

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \rightarrow W$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \rightarrow W$$

$$(T + U) : S \rightarrow W; \quad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \rightarrow W$$

$$(T + U) : S \rightarrow W; \quad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \rightarrow W; \quad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \rightarrow W$$

$$(T + U) : S \rightarrow W; \quad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \rightarrow W; \quad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$U, T : S \rightarrow W$$

$$(T + U) : S \rightarrow W; \quad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \rightarrow W; \quad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T + rU)(v + tv') &= T(v + tv') + rU(v + tv') \\ &= T(v) + tT(v') + rT(v) + rT(tv') \\ &= (T + rU)(v) + t(T + rU)(v')\end{aligned}$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$(T + U) : S \rightarrow W; \quad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \rightarrow W; \quad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T + rU)(v + tv') &= T(v + tv') + rU(v + tv') \\ &= T(v) + rT(v') + rU(v) + rU(tv') \\ &= (T + rU)(v) + r(T + U)(v')\end{aligned}$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$(T + U) : S \rightarrow W; \quad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

$$(rT) : S \rightarrow W; \quad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T + rU)(v + tv') &= T(v + tv') + rU(v + tv') \\ &= T(v) + tT(v') + rU(v) + trU(v') \\ &= (T + rU)(v) + t(T + rU)(v')\end{aligned}$$

جمع برداری و ضرب اسکالر

$$(T + U) : S \rightarrow W; \quad (T + U)(s) := T(s) + U(s)$$

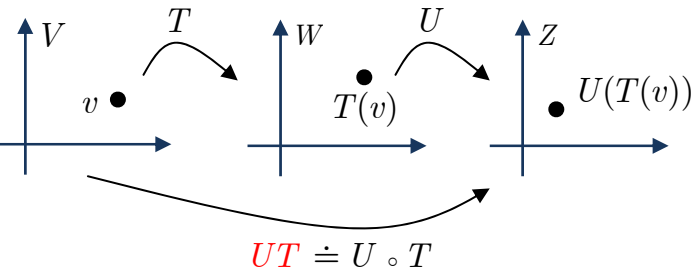
$$(rT) : S \rightarrow W; \quad (rT)(s) := rT(s)$$

جمع دو نگاشت خطی و ضرب یک اسکالر در یک نگاشت خطی همچنان نگاشتی خطی است.

$$\begin{aligned}(T + rU)(v + tv') &= T(v + tv') + rU(v + tv') \\ &= T(v) + tT(v') + rU(v) + trU(v') \\ &= (T + rU)(v) + t(T + rU)(v')\end{aligned}$$

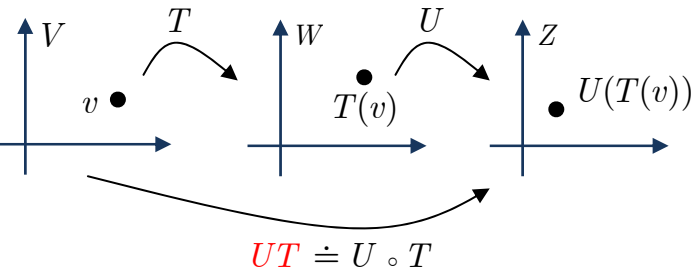
ترکیب نگاشت‌های خطی

ترکیب دو نگاشت خطی نگاشتی خطی است.



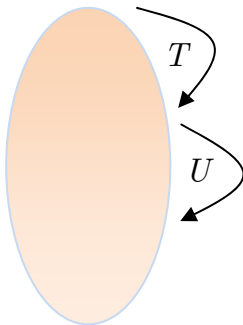
ترکیب نگاشت‌های خطی

ترکیب دو نگاشت خطی نگاشتی خطی است.



$$\begin{aligned} UT(v + tv') &= U(T(v + tv')) \\ &= U(T(v) + tT(v')) \\ &= U(T(v)) + tU(T(v')) \\ &= UT(v) + tUT(v') \end{aligned}$$

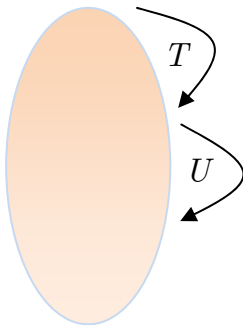
نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)



نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)

روی فضای $L(V, V)$ اعمال زیر وجود دارد

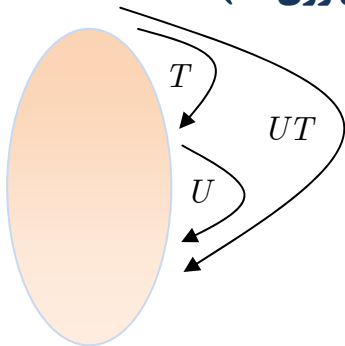
- جمع. $T + U$
- ضرب اسکالر. rT



نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)

روی فضای $L(V, V)$ اعمال زیر وجود دارد

- جمع. $T + U$
- ضرب اسکالر. rT
- ضرب دو نگاشت (یا همان ترکیب آنها) UT

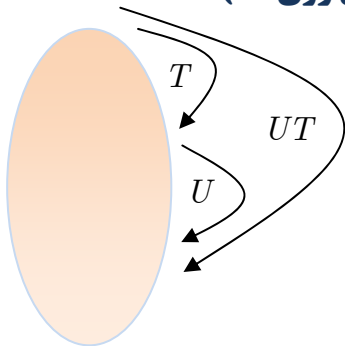


نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)

روی فضای $L(V, V)$ اعمال زیر وجود دارد

- جمع. $T + U$
- ضرب اسکالر. rT
- ضرب دو نگاشت (یا همان ترکیب آنها) UT

$$L(V) \doteq L(V, V)$$



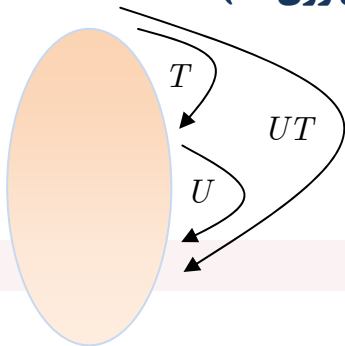
نگاشت‌های خطی از V به V (عملگرهای خطی روی V)

روی فضای $L(V, V)$ اعمال زیر وجود دارد

- جمع. $T + U$
- ضرب اسکالر. rT
- ضرب دو نگاشت (یا همان ترکیب آنها) UT

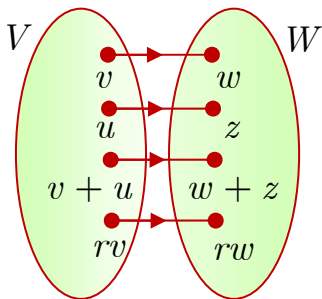
نکته. برای عملگر T داریم

T یک به یک است $\Leftrightarrow T$ پوشا است.



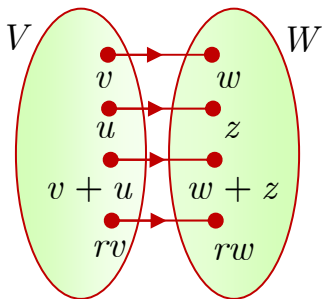
نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر

$$\Leftarrow T : V \rightarrow W$$



نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر

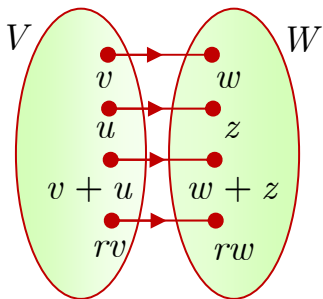
$T : V \rightarrow W$ نگاشت خطی وارون‌پذیر $\Leftrightarrow T^{-1} : W \rightarrow V$ نگاشت خطی



نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر

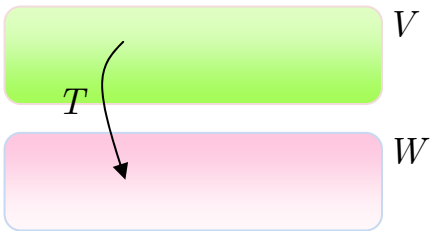
$$T : V \rightarrow W \text{ نگاشت خطی وارون‌پذیر} \iff T^{-1} : W \rightarrow V \text{ نگاشت خطی}$$

در این حالت T را **یکریختی** یا **یکسانی** می‌نامیم و V و W را **یکریخت** یا **یکسان** می‌گوییم



ساختار جبری نگاشت‌های خطی

قضیه. فرض کنید $T : V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی باشد. گزاره‌های زیر معادل اند



۱. T وارون‌پذیر است.

۲. T یک به یک و پوشاست.

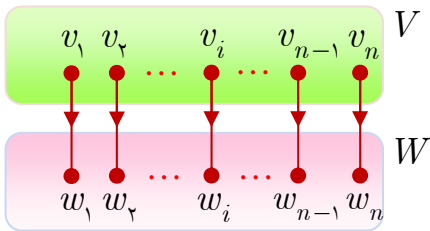
۳.

۴.

۵.

ساختار جبری نگاشت‌های خطی

قضیه. فرض کنید $T : V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی باشد. گزاره‌های زیر معادل اند



۱. T وارون‌پذیر است.

۲. T یک به یک و پوشاست.

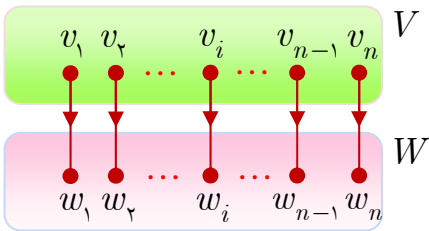
۳. تصویر هر پایه V توسط T یک پایه برای W است.

۴.

۵.

ساختار جبری نگاشت‌های خطی

قضیه. فرض کنید $T : V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی باشد. گزاره‌های زیر معادل اند



۱. T وارون‌پذیر است.

۲. T یک به یک و پوشاست.

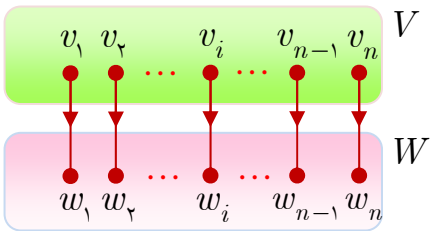
۳. تصویر هر پایه V توسط T یک پایه برای W است.

۴. تصویر پایه‌ای از V توسط T پایه‌ای برای W است.

۵.

ساختار جبری نگاشت‌های خطی

قضیه. فرض کنید $T : V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی باشد. گزاره‌های زیر معادل اند



۱. T وارون‌پذیر است.

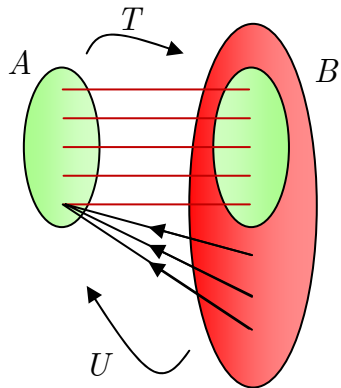
۲. T یک به یک و پوشاست.

۳. تصویر هر پایه V توسط T یک پایه برای W است.

۴. تصویر پایه‌ای از V توسط T پایه‌ای برای W است.

۵. نگاشت‌های خطی $U_1, U_2 : W \rightarrow V$ وجود دارند که $TU_1 = I_W$ و $U_2T = I_V$.

ساختار جبری نگاشت‌های خطی



$$T : A \rightarrow B$$

نگاشت T یک به یک است $\Leftrightarrow T$ وارون چپ دارد

$$U : B \rightarrow A$$

نگاشت U پوشا است $\Leftrightarrow U$ وارون راست دارد

$$UT = I_A$$

یک نگاشت وارون‌پذیر است $\Leftrightarrow$ وارون چپ و راست دارد

خلاصه

دو فضای برداری V و W روی یک میدان یکسان اند $\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$

در این حالت هر یکسانی از متناظر کردن دو پایه V و W بدست می‌آید

ساختار جبری نگاشت‌های خطی

قضیه: $T : V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی و $\dim(V) = \dim(W)$ است. گزاره‌های زیر معادل اند.

۱. T تکریمتی بین V و W است.

۲. T یک به یک است.

۳. T پوشاست.

۴. نگاشت خطی $U : W \rightarrow V$ وجود دارد که $UT = I_V$.

۵. نگاشت خطی $U : W \rightarrow V$ وجود دارد $TU = I_W$.