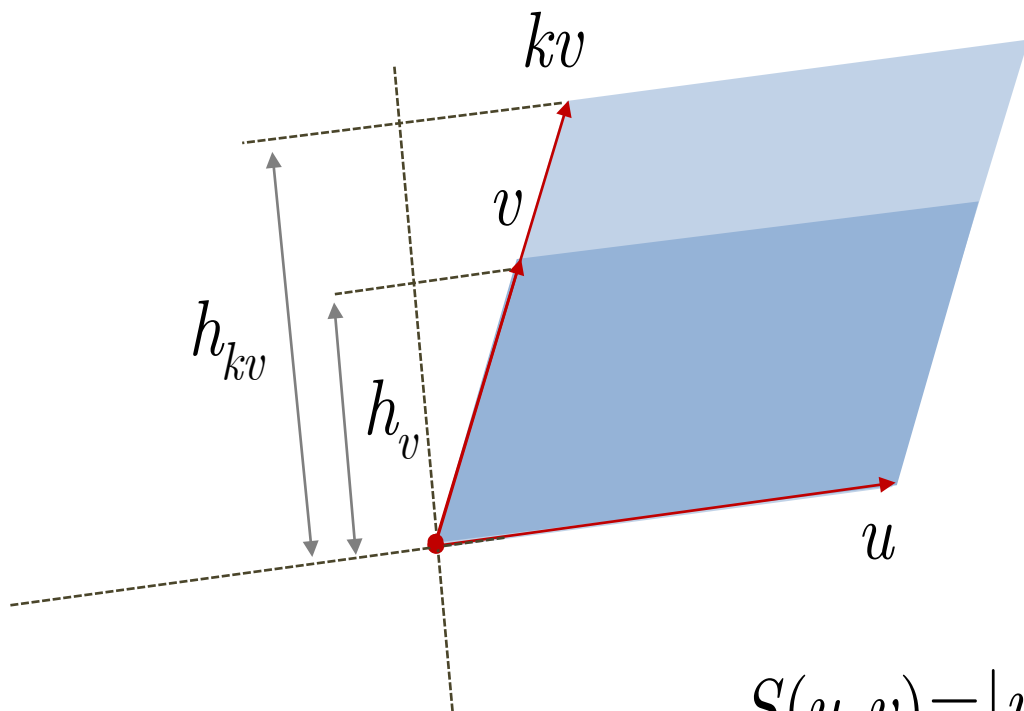


$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & p_1 & & p_r & & p_r \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \circ & \cdots & \circ & \color{red}{\downarrow} & * & \cdots & * & \circ & * & \cdots & * & \circ & * & \cdots \\
 \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \color{red}{\downarrow} & * & \cdots & * & \circ & * & \cdots \\
 \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \color{red}{\downarrow} & * & \cdots \\
 \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}
 \end{array}$$

متغیرهای وابسته

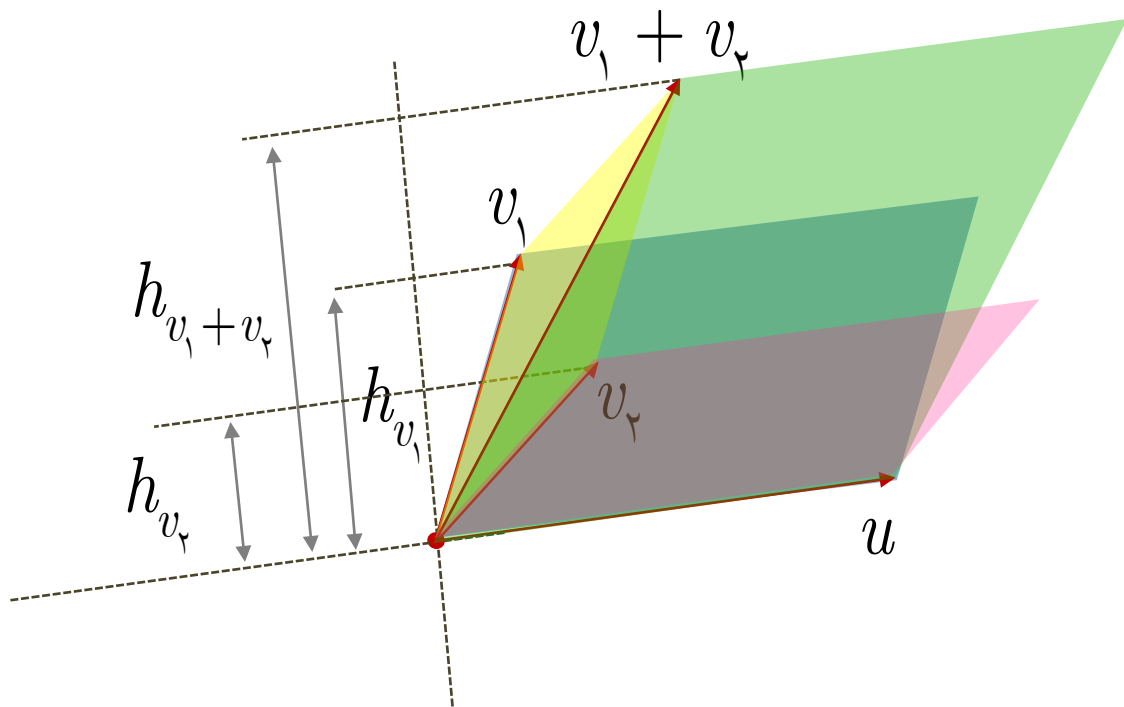
$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{x_{p_1}} + \sum_{j \notin \{p_1, \dots, p_r\}} a'_{1j} \boxed{x_j} = b'_1 & \xrightarrow{\text{متغیرهای آزاد}} & \circ = b'_{r+1} \\
 \vdots & & \vdots \\
 x_{p_r} + \sum_{j \notin \{p_1, \dots, p_r\}} a'_{rj} x_j = b'_r & & \circ = b'_m
 \end{array}$$

حجم و دترمینان



$$S(u, v) = |u| h_v$$

$$\begin{aligned} S(u, kv) &= |u| h_{kv} = |u| kh_v \\ &= kS(u, v) \end{aligned}$$

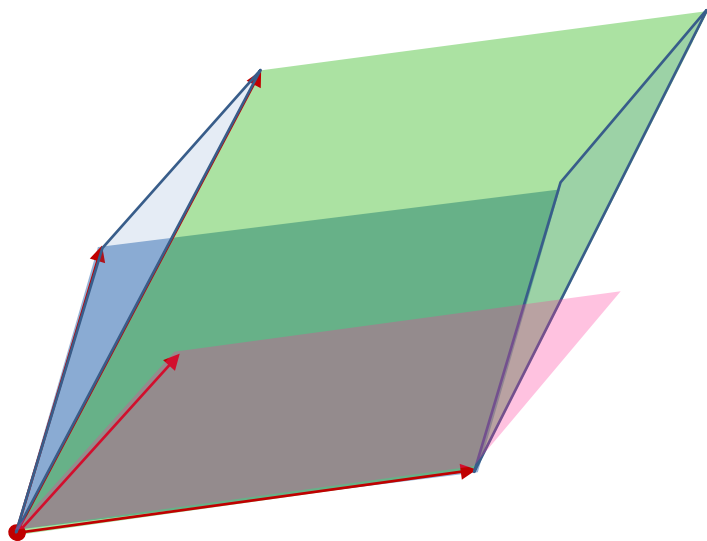


$$S(u, v_l) = |u| h_{v_l}$$

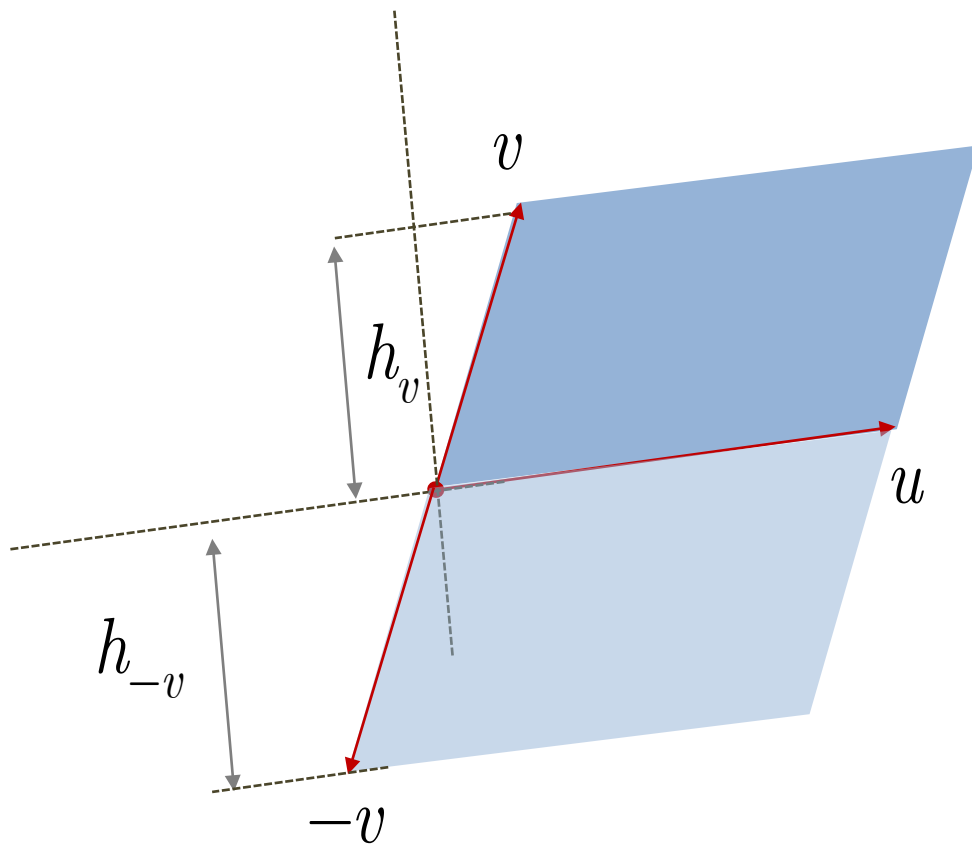
$$S(u, v_r) = |u| h_{v_r}$$

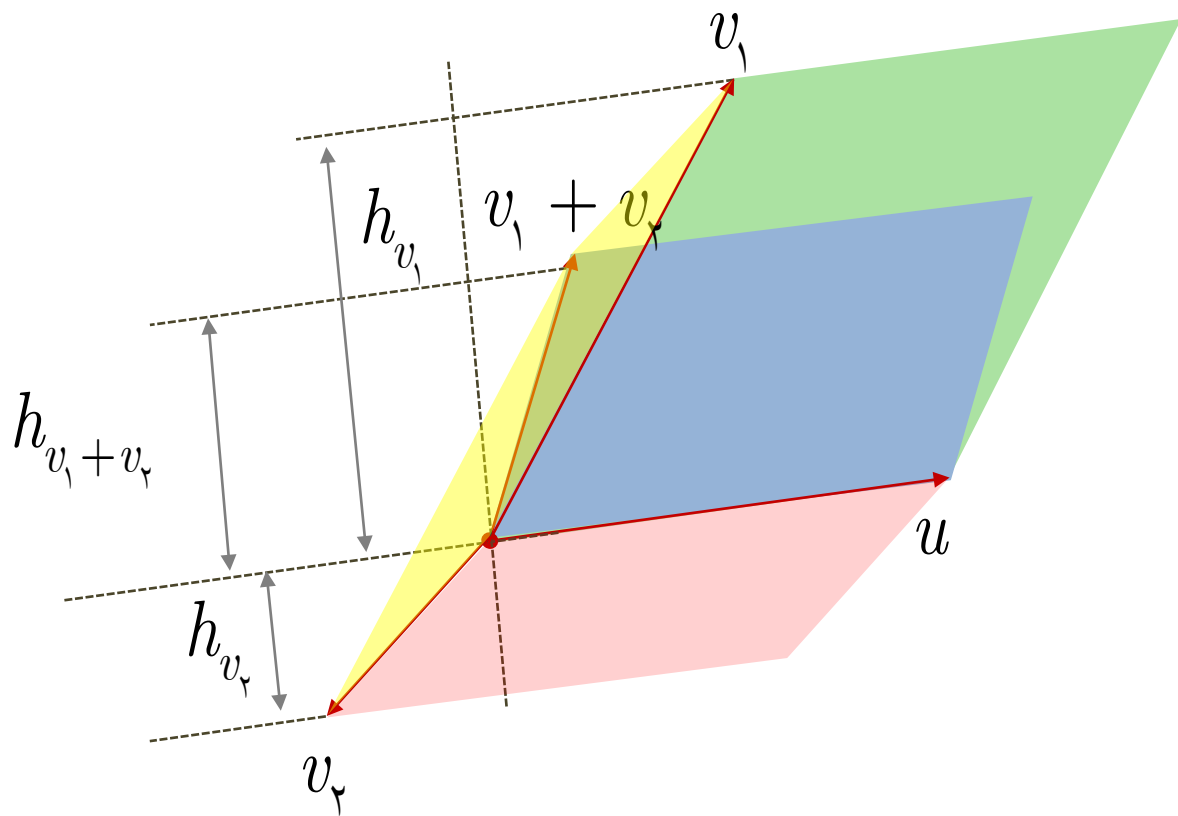
$$h_{v_l + v_r} = h_{v_l} + h_{v_r}$$

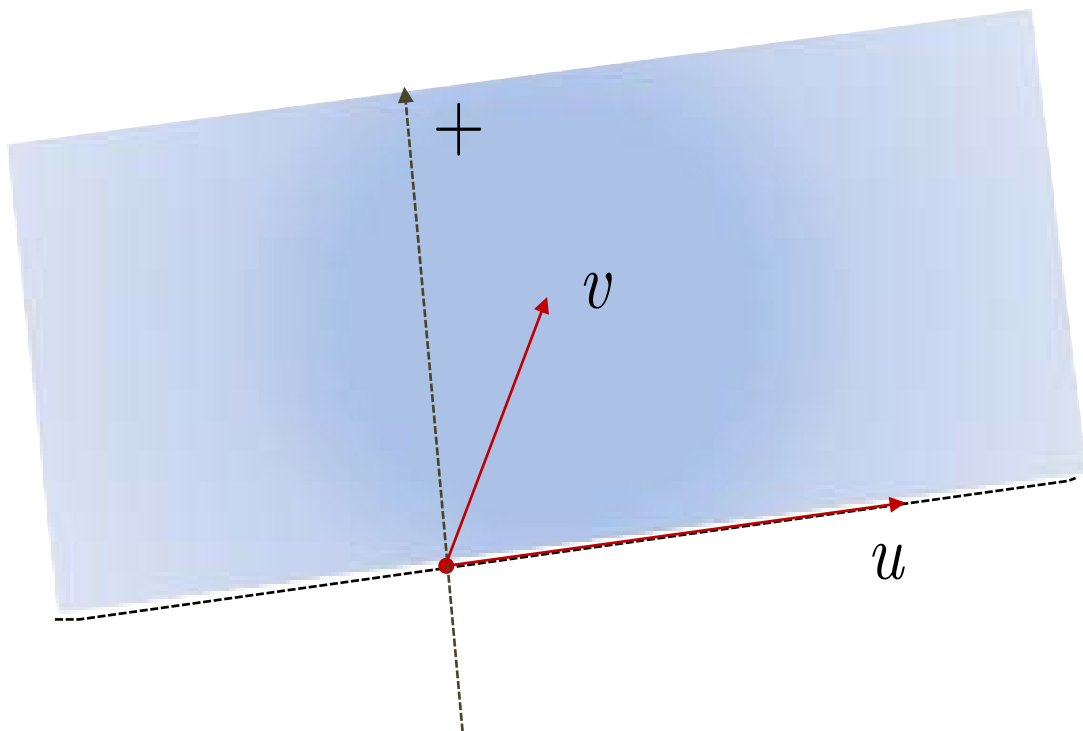
$$S(u, v_l + v_r) = S(u, v_l) + S(u, v_r)$$



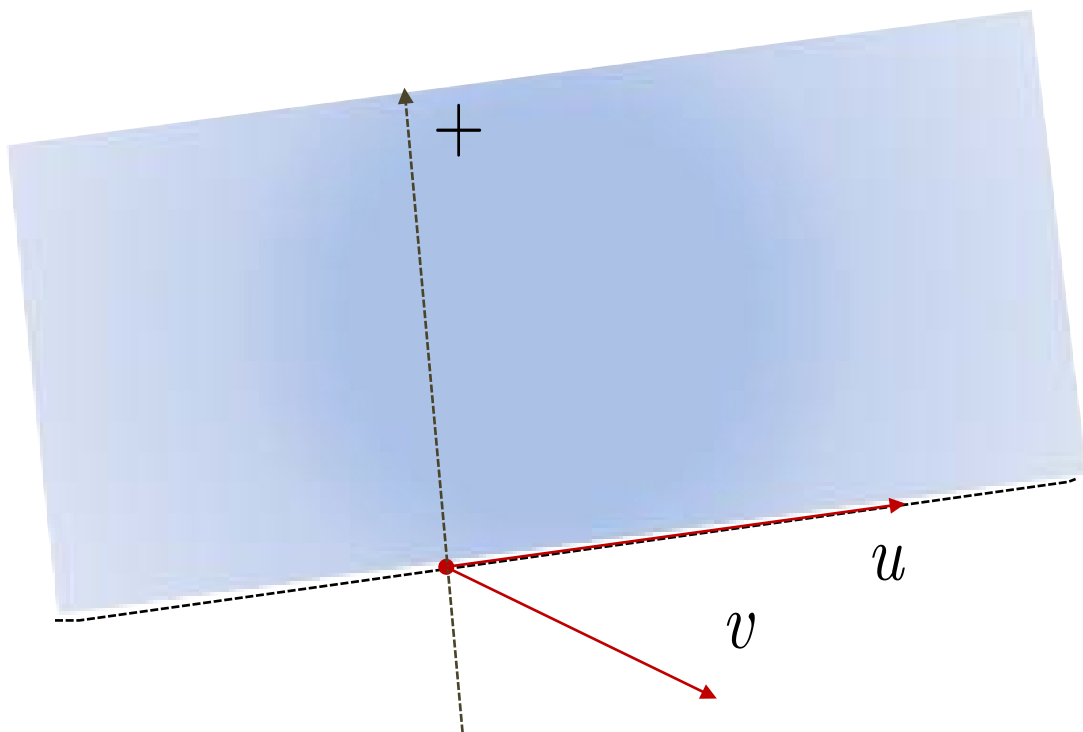
$$S(u, -v) = -S(u, v)$$







مساحت متوازی الاضلاع تولید شده با u و v : $S(u, v)$

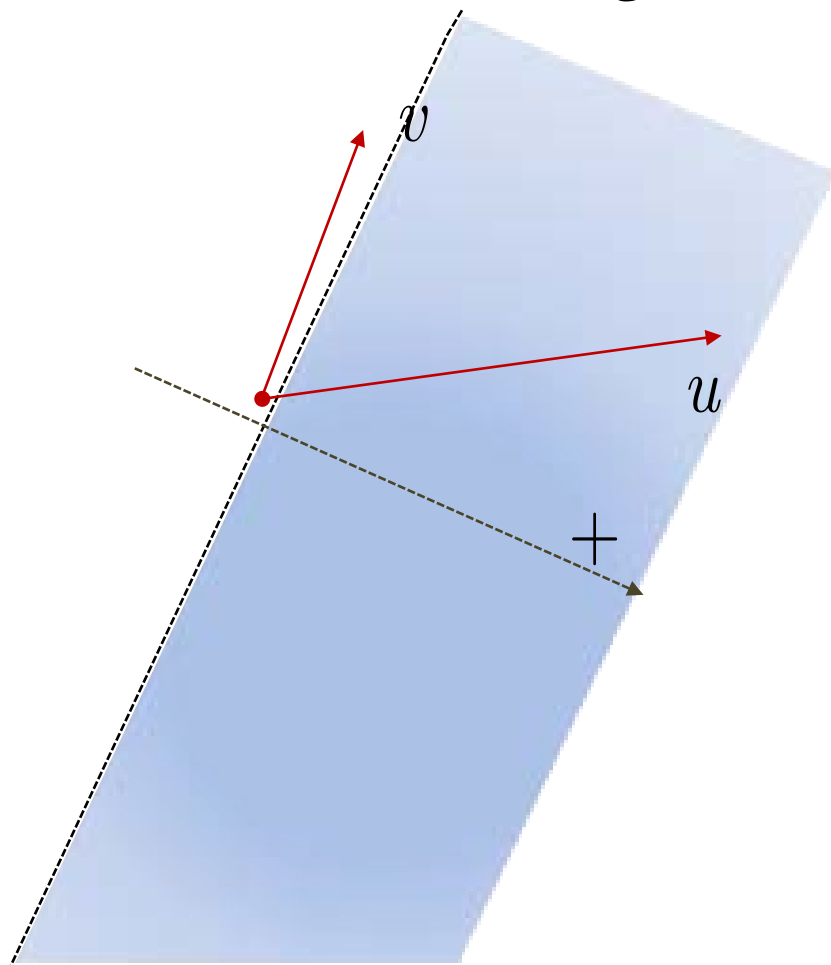


منفی مساحت متوازی الاعضلاع تولید شده با u و v : $S(u, v)$

$$S(u, v) = h_u |v|$$

$S(u, v)$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است.

$$S(u, u) = 0$$



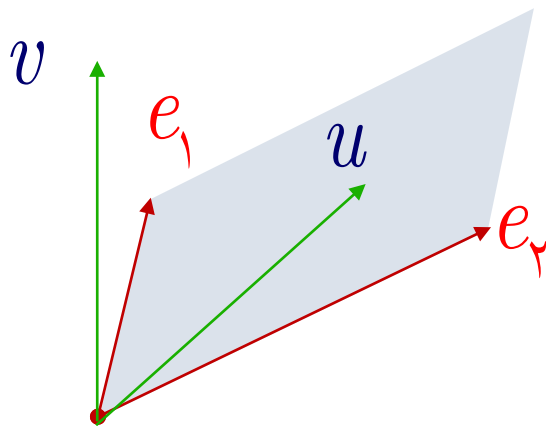
مطالعه توابع $S : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دو ویژگی زیر

$S(u, v)$ نسبت به هر یک از مولفه‌های خود خطی است.

$$S(u, u) = 0$$

$$S(u, v) = -S(v, u)$$

$$\begin{aligned} 0 &= S(u + v, u + v) = S(u, u + v) + S(v, u + v) \\ &= S(u, u) + S(u, v) + S(v, u) + S(v, v) \\ &= S(u, v) + S(v, u) \end{aligned}$$



$\mathbb{R}^2$ یک پایه برای $\{e_1, e_2\}$

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

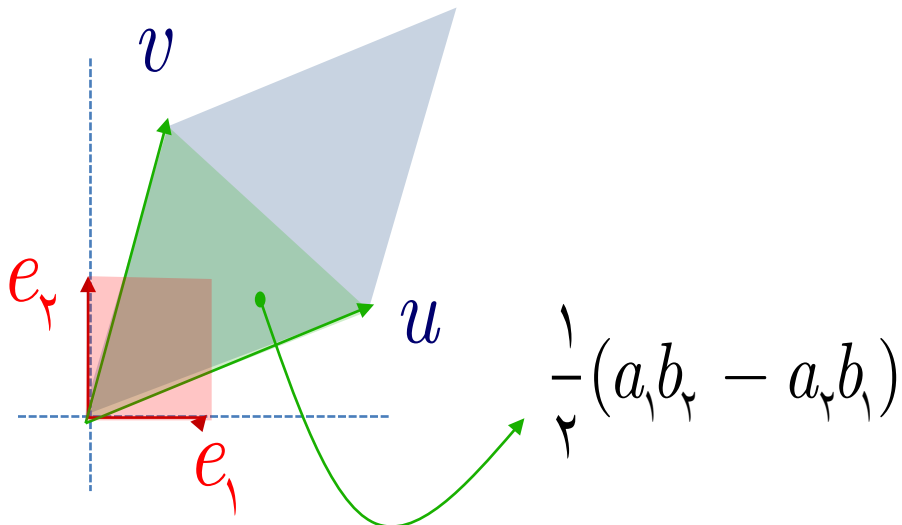
$$v = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

$$S(u, v) = S(a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2)$$

$$= a_1 b_1 S(e_1, e_1) + a_1 b_2 S(e_1, e_2) + a_2 b_1 S(e_2, e_1) + a_2 b_2 S(e_2, e_2)$$

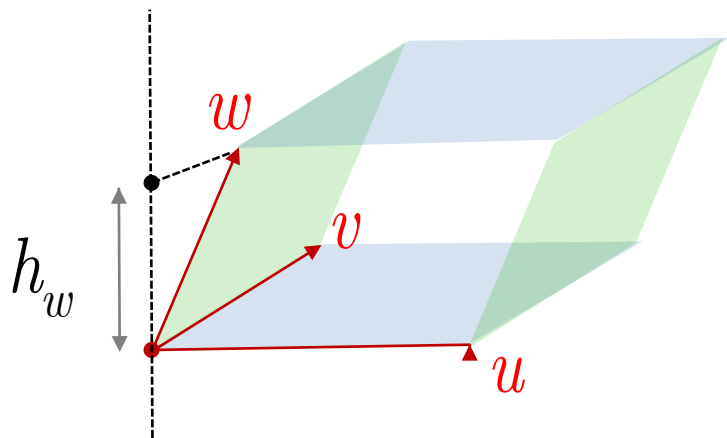
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) S(e_1, e_2)$$

$\mathbb{R}^2$ پایه استاندارد $\{e_1, e_2\}$



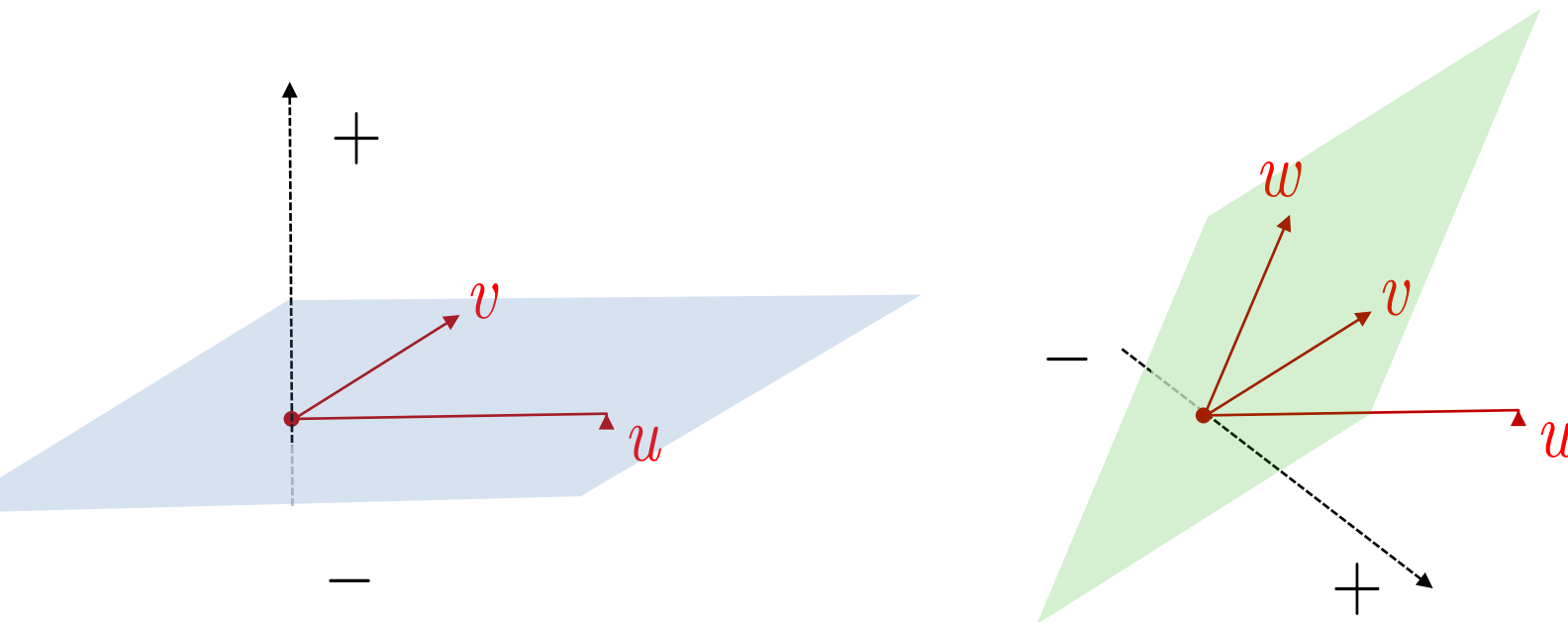
$$u = (a_1, a_2) = a_1e_1 + a_2e_2 \quad v = (b_1, b_2) = b_1e_1 + b_2e_2$$

$$S(u, v) = (a_1b_2 - a_2b_1)$$



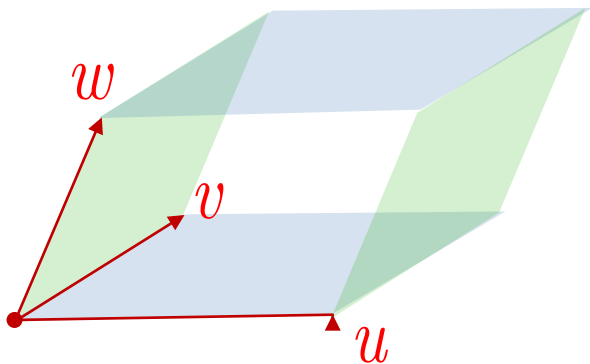
$S(u, v, w) = h_w S_{u,v}$ مساحت متوازی الاضلاع تولید شده با u و v

اگر h_w طول جهت‌دار تصویر w باشد $S(u, v, w)$ نسبت به w خطی است



اگر w در نیم فضای مثبت باشد $S(u, v, w)$ برابر حجم متوازی السطوح است
 اگر w در نیم فضای منفی باشد $S(u, v, w)$ برابر منفی حجم متوازی السطوح است

$S(u, v, w)$ نسبت به هر مولفه خطی است

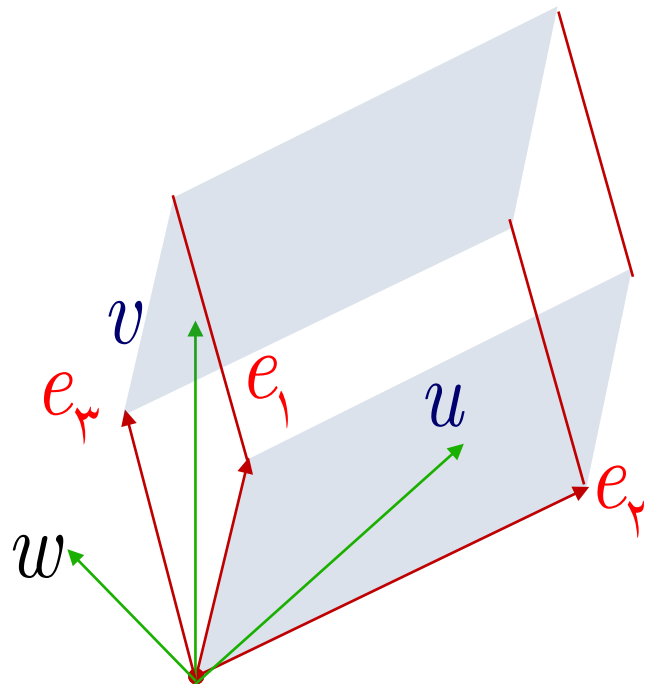


$S(u, v, w)$ نسبت به هر مولفه خطی است

اگر دو تا از بردارهای u و v و w با هم برابر باشند آنگاه $S(u, v, w) = 0$

با جابجایی دو تا از بردارهای u و v و w مقدار $S(u, v, w)$ منفی می‌شود

$$\begin{aligned} 0 &= S(u + v, u + v, w) = S(u, u, w) + S(u, v, w) + S(v, u, w) + S(v, v, w) \\ &= S(u, v, w) + S(v, u, w) \end{aligned}$$



$\mathbb{R}^3$ یک پایه برای $\{e_1, e_2, e_3\}$

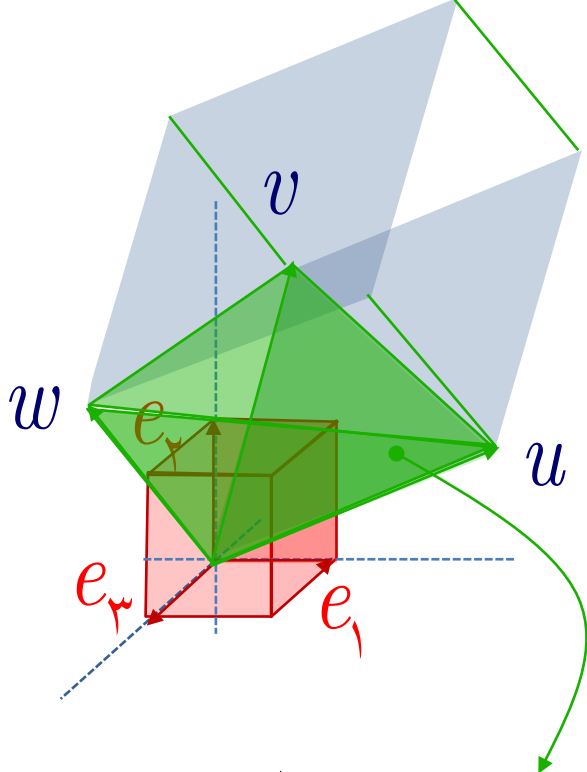
$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$w = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

$$S(u, v, w) = \sum_{i,j,k=1}^3 a_i b_j c_k S(e_i, e_j, e_k)$$

$$\begin{aligned} S(u, v, w) &= a_1 b_2 c_3 S(e_1, e_2, e_3) + a_1 b_3 c_2 S(e_1, e_3, e_2) + a_2 b_1 c_3 S(e_2, e_1, e_3) \\ &\quad + a_2 b_3 c_1 S(e_2, e_3, e_1) + a_3 b_1 c_2 S(e_3, e_1, e_2) + a_3 b_2 c_1 S(e_3, e_2, e_1) \\ &= (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1) S(e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$



$\mathbb{R}^3$ پایه استاندارد $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$S(e_1, e_2, e_3) = 1$$

$$u = (a_1, a_2, a_3)$$

$$v = (b_1, b_2, b_3)$$

$$w = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\frac{1}{6} (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1)$$

$$S(u, v, w)$$

$$= (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1)$$

V یک فضای n بعدی $(\mathbb{R}^n)$

حجم n بعدی در فضای V

$$S : V^n \rightarrow \mathbb{R}$$

S نسبت به هر مولفه خطی است

اگر دو تا از بردارهای $v_1, \dots, v_n$ با هم برابر باشند آنگاه $S(v_1, \dots, v_n) = 0$



با جابجایی دو مولفه مقدار S منفی می شود

$$S(\dots, u, \dots, u, \dots, v) = -S(\dots, v, \dots, u, \dots, u, \dots) + S(\dots, u, \dots, v, \dots, u, \dots)$$

$$\Rightarrow 2S(\dots, u, \dots, u, \dots) = S(\dots, v, \dots, u, \dots, u, \dots) + S(\dots, u, \dots, v, \dots, u, \dots)$$

V یک فضای n بعدی $(\mathbb{R}^n)$

$$S : V^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S(\dots, v_i, \dots, v_j + rv_i, \dots)$$

$$= S(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + rS(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots)$$

S نسبت به هر مولفه خطی است

اگر دو تا از بردارهای $v_1, \dots, v_n$ با هم برابر باشند آنگاه $S(v_1, \dots, v_n) = 0$

با جابجایی دو مولفه مقدار S منفی می شود

با جمع کردن مضربی از یک بردار با بردار دیگر مقدار S تغییر نمی کند

حجم n بعدی در فضای V

$$S : V^n \rightarrow \mathbb{R}$$

با جابجایی دو مولفه مقدار S منفی می شود

با ضرب کردن یکی از بردارها در r مقدار S نیز r برابر می شود

با جمع کردن مضربی از یک بردار با برداری دیگر مقدار S تغییر نمی کند

حجم n بعدی در فضای V

$$S : V^n \rightarrow \mathbb{R}$$

با جابجایی دو مولفه مقدار S منفی می‌شود

با ضرب کردن یکی از بردارها در r مقدار S نیز r برابر می‌شود

با جمع کردن مضربی از یک بردار با برداری دیگر مقدار S تغییر نمی‌کند

اگر $v_1, \dots, v_n$ پایه برای V نباشد آنگاه $S(v_1, \dots, v_n) = 0$

اگر S تابع صفر نباشد آنگاه مقدار آن روی هر پایه V ناصفر است

$$S : V^n \rightarrow \mathbb{R}$$

حجم n بعدی در فضای V

با جابجایی دو مولفه مقدار S منفی می شود

با ضرب کردن یکی از بردارها در r مقدار S نیز r برابر می شود

با جمع کردن مضربی از یک بردار با برداری دیگر مقدار S تغییر نمی کند

آیا همیشه حجم ناصفري روی یک فضای برداری وجود دارد؟

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

$$v_1 = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + \dots + a_1^n e_n \qquad 1 \qquad \sigma(1)$$

$$v_2 = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + \dots + a_2^n e_n \qquad 2 \qquad \sigma(2)$$

⋮

$$v_n = a_n^1 e_1 + a_n^2 e_2 + \dots + a_n^n e_n \qquad n \qquad \sigma(n)$$

$$S(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} S(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \qquad \text{جمله } n^n$$

$$\sigma(i) \neq \sigma(j) \qquad \text{جمله } n!$$

$$\sigma \in S_n \quad S(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \boxed{\pm} S(e_1, \dots, e_n)$$



$$\varepsilon_\sigma$$

$$S(v_{\textcolor{red}{1}}, \dots, v_{\textcolor{red}{n}}) = \sum_{\sigma} a_{\textcolor{red}{1}}^{\sigma(1)} \dots a_{\textcolor{red}{n}}^{\sigma(n)} S(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon_{\sigma}^{\sigma(i) \neq \sigma(j)} a_{\textcolor{red}{1}}^{\sigma(1)} \dots a_{\textcolor{red}{n}}^{\sigma(n)} S(e_1, \dots, e_n)$$

هر دو حجم ناصفر S و S' مضربی از هم اند

$$S(v_{\textcolor{red}{1}}, \dots, v_{\textcolor{red}{n}}) = \left(\sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon_{\sigma} a_{\textcolor{red}{1}}^{\sigma(1)} \dots a_{\textcolor{red}{n}}^{\sigma(n)} \right) S(e_1, \dots, e_n)$$

$$S'(v_{\textcolor{red}{1}}, \dots, v_{\textcolor{red}{n}}) = \left(\sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon_{\sigma} a_{\textcolor{red}{1}}^{\sigma(1)} \dots a_{\textcolor{red}{n}}^{\sigma(n)} \right) S'(e_1, \dots, e_n)$$

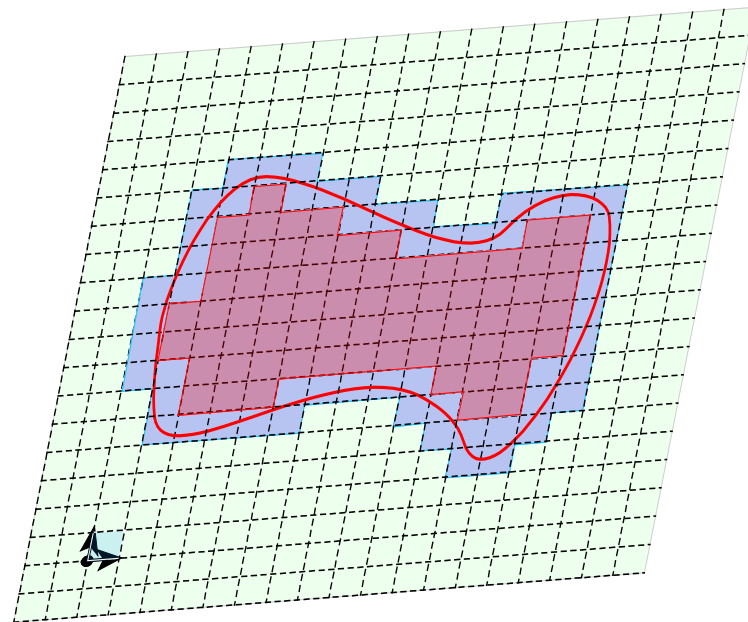
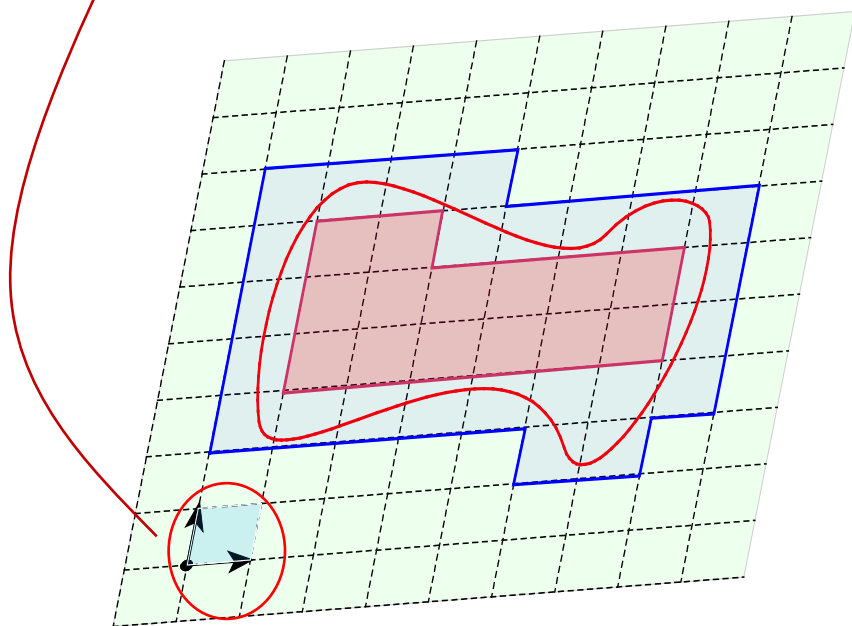
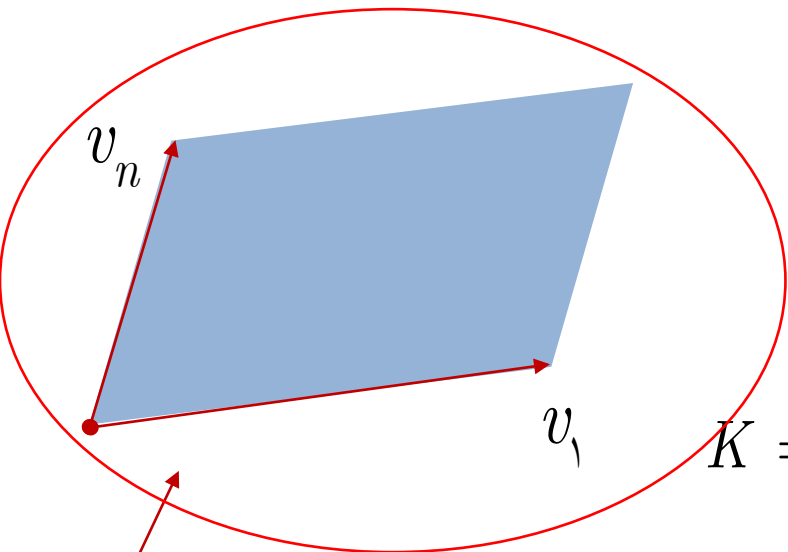
$$S(v_{\textcolor{red}{1}}, \dots, v_{\textcolor{red}{n}}) = \sum_{\sigma} a_{\textcolor{red}{1}}^{\sigma(1)} \dots a_{\textcolor{red}{n}}^{\sigma(n)} S(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S^n} \varepsilon_{\sigma} a_{\textcolor{red}{1}}^{\sigma(1)} \dots a_{\textcolor{red}{n}}^{\sigma(n)} \right) S(e_1, \dots, e_n)$$

V یک فضای برداری n بعدی

$v_1, \dots, v_n$ پایه برای V

$$K = K_{\{v_1, \dots, v_n\}} = \{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n : 0 \leq t_i < 1\}$$



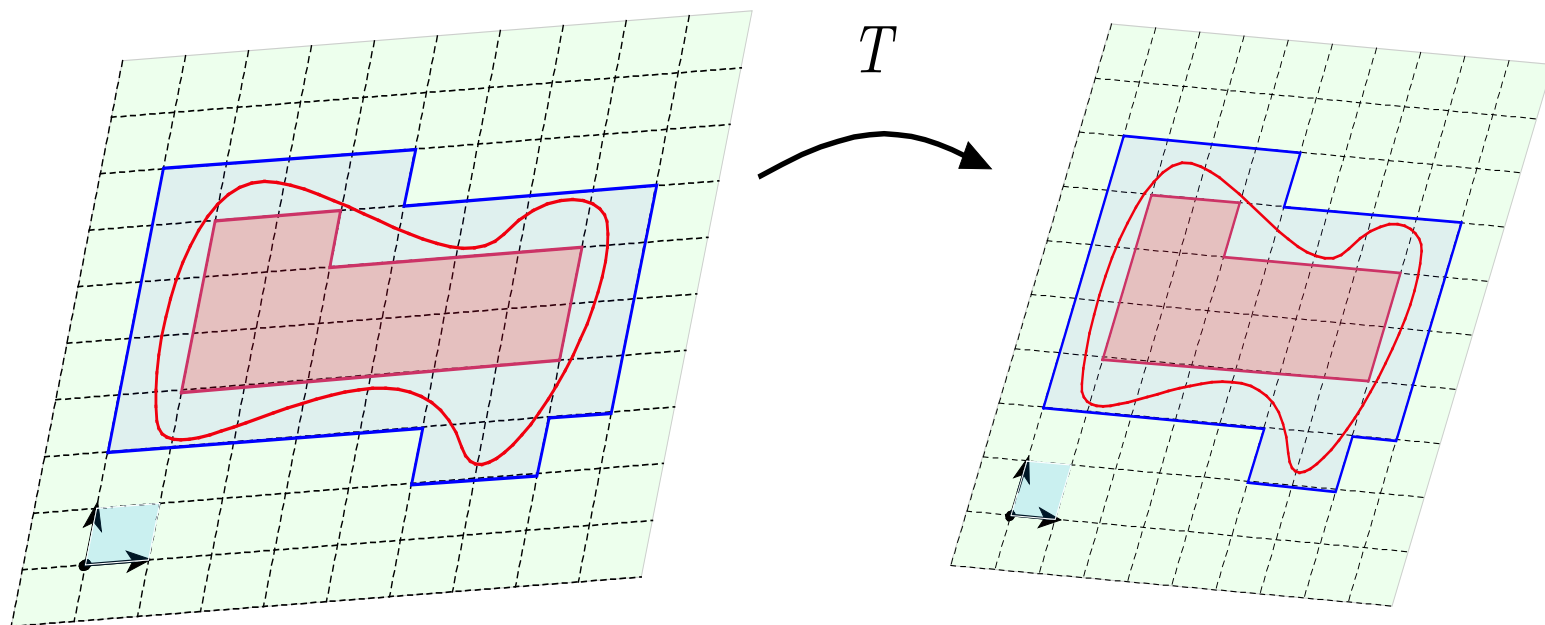
$$T : \{v_1, \dots, v_n\} \rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$$

V یک فضای برداری n بعدی

$$T : K_{\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}} \rightarrow K_{\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}}$$

V پایه برای $v_1, \dots, v_n$

$$\frac{\text{vol}(\tilde{A})}{\text{vol}(A)} = \frac{S(T(v_1), \dots, T(v_n))}{S(v_1, \dots, v_n)} = \det T = \frac{S(T(u_1), \dots, T(u_n))}{S(u_1, \dots, u_n)} \quad T : V \rightarrow V$$



$$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}, \beta = \{u_1, \dots, u_n\}$$

V یک فضای برداری n بعدی

$$T(u_1) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$$

α و β دو پایه برای V

$$T(u_2) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$$

$$\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S(T(\beta))}{S(\beta)}$$

$\vdots$

$$T(u_n) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$$

$$S(\beta) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} \right) S(\alpha)$$

$$S(T(\beta)) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} \right) S(T(\alpha))$$

V یک فضای برداری n بعدی

α یک پایه برای V

S و S' دو حجم ناصفر در V

$$\frac{S(T(\alpha))}{S(\alpha)} = \frac{S'(T(\alpha))}{S'(\alpha)}$$