

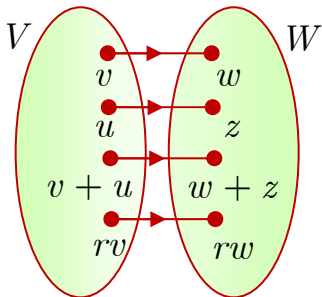
یکسانی دو فضای برداری

$$T : V \rightarrow W$$

- یک به یک و پوشا
- ساختار جبری این دو فضای برداری را حفظ کند

$$T(v + u) = T(v) + T(u)$$

$$T(rv) = rT(v)$$



نگاشت خطی

نگاشتی که ساختار جبری دو فضای برداری را حفظ کند

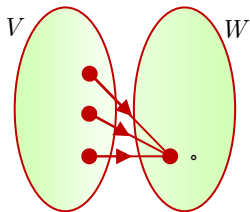
$$T : V \rightarrow W$$

$$T(v + u) = T(v) + T(u)$$

$$T(rv) = rT(v)$$

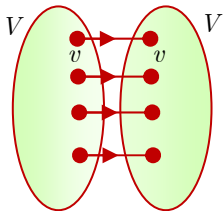
$$T : V \rightarrow W$$

$$T(v + ru) = T(v) + rT(u)$$



نگاشت صفر

$$\circ : V \rightarrow W; \quad \circ(v) = \circ$$



نگاشت همانی

$$I_V : V \rightarrow V; \quad I_V(v) = v$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(\circ) = \circ$$

$$T(-u) = -T(u)$$

$$T(r_1v_1 + \cdots + r_kv_k) = r_1T(v_1) + \cdots + r_kT(v_k)$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(\circ) = \circ$$

$$T(-u) = -T(u)$$

$$T(r_1v_1 + \cdots + r_kv_k) = r_1T(v_1) + \cdots + r_kT(v_k)$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(\circ) = \circ$$

$$T(-u) = -T(u)$$

$$T(r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k) = r_1 T(v_1) + \cdots + r_k T(v_k)$$

ویژگی‌های نگاشت خطی

$$T(0) = 0$$

$$T(-u) = -T(u)$$

$$T(r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k) = r_1 T(v_1) + \cdots + r_k T(v_k)$$

قضیه. فرض کنید $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V و $w_1, \dots, w_n$ اعضای دلخواه از W (نه لزوماً متمایز و یا ناصفر) باشند نگاشت خطی یکتای $T : V \rightarrow W$ وجود دارد که برای هر i داشته باشیم $T(v_i) = w_i$.

اثبات. (یکتایی)

$$T, U : V \rightarrow W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

اثبات. (یکتایی)

$$T, U : V \rightarrow W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \cdots + t_n T(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \\ U(v) &= U(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 U(v_1) + \cdots + t_n U(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \end{aligned}$$

اثبات. (یکتایی)

$$T, U : V \rightarrow W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \cdots + t_n T(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \\ U(v) &= U(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 U(v_1) + \cdots + t_n U(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \end{aligned}$$

اثبات. (یکتایی)

$$T, U : V \rightarrow W; \quad T(v_i) = w_i = U(v_i)$$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 T(v_1) + \cdots + t_n T(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \\ U(v) &= U(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) = t_1 U(v_1) + \cdots + t_n U(v_n) = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \end{aligned}$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \rightarrow W$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \rightarrow W$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \rightarrow W$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

$$T(v + ru) = T((t_1 + rs_1)v_1 + \cdots + (t_n + rs_n)v_n)$$

$$= (t_1 + rs_1)w_1 + \cdots + (t_n + rs_n)w_n$$

$$= (t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n) + r(s_1 w_1 + \cdots + s_n w_n) = T(v) + rT(u)$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \rightarrow W$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

$$T(v + ru) = T((t_1 + rs_1)v_1 + \cdots + (t_n + rs_n)v_n)$$

$$= (t_1 + rs_1)w_1 + \cdots + (t_n + rs_n)w_n$$

$$= (t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n) + r(s_1 w_1 + \cdots + s_n w_n) = T(v) + rT(u)$$

اثبات. (وجود)

هر بردار نمایش یکتا به صورت $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ دارد.

$$T : V \rightarrow W$$

$$T(v) = T(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n) := t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$$

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$$

$$u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n$$

$$T(v + ru) = T((t_1 + rs_1)v_1 + \cdots + (t_n + rs_n)v_n)$$

$$= (t_1 + rs_1)w_1 + \cdots + (t_n + rs_n)w_n$$

$$= (t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n) + r(s_1 w_1 + \cdots + s_n w_n) = T(v) + rT(u)$$

نگاشت‌های خطی یک به یک

$$\begin{aligned}T(u) = T(v) &\Leftrightarrow T(u) - T(v) = 0 \\&\Leftrightarrow T(u - v) = 0.\end{aligned}$$

نگاشت‌های خطی یک به یک

$$\begin{aligned}T(u) = T(v) &\Leftrightarrow T(u) - T(v) = 0 \\&\Leftrightarrow T(u - v) = 0\end{aligned}$$

هسته یا پوچی T

$$\ker T := \{v \in V : T(v) = 0\}$$

هسته T زیر فضایی از V است.

هسته T زیر فضایی از V است.

ناتهی

هسته T زیر فضایی از V است.

ناتهی

برای هر $u, v \in \ker T$ و هر اسکالر $r \in F$ داریم

$$T(u + rv) = T(u) + rT(v) = 0 + r \cdot 0 = 0.$$

هسته T زیر فضایی از V است.

ناتهی

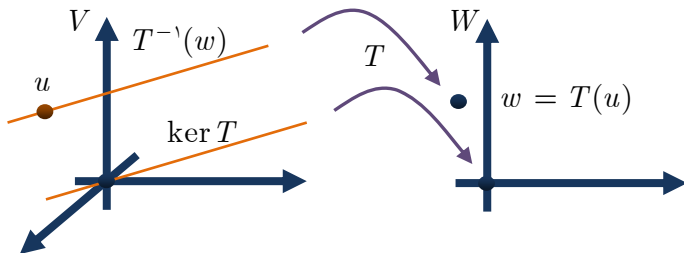
برای هر $u, v \in \ker T$ و هر اسکالر $r \in F$ داریم

$$T(u + rv) = T(u) + rT(v) = 0 + r \cdot 0 = 0.$$

$$\ker T = \{0\} \Leftrightarrow T : V \rightarrow W \text{ یک به یک است}$$

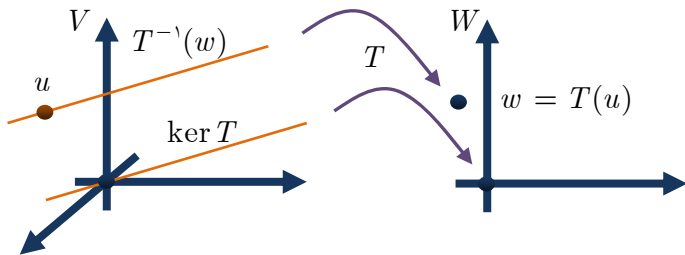
سطوح تراز یک نگاشت خطی

$$T^{-1}(w) := \{v \in V : T(v) = w\} = u + \ker T$$



سطوح تراز یک نگاشت خطی

$$\begin{aligned}
 T(v) = w = T(u) &\Leftrightarrow T(v - u) = 0 \Leftrightarrow v - u \in \ker T \\
 &\Leftrightarrow v \in u + \ker T
 \end{aligned}$$



نگاشت‌های خطی پوشا

تصویر یک نگاشت

$$\operatorname{Im} T := \{T(v) : v \in V\}$$

نگاشت‌های خطی پوشا

تصویر یک نگاشت

$$\operatorname{Im} T := \{T(v) : v \in V\}$$

تصویر نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ یک زیر فضای W است.

نگاشت‌های خطی پوشا

تصویر یک نگاشت

$$\text{Im } T := \{T(v) : v \in V\}$$

تصویر نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ یک زیر فضای W است.

$$T(v_l) = w_l \quad T(v_r) = w_r$$

$$w_l + rw_r = T(v_l) + rT(v_r) = T(v_l + rv_r) \in \text{Im } T$$

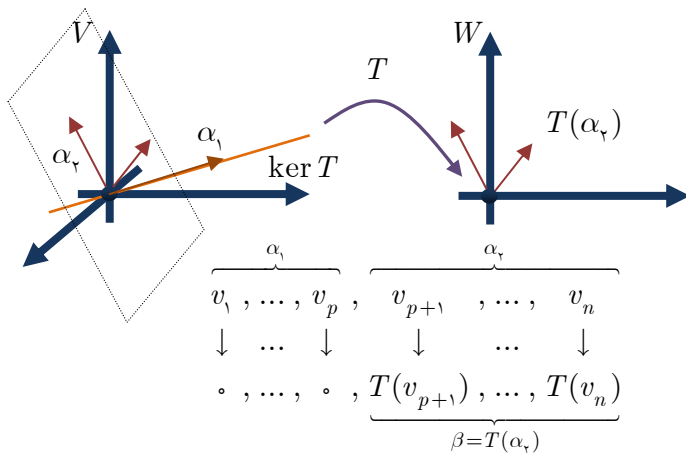
تصویر نگاشت خطی

$$V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \Rightarrow \quad \text{Im } T = \langle T(v_1), \dots, T(v_k) \rangle$$

تصویر نگاشت خطی

$$V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \Rightarrow \quad \text{Im } T = \langle T(v_1), \dots, T(v_k) \rangle$$

$$v = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \quad \Rightarrow \quad T(v) = T(t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) = t_1 T(v_1) + \dots + t_k T(v_k)$$



$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1} & , & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_r} \\
 \downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\
 0, \dots, 0 & , & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_r)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_nT(v_n) = 0 \\
 & = T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n) = 0 \\
 & = a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n \in \ker T
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1} & , & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_r} \\
 \downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\
 0, \dots, 0 & , & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_r)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_nT(v_n) = 0 \\
 \Rightarrow & T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n) = 0 \\
 & = a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n \in \ker T
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1} & , & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_r} \\
 \downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\
 0, \dots, 0 & , & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_r)}
 \end{array}$$

$$a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_nT(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n) = 0$$

$$\Rightarrow a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_nv_n \in \ker T$$

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1} & , & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_r} \\
 \downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\
 0, \dots, 0 & , & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_r)}
 \end{array}$$

$$a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n) = 0$$

$$\Rightarrow a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n \in \ker T$$

$$a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$$

$$\begin{array}{ccc}
 \overbrace{v_1, \dots, v_p}^{\alpha_1} & , & \overbrace{v_{p+1}, \dots, v_n}^{\alpha_2} \\
 \downarrow \quad \dots \quad \downarrow & & \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\
 0, \dots, 0 & , & \underbrace{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)}_{\beta = T(\alpha_2)}
 \end{array}$$

$$a_{p+1}T(v_{p+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow T(a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n) = 0$$

$$\Rightarrow a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n \in \ker T$$

$$a_{p+1}v_{p+1} + \dots + a_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$$

فرض کنید V با بعد متناهی و $T : V \rightarrow W$ نگاشتی خطی است. آنگاه

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V$$

خلاصه

$$\dim(\ker T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker T = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ یک به یک است}$$

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim W \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} T = W \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ پوشا است}$$

اگر $\dim V = \dim W$ آنگاه

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim W \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\ker T) = 0$$

$$T \text{ پوشا است} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ یک به یک است}$$