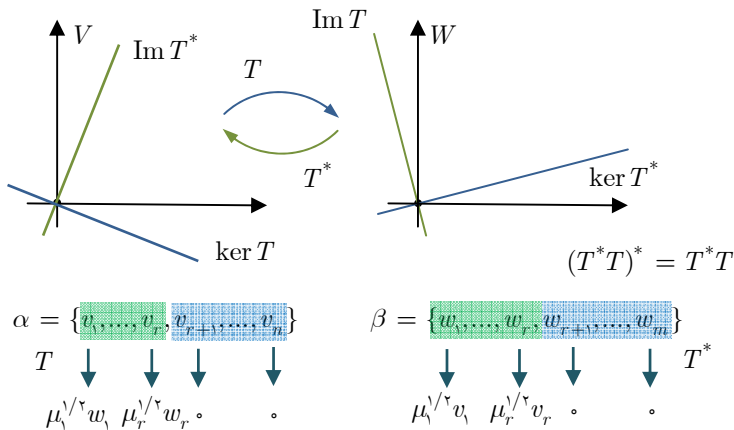
$$\alpha = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{green}}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{blue}} \}$$

$$\begin{array}{c} T \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mu_1^{1/2} w_1 \quad \mu_r^{1/2} w_r \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

$$\beta = \{ \underbrace{w_1, \dots, w_r}_{\text{green}}, \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_m}_{\text{blue}} \}$$

$$\begin{array}{c} T^* \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mu_1^{1/2} v_1 \quad \mu_r^{1/2} v_r \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

اهمیت نسبت بزرگترین مقدار تکین یک عملگر به کوچکترین مقدار تکین آن

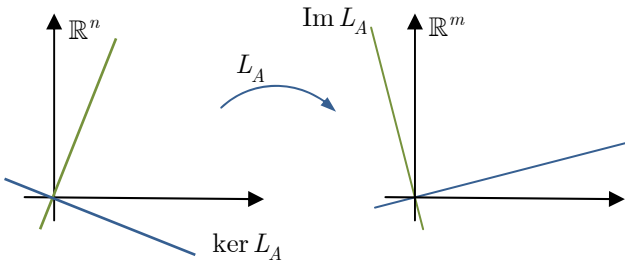


تجزیه مقادیر تکین برای ماتریس‌ها. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت ماتریس قطری D با درایه‌های مثبت روی قطر و ماتریس‌های یکانی $U_\top$ و $U_\bot$ وجود دارند که

$$A = U_\top \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} U_\bot$$

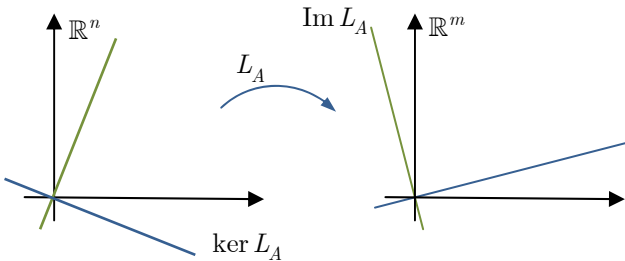
تجزیه مقادیر تکین برای ماتریس‌ها. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت ماتریس قطری D با درایه‌های مثبت روی قطر و ماتریس‌های یکانی $U_\top$ و $U_\bot$ وجود دارند که

$$A = U_\top \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} U_\bot$$



تجزیه مقادیر تکین برای ماتریس‌ها. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت ماتریس قطری D با درایه‌های مثبت روی قطر و ماتریس‌های یکانی $U_\vee$ و $U_\wedge$ وجود دارند که

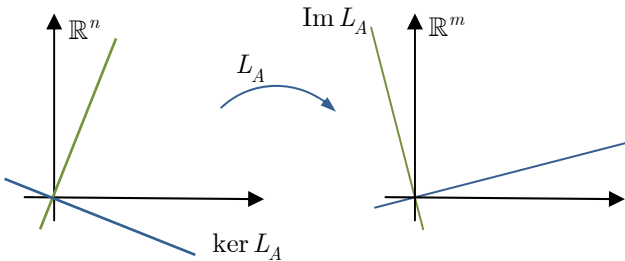
$$A = U_\vee \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} U_\wedge$$



$$[L_A]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر تکین برای ماتریس‌ها. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت ماتریس قطری D با درایه‌های مثبت روی قطر و ماتریس‌های یکانی $U_\top$ و $U_\bot$ وجود دارند که

$$A = U_\top \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} U_\bot$$

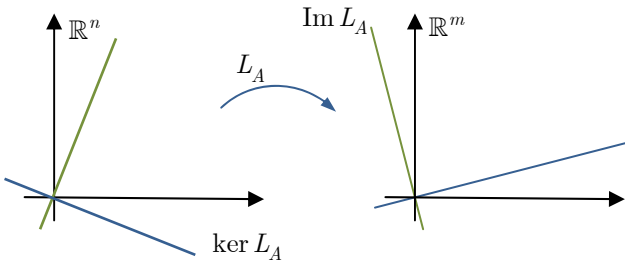


$$[L_A]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$A = [L_A]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n} = [I_{F^m} L_A I_{F^n}]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}$$

تجزیه مقادیر تکین برای ماتریس‌ها. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت ماتریس قطری D با درایه‌های مثبت روی قطر و ماتریس‌های یکانی $U_\vee$ و $U_\wedge$ وجود دارند که

$$A = U_\vee \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} U_\wedge$$



$$\begin{aligned} [L_A]_\beta^\alpha &= \begin{bmatrix} D & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \\ A &= [L_A]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n} = [I_{F^m} L_A I_{F^n}]_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n} \\ &= [I_{F^m}]_{\varepsilon_m}^\beta [L_A]_\beta^\alpha [I_{F^n}]_\alpha^{\varepsilon_n} \end{aligned}$$

$$A = B_l + iB_r$$

$$A = B_{\parallel} + iB_{\perp}$$

مربعی

$$A = H_{\parallel} + iH_{\perp}$$

$$A = B_{\text{ا}} + iB_{\text{ب}}$$

مربعی

$$A = H_{\text{ا}} + iH_{\text{ب}}$$

$$H_{\text{ا}} = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad H_{\text{ب}} = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

$$A = B_{\text{ل}} + iB_{\text{ر}}$$

مربعی

$$A = H_{\text{ل}} + iH_{\text{ر}}$$

$$H_{\text{ل}} = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad H_{\text{ر}} = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

$$T = S_{\text{ل}} + iS_{\text{ر}}$$

$$S_{\text{ل}} = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad S_{\text{ر}} = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

$$A = B_{\text{ا}} + iB_{\text{ب}}$$

$$A = H_{\text{ا}} + iH_{\text{ب}}$$

$$H_{\text{ا}} = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad H_{\text{ب}} = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

$$T = S_{\text{ا}} + iS_{\text{ب}}$$

$$S_{\text{ا}} = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad S_{\text{ب}} = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

$$z = u.r \quad |u|=1, r \in \mathbb{R}^+$$

$$T = S_{\text{ا}} + iS_{\text{ب}}$$

$$S_{\text{ا}} = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad S_{\text{ب}} = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

$$z = u.r \quad |u|=1, r \in \mathbb{R}^+$$

قضیه تجزیه قطبی.

$$T = UR$$

U یکانی و R خودالحاق نامنفی

$$T : V \rightarrow V$$

$$T : V \rightarrow V$$
$$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \beta = \{w_1, \dots, w_n\} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ \alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \beta = \{w_1, \dots, w_n\} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n &\geq 0 \\ T(v_i) &= \lambda_i w_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ \alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \beta = \{w_1, \dots, w_n\} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n &\geq 0 \\ T(v_i) &= \lambda_i w_i \\ R : V &\rightarrow V; \quad R(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T : V \rightarrow V \\
 \alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \beta = \{w_1, \dots, w_n\} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \\
 & T(v_i) = \lambda_i w_i \\
 & R : V \rightarrow V; \quad R(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n \\
 & U : V \rightarrow V; \quad U(v_i) = w_i, \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

$$T : V \rightarrow V$$

$$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \beta = \{w_1, \dots, w_n\} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$T(v_i) = \lambda_i w_i$$

$$R : V \rightarrow V; \quad R(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$U : V \rightarrow V; \quad U(v_i) = w_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$UR(v_i) = U(\lambda_i v_i) = \lambda_i U(v_i) = \lambda_i w_i = T(v_i)$$

$$T : V \rightarrow V$$

$$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \beta = \{w_1, \dots, w_n\} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$$

$$T(v_i) = \lambda_i w_i$$

$$R : V \rightarrow V; \quad R(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$U : V \rightarrow V; \quad U(v_i) = w_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$UR(v_i) = U(\lambda_i v_i) = \lambda_i U(v_i) = \lambda_i w_i = T(v_i)$$

$$T = UR \quad \Rightarrow \quad T^* T = R^* U^* UR = R^*$$

هر عملگر نامنفی، دارای جذر نامنفی یکتایی است.

$R : V \rightarrow V$ عملگری نامنفی و $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ مقادیر ویژه متمایز R

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \quad \lambda_i \geq 0, \quad V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$$

$$T = R^*$$

$$T_{V_{\lambda_i}} = \lambda_i^* I_{V_{\lambda_i}}$$

چون $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$ متمایز اند، $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ فضاهای ویژه T متناظر $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$ اند.

