

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

مفهوم عدد

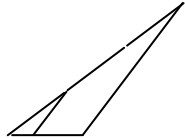
اعداد طبیعی و اعمال جمع و ضرب آنها

اعداد گویا و اعمال جبری روی آنها

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

مفهوم عدد

نمایش هندسی اعداد گویا



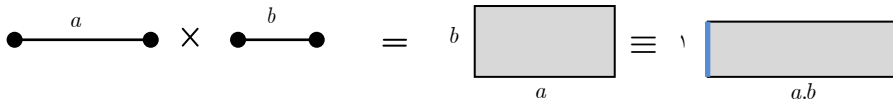
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اعمال جبری روی پاره خطها

جمع پاره خطها

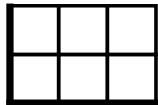

$$\bullet \text{---} \bullet + \bullet \text{---} \bullet = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

ضرب پاره خطها


$$\bullet \xrightarrow{a} \bullet \times \bullet \xrightarrow{b} \bullet = b \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \equiv \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

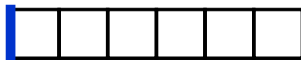
a $a.b$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \times \\ \text{---} \end{array}$$

=



$$\text{---}$$



$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \times \\ \text{---} \end{array}$$

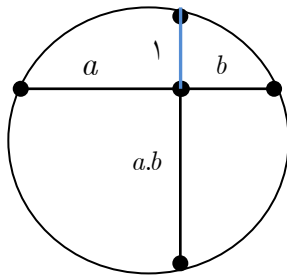
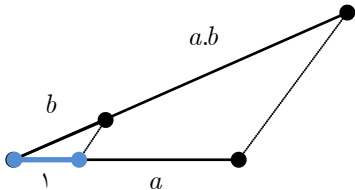
=



$$\text{---}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

روشهای دیگر برای تعریف ضرب دو پاره خط



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

سادگی جمع نسبت به ضرب

برای جمع دو پاره‌خط برخلاف ضرب آنها به پاره‌خط مقیاس نیازی نیست

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

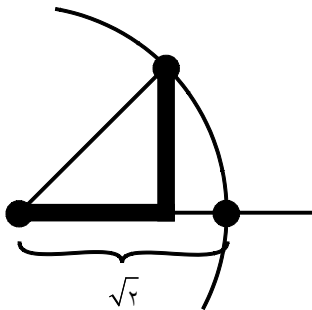
سادگی جمع نسبت به ضرب

برای جمع دو پاره‌خط برخلاف ضرب آنها به پاره‌خط مقیاس نیازی نیست

اعداد غیر گویا

پاره‌خط‌هایی که متناظر اعداد گویا نیستند

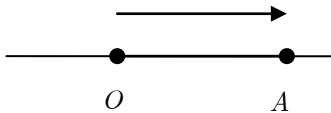
اعمال جبری روی مجموعه جدید به کمک روش هندسی



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اعمال جبری روی نقاط یک خط

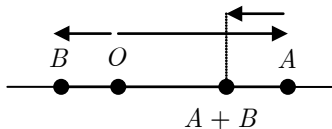
۱. انتخاب مبدأ و اهمیت آن



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اعمال جبری روی نقاط یک خط

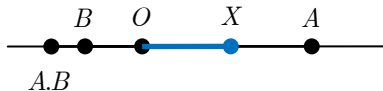
۲. جمع دو نقطه A و B



اعمال جبری روی نقاط یک خط

۳. ضرب دو نقطه A و B

لزوم انتخاب واحد

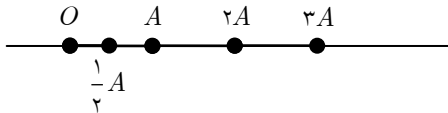


اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اعمال جبری روی نقاط یک خط

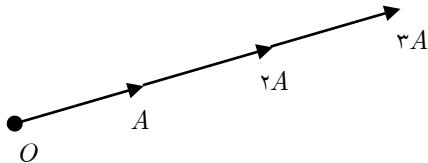
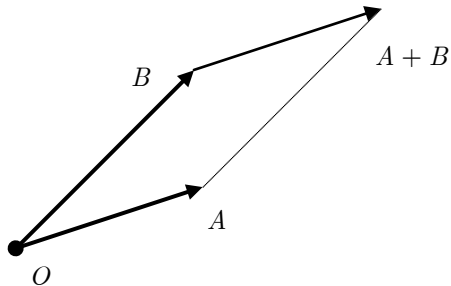
۴. ضرب یک نقطه در یک عدد!

بر خلاف ضرب دو پاره‌خط برای ضرب یک عدد در یک پاره‌خط نیازی به انتخاب واحد نیست



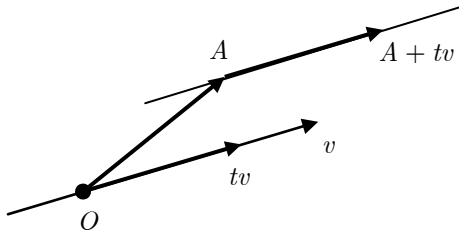
معرفی ساختارهای جبری مشابه برای صفحه و فضا

جمع و ضرب اسکالر.

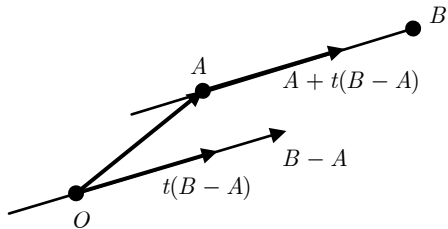


نمایش بعضی اشکال هندسی به کمک ساختار جبری

خط گذرنده از A که با v تولید می‌شود

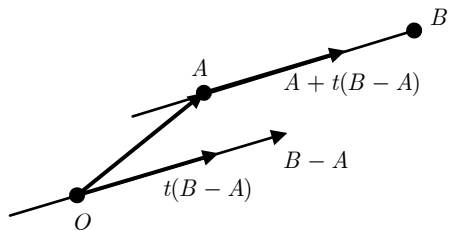


اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$$

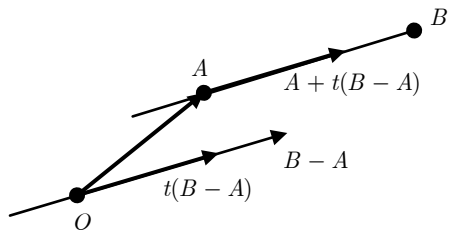
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$$

نقطه‌ای دلخواه از خط AB $P = A + t(B - A)$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

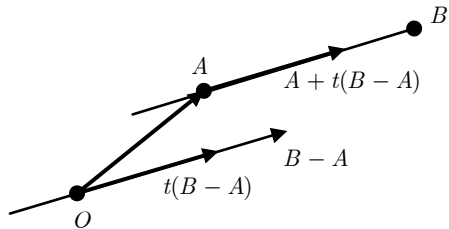


$$A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$$

$P = A + t(B - A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



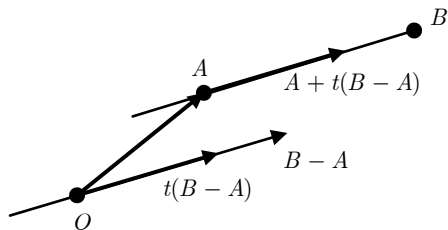
$$A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$$

$P = A + t(B - A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PB} = (1 - t)\overrightarrow{AB}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$$

$P = A + t(B - A)$ نقطه‌ای دلخواه از خط AB

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PB} = (1 - t)\overrightarrow{AB}$$

پاره خط $\overline{AB}$ دقیقاً مجموعه نقاطی به صورت $(1 - t)A + tB$ خواهد بود که در آن $0 \leq t \leq 1$.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

می توان نشان داد که

۱. وسط پاره خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{2}$.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

می توان نشان داد که

۱. وسط پاره خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{2}$.

۲. محل برخورد میانه های مثلث ABC برابر است با $\frac{A+B+C}{3}$.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

می توان نشان داد که

۱. وسط پاره خط $\overline{AB}$ برابر است با $\frac{A+B}{2}$.

۲. محل برخورد میانه های مثلث ABC برابر است با $\frac{A+B+C}{3}$.

ضرایب حقیقی a ، b و c وجود دارند که
 $aA + bB + cC = 0$ و $a + b + c = 0$.

$\Leftrightarrow$

سه نقطه A ، B و C روی یک خط
قرار دارند

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای v_1, v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای v_1, v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A, B و C می‌گذرد

$$\begin{aligned} & \{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB + cC : a + b + c = 1\} \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای v_1, v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A, B و C می‌گذرد

$$\begin{aligned} & \{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB + cC : a + b + c = 1\} \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۴. صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با دو بردار ناصفر و غیر هم راستای v_1, v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

۵. صفحه‌ای که از سه نقطه A ، B و C می‌گذرد

$$\begin{aligned} & \{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB + cC : a + b + c = 1\} \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

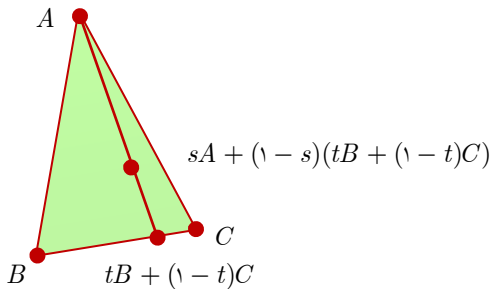
۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

$$\{aA + bB + cC : a + b + c = 1, 0 \leq a, b, c \leq 1\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

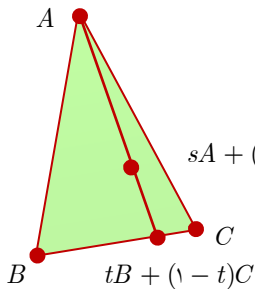
$$\{aA + bB + cC : a + b + c = 1, 0 \leq a, b, c \leq 1\}$$



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

$$\{aA + bB + cC : a + b + c = 1, 0 \leq a, b, c \leq 1\}$$



$$sA + (1-s)(tB + (1-t)C) = sA + (1-s)tB + (1-s)(1-t)C$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۶. مجموعه نقاط درون یا روی مثلث ABC برابر است با

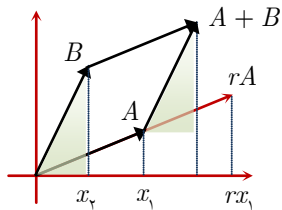
$$\{aA + bB + cC : a + b + c = 1, 0 \leq a, b, c \leq 1\}$$

۷. چهار نقطه A, B, C و D روی یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر ضرایب حقیقی a, b, c و d وجود داشته باشند که $a + b + c + d = 1$ و $aA + bB + cC + dD = 0$.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$\mathbb{R}^n$ و صفحه‌های تعمیم یافته در آن

مختصات دکارتی و جمع و ضرب در این مختصات



$$A + B = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$rA = r(x_1, y_1) = (rx_1, ry_1)$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$A + B := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad rA := (rx_1, \dots, rx_n)$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

بنابراین خط با اعداد حقیقی و صفحه با دوتایی‌های مرتب و فضا با سه‌تایی‌های مرتب از آن اعداد مشخص می‌شوند.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$A + B := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad rA := (rx_1, \dots, rx_n)$$

اعضای $\mathbb{R}^n$ را گاهی نقطه و گاهی بردار می‌نامیم!

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $v = (b_1, \dots, b_n)$

$$\{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a_1 + tb_1, \dots, a_n + tb_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $v = (b_1, \dots, b_n)$

$$\{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a_1 + tb_1, \dots, a_n + tb_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned}\{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\} &= \{(1 - t)A + tB : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB : a + b = 1\}\end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $A = (a_1, \dots, a_n)$ و $v = (b_1, \dots, b_n)$

$$\{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a_1 + tb_1, \dots, a_n + tb_n) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned}\{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\} &= \{(1 - t)A + tB : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB : a + b = 1\}\end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $P = (1 - t)A + tB$ نقطه‌ای روی خط AB باشد آنگاه

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (1 - t)(A - B) = (1 - t)\overrightarrow{AB}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

اگر $P = (1 - t)A + tB$ نقطه‌ای روی خط AB باشد آنگاه

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t(B - A) = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (1 - t)(A - B) = (1 - t)\overrightarrow{AB}$$

$$\{(1 - t)A + tB : 0 \leq t \leq 1\} \quad \overline{AB} \text{ پاره خط}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

صفحه‌ای که از سه نقطه A ، B و C می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned} & \{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB + cC : a + b + c = 1\} \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

صفحه‌ای که از سه نقطه A ، B و C می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned} & \{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB + cC : a + b + c = 1\} \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه‌ای که از نقطه A می‌گذرد و با بردارهای v_1 و v_2 تولید می‌شود

$$\{A + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

صفحه‌ای که از سه نقطه A ، B و C می‌گذرد برابر است با

$$\begin{aligned} & \{A + t_1(B - A) + t_2(C - A) : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 - t_1 - t_2)A + t_1 B + t_2 C : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{aA + bB + cC : a + b + c = 1\} \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$

صفحه تعمیم یافته ای که از نقطه A می گذرد و با بردارهای $v_1, \dots, v_k$ تولید می شود

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_kv_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

تحت جمع برداری و ضرب اسکالر بسته اند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_kv_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

زیرفضا: زیر مجموعه ناتهی $\mathbb{R}^n$ که تحت جمع و ضرب بسته است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌هایی که از مبدأ می‌گذرند

$$\{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

زیرفضا: زیر مجموعه ناتهی $\mathbb{R}^n$ که تحت جمع و ضرب بسته است.

$V \subset \mathbb{R}^n$ زیرفضا است اگر ناتهی باشد و

$$\forall v_1, v_2 \in V, r \in \mathbb{R} \quad : \quad v_1 + r v_2 \in V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.
تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.
تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

$$V \text{ یک زیرفضای } \mathbb{R}^n \text{ و } v_1, \dots, v_k \in V \iff t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.
تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

$$t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \in V \quad \Leftrightarrow \quad v_1, \dots, v_k \in V \text{ و } \mathbb{R}^n \text{ یک زیرفضای } V$$

• ترکیب خطی k بردار $v_1, \dots, v_k$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ که از مبدأ می‌گذرند زیرفضای $\mathbb{R}^n$ اند.
تعریف زیرفضا تعریفی کاملاً جبری است و بیان ساده‌تری نسبت به تعریف صفحه دارد.

$$V \text{ یک زیرفضای } \mathbb{R}^n \text{ و } v_1, \dots, v_k \in V \iff t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in V$$

- ترکیب خطی k بردار $v_1, \dots, v_k$
- قرار داد: ترکیب خطی صفرتا بردار برابر صفر است!

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیر فضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیر فضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیر فضای $\mathbb{R}^n$ ، خود زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیر فضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیر فضای $\mathbb{R}^n$ ، خود زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \Rightarrow v_1, v_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + v_2 \in \bigcap V_\alpha$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیر فضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیر فضای $\mathbb{R}^n$ ، خود زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \Rightarrow v_1, v_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + v_2 \in \bigcap V_\alpha$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیر فضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیر فضای $\mathbb{R}^n$ ، خود زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \Rightarrow v_1, v_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + rv_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + rv_2 \in \bigcap V_\alpha$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ و $\{0\}$ دو زیر فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. (زیر فضاهای بدیهی)
- هر زیر فضای $\mathbb{R}^n$ شامل مبدأ است.
- اشتراک هر تعداد زیر فضای $\mathbb{R}^n$ ، خود زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ است.

$$v_1, v_2 \in \bigcap V_\alpha \Rightarrow v_1, v_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + rv_2 \in V_\alpha \Rightarrow v_1 + rv_2 \in \bigcap V_\alpha$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

• کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S \subset \mathbb{R}^n$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

- $\langle S \rangle = \{ t_1 v_1 + \cdots + t_l v_l \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, v_i \in S \}$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

- $\langle S \rangle = \{ t_1 v_1 + \cdots + t_l v_l \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, v_i \in S \}$

- $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- کوچک‌ترین زیرفضای شامل $S \subset \mathbb{R}^n$

زیرفضای تولید شده توسط مجموعه S : $\langle S \rangle$

- $$\langle S \rangle = \{ t_1 v_1 + \cdots + t_l v_l \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, v_i \in S \}$$

- $$\langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

اگر S نامتناهی باشد یک ترکیب خطی از اعضای S در واقع ترکیبی خطی از متناهی عضو آن است.
توجه. مجموع نامتناهی هیچ معنی‌ای نمی‌دهد.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

• اگر $R \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ آنگاه $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- اگر $R \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ آنگاه $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
- اگر $V \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $\langle V \rangle = V$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$

- اگر $R \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$ آنگاه $\langle R \rangle \subseteq \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
- اگر $V \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه $\langle V \rangle = V$
- اگر V و W دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه مجموعه

$$V + W := \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

نیز یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است و داریم $\langle V \cup W \rangle = V + W$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W &\Rightarrow u = v + w, u' = v' + w' : v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W &\Rightarrow u = v + w, u' = v' + w' : v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow u + u' = (v + w) + (v' + w') = (v + v') + (w + w') \in V + W \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$u, u' \in V + W \Rightarrow u = \boxed{v} + \boxed{w}, u' = \boxed{v'} + \boxed{w'} \quad \text{with } v, v' \in V, w, w' \in W$$

$$\Rightarrow u + u' = (v + v') + (w + w') \in V + W$$



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W &\Rightarrow u = v + w, u' = v' + w' : v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow u + ru' = (v + w) + (v' + w') \in V + W \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W &\Rightarrow u = v + w, u' = v' + w' : v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W &\Rightarrow u = v + w, u' = v' + w' : v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W \end{aligned}$$

• $V + W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ شامل دو زیرفضای V و W است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W &\Rightarrow u = v + w, u' = v' + w' : v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W \end{aligned}$$

• $V + W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ شامل دو زیرفضای V و W است.

• هر زیرفضای شامل V و W باید مجموعه‌هایی به شکل $v + w$ را که $v \in V$ و $w \in W$ است داشته باشد.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

اثبات.

• $V + W$ ناتهی است

$$\begin{aligned} u, u' \in V + W &\Rightarrow u = v + w, u' = v' + w' : v, v' \in V, w, w' \in W \\ &\Rightarrow u + ru' = (v + rv') + (w + rw') \in V + W \end{aligned}$$

• $V + W$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ شامل دو زیرفضای V و W است.

• هر زیرفضای شامل V و W باید مجموعه‌هایی به شکل $v + w$ را که $v \in V$ و $w \in W$ است داشته باشد.

$\Leftarrow V + W$ کوچک‌ترین زیرفضای شامل V و W است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

معیاری برای بزرگی صفحه‌های تعمیم یافته

$$\{ A + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \in \mathbb{R} \}$$

تعداد بردارهای تولید کننده یک صفحه تعمیم یافته به نظر معیار مورد نظر می‌آید.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

چند نکته

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

چند نکته

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.
راه حل. حذف بردار زائد.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

چند نکته

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.
راه حل. حذف بردار زائد.
- ممکن است مجموعه‌های بدون بردار زائد متفاوتی یک صفحه را تولید کنند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

چند نکته

- ممکن است بردارهای زائد وجود داشته باشند.
راه حل. حذف بردار زائد.
- ممکن است مجموعه‌های بدون بردار زائد متفاوتی یک صفحه را تولید کنند.
در ادامه نشان می‌دهیم که تعداد اعضای این نوع مجموعه‌ها برابرند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

مجموعه‌های مولدی که هیچ عضو زائد ندارند و استقلال خطی

بردار v_i در مجموعه $\{v_1, \dots, v_k\}$ زائد است اگر

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \dots = t_k = 0.$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0.$$

اثبات عکس نقیض گزاره بالا

قسمت اول

$$\begin{aligned} v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle &\Rightarrow v_k = t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} \\ &\Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} + (-1) v_k = 0 \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0.$$

اثبات عکس نقیض گزاره بالا

قسمت اول

$$\begin{aligned} v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle &\Rightarrow v_k = t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} \\ &= (t_1 + \dots + t_{k-1}) v_1 + (-1) v_k = 0 \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0.$$

اثبات عکس نقیض گزاره بالا

قسمت اول

$$\begin{aligned} v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle &\Rightarrow v_k = t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} \\ &\Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} + (-1) v_k = 0. \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0$$

قسمت دوم

$$\begin{aligned} t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0, t_k \neq 0 &\Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} = -t_k v_k \\ &\Rightarrow v_k = \frac{-t_1}{t_k} v_1 + \dots + \frac{-t_{k-1}}{t_k} v_{k-1} \Rightarrow v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0$$

قسمت دوم

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0, t_k \neq 0 \Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} = -t_k v_k$$

$$\Rightarrow v_k = \frac{-t_1}{t_k} v_1 + \dots + \frac{-t_{k-1}}{t_k} v_{k-1} \Rightarrow v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0$$

قسمت دوم

$$\begin{aligned} t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0, t_k \neq 0 &\Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} = -t_k v_k \\ \Rightarrow v_k &= \frac{-t_1}{t_k} v_1 + \dots + \frac{-t_{k-1}}{t_k} v_{k-1} \Rightarrow v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هیچ یک از بردارهای $v_1, \dots, v_k$ زائد نیستند اگر و تنها اگر

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0$$

قسمت دوم

$$\begin{aligned} t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0, t_k \neq 0 &\Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} = -t_k v_k \\ \Rightarrow v_k &= \frac{-t_1}{t_k} v_1 + \dots + \frac{-t_{k-1}}{t_k} v_{k-1} \Rightarrow v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

مجموعه مستقل خطی

$$t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \cdots = t_k = 0$$

مجموعه‌ای که عضو زائد ندارد

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

مجموعه مستقل خطی

$$t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k = 0 \Rightarrow t_1 = \cdots = t_k = 0$$

مجموعه‌ای که عضو زائد ندارد

مجموعه وابسته خطی

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی های مجموعه های مستقل خطی

۱. $\emptyset$ مستقل خطی است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

۱. $\emptyset$ مستقل خطی است.

۲. $\{v\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow v \neq 0$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

۱. $\emptyset$ مستقل خطی است.

۲. $\{v\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow v \neq 0$

۳. $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ هیچ کدام مضرب دیگری نیستند

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

ویژگی‌های مجموعه‌های مستقل خطی

۱. $\emptyset$ مستقل خطی است.

۲. $\{v\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow v \neq 0$

۳. $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی است $\Leftrightarrow$ هیچ کدام مضرب دیگری نیستند

۴. هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی خود مجموعه‌ای مستقل خطی است.

(در نتیجه هر مجموعه شامل یک مجموعه وابسته خطی، وابسته خطی است.)

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$

$$v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است}$$

اثبات.

$$v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle \Leftarrow \{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است} \Leftrightarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

اثبات.

$$\begin{aligned} \{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی} &\Leftarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle \\ &\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ وابسته خطی} \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است} \Leftrightarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

اثبات.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی} \Leftarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ وابسته خطی} \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k+1} v_{k+1} = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است} \Leftrightarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

اثبات.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی} \Leftarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ وابسته خطی} \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k+1} v_{k+1} = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

$$t_{k+1} = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است} \Leftrightarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

اثبات.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی} \Leftarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ وابسته خطی} \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k+1} v_{k+1} = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

$$t_{k+1} = 0 \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_k v_k + 0 = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است} \Leftrightarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

اثبات.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی} \Leftarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ وابسته خطی} \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k+1} v_{k+1} = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

$$t_{k+1} = 0 \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_k v_k + 0 = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

$$\{v_1, \dots, v_k\} \text{ وابسته خطی} \Leftarrow$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

۵. $\{v_1, \dots, v_k\}$ مستقل خطی و $v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی است} \Leftrightarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

اثبات.

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ مستقل خطی} \Leftarrow v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

$$\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \text{ وابسته خطی} \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_{k+1} v_{k+1} = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

$$t_{k+1} = 0 \Leftarrow t_1 v_1 + \dots + t_k v_k + 0 = 0 \text{ و همه } t_i \text{ ها صفر نیستند}$$

$$\Leftarrow \{v_1, \dots, v_k\} \text{ وابسته خطی}$$

$$v_{k+1} = \frac{-t_1}{t_{k+1}} v_1 + \dots + \frac{-t_k}{t_{k+1}} v_k \Rightarrow v_{k+1} \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

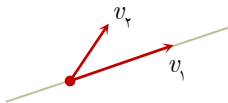
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

روش عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی

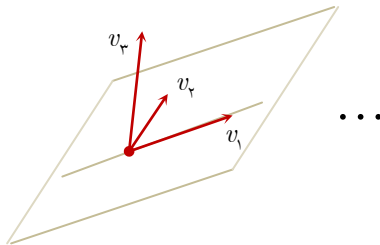
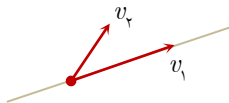


اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

روش عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی



روش عملی برای ساختن مجموعه‌های مستقل خطی



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

پایه و بُعد

$\{v_1, \dots, v_k\}$ را یک پایه برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

پایه و بُعد

$\{v_1, \dots, v_k\}$ را یک پایه برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مثال. $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

پایه و بُعد

$\{v_1, \dots, v_k\}$ را یک پایه برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مثال. $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

$$t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad (t_1, \dots, t_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \dots = t_n = 0.$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

پایه و بُعد

$\{v_1, \dots, v_k\}$ را یک پایه برای زیرفضای V گوییم هرگاه مستقل خطی باشد و V را تولید کند.

مثال. $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

$$t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = 0 \quad \Rightarrow \quad (t_1, \dots, t_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \dots = t_n = 0.$$

$$v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad : \quad v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

فرض کنید $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ و $\{w_1, \dots, w_l\} \subset V$ مستقل خطی است.

۱. $l \leq k$.

۲. $\{v_1, \dots, v_k\}$ را می توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه V تقلیل داد.

۳. $\{w_1, \dots, w_l\}$ را می توان با اضافه کردن بردارهایی به یک پایه V گسترش داد.

۴. V دارای پایه است و هر دو پایه برای V دارای تعداد اعضای برابر هستند.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \dots, w_l\}$$

$$\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\begin{aligned} & \{w_1, \dots, w_l\} \\ & \quad \searrow \\ & \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \\ & \langle w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V \end{aligned}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{\overset{\circ}{w}, \dots, w_l\}$$

$$\{v_1, \dots, \overset{\circ}{v_i}, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\{w_1, \dots, w_l\}$$

$$\{w_1, v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{\overset{\circ}{w}, \dots, w_l\}$$

$$\{v_1, \dots, \overset{\circ}{v_i}, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\{\overset{\circ}{w_r}, \dots, w_l\}$$

$$\{w_1, v_1, \dots, \overset{\circ}{v_i}, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, w_r, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\begin{array}{c} \{w, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array}$$

$$\langle w, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\begin{array}{c} \{w, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{w_1, v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array} \quad \dots$$

$$\langle w, w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\begin{array}{c} \{w_1, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array}$$

$$\langle w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\begin{array}{c} \{w_1, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{w_1, v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array} \quad \dots$$

$$\langle w_1, w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\{w_{i+1}, \dots, w_l\}$$

$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\begin{array}{c} \{w_1, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array}$$

$$\langle w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\begin{array}{c} \{w_1, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{w_1, v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array} \quad \dots$$

$$\langle w_1, w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\begin{array}{c} \{w_{i+1}, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\} \end{array}$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\begin{array}{c} \{w_1, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array}$$

$$\langle w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\begin{array}{c} \{w_1, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{w_1, v_1, \dots, v_i, \dots, v_k\} \end{array} \quad \dots$$

$$\langle w_1, w_1, v_1, \dots, v_k \rangle = V$$

$$\begin{array}{c} \{w_{i+1}, \dots, w_l\} \\ \searrow \\ \{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\} \end{array} \quad \dots$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1}, \dots, w_l\}$$

?

$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1}, \dots, w_l\}$$



$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1}, \dots, w_l\}$$


$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \dots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_{i+1}, \dots, w_l\}$$


$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = V$$

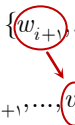
$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \dots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1}, \dots, t_k$ صفر نیست

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, \dots, w_l\}$$

$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$


$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

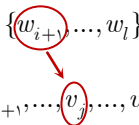
$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \dots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1}, \dots, t_k$ صفر نیست

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \dots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \dots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k\}$$



$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \dots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1}, \dots, t_k$ صفر نیست

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \dots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \dots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

$$v_{i+1} \in \langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, \dots, w_l\}$$

$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$


$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \dots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1}, \dots, t_k$ صفر نیست

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \dots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \dots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

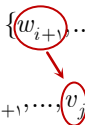
$$v_{i+1} \in \langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle$$

$$= \langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\{w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, \dots, w_l\}$$

$$\{w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k\}$$


$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle = V$$

$$w_{i+1} \in V = \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_k \rangle$$

$$w_{i+1} = t_1 w_1 + \dots + t_i w_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

یکی از ضرایب $t_{i+1}, \dots, t_k$ صفر نیست

$$v_{i+1} = \frac{-t_1}{t_{i+1}} w_1 + \dots + \frac{-t_i}{t_{i+1}} w_i + \frac{1}{t_{i+1}} w_{i+1} + \frac{-t_{i+2}}{t_{i+1}} v_{i+2} + \dots + \frac{-t_k}{t_{i+1}} v_k$$

$$v_{i+1} \in \langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle$$

$$\langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle$$

$$= \langle w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k \rangle = V$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

فرض کنید $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ و $\{w_1, \dots, w_l\} \subset V$ مستقل خطی است.

۱. $l \leq k$.

۲. $\{v_1, \dots, v_k\}$ را می‌توان با حذف بعضی از اعضایش به یک پایه V تقلیل داد.

۳. $\{w_1, \dots, w_l\}$ را می‌توان با اضافه کردن بردارهایی به یک پایه V گسترش داد.

۴. V دارای پایه است و هر دو پایه برای V دارای تعداد اعضای برابر هستند.

در مورد صفحه‌هایی است که از مبدأ می‌گذرند

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی تواند داشته باشد

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی تواند داشته باشد

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی تواند داشته باشد

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ یک صفحه تعمیم یافته است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ بیشتر از n عضو نمی تواند داشته باشد

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ دارای پایه ای است که تعداد اعضایش از n بیشتر نیست.

هر زیرفضای $\mathbb{R}^n$ یک صفحه تعمیم یافته است.

$$\dim(V) \text{ بُعد زیرفضای } V \subseteq \mathbb{R}^n$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

هر مجموعه مولد k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

هر مجموعه مستقل خطی k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

هر مجموعه مولد k عضوی در یک زیرفضای k بعدی یک پایه برای آن است.

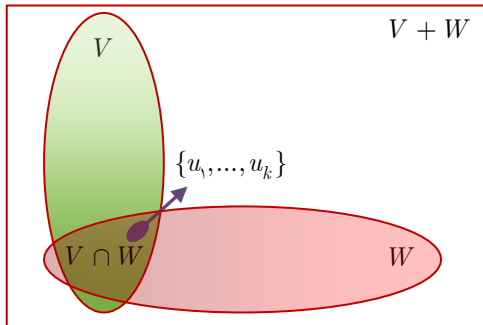
اگر $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه $\dim(V) \leq \dim(W)$ و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $V = W$ باشد.

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

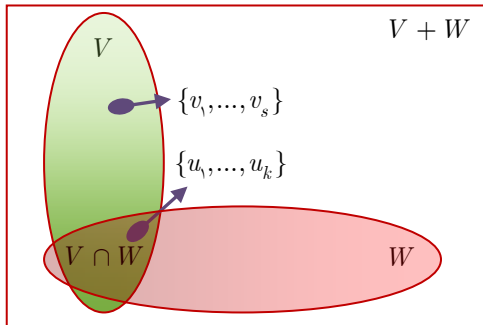
قضیه. فرض کنید $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ دو زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت

$$\dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim V + \dim W.$$

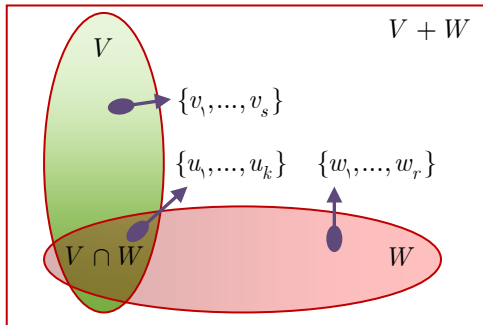
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



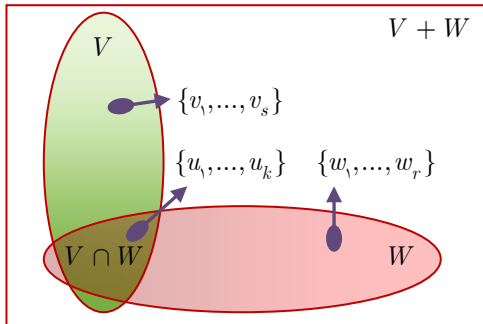
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

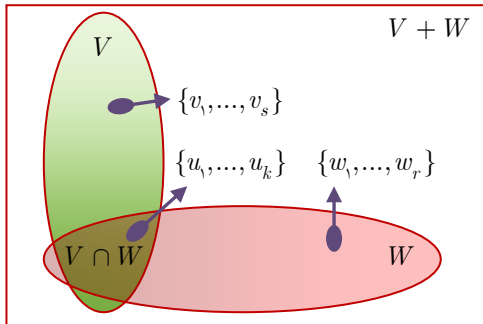


اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$x \in V + W$$

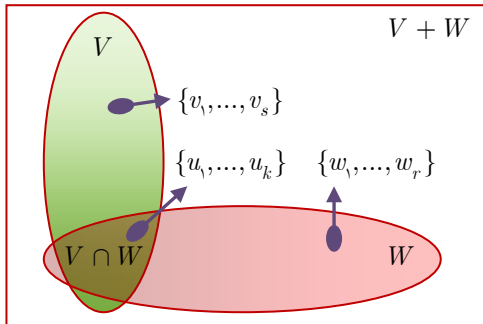
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$x \in V + W \Rightarrow$$

$$x = v + w, \quad v \in V, w \in W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



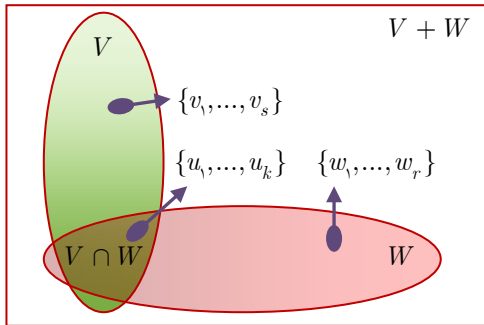
$$x \in V + W \Rightarrow$$

$$x = v + w, \quad v \in V, w \in W$$

$$v = \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^k a_i^* u_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$x \in V + W \Rightarrow$$

$$x = v + w, \quad v \in V, w \in W$$

$$v = \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^k a_i^* u_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i$$

$$x = v + w = \sum_{i=1}^k (a_i + a_i^*) u_i + \sum_{i=1}^r b_i w_i + \sum_{i=1}^s c_i v_i$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i = -\sum_{i=1}^r c_i w_i$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i = - \sum_{i=1}^r c_i w_i$$

V

W

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i}_V = \underbrace{-\sum_{i=1}^r c_i w_i}_W \quad V \cap W$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i}_V = \underbrace{-\sum_{i=1}^r c_i w_i}_W \quad V \cap W$$

$$-\sum_{i=1}^r c_i w_i = \sum_{i=1}^k d_i u_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^k d_i u_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i}_V = \underbrace{-\sum_{i=1}^r c_i w_i}_W \quad V \cap W$$

$$-\sum_{i=1}^r c_i w_i = \sum_{i=1}^k d_i u_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^k d_i u_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i}_V = \underbrace{-\sum_{i=1}^r c_i w_i}_W \quad V \cap W$$

$$-\sum_{i=1}^r c_i w_i = \sum_{i=1}^k d_i u_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^k d_i u_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

$$d_1 = \dots = d_k = c_1 = \dots = c_r = 0.$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i}_V = \underbrace{\quad}_W \quad V \cap W$$

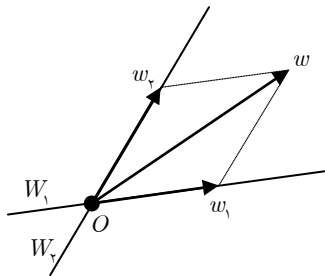
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i + \sum_{i=1}^r c_i w_i = \circ$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^s b_i v_i}_V = \underbrace{\quad}_W \quad V \cap W$$

$$a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_s = \circ$$

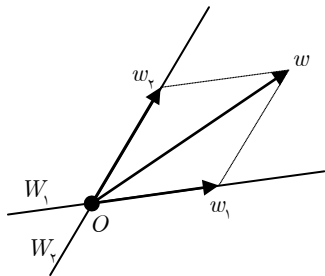
اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$1. \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$2. \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

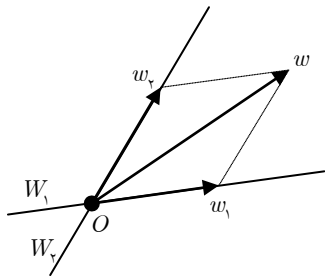


$$1. \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$2. \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

3. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$1. \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

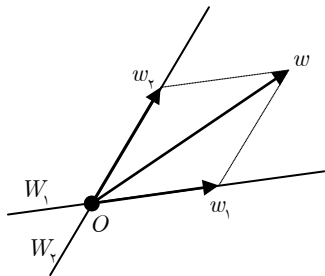
$$2. \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

3. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

4. هر عضو $w \in W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت

$$w = w_1 + w_2 \quad \text{دارد که در آن } w_1 \in W_1 \text{ و } w_2 \in W_2$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$1. \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$2. \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

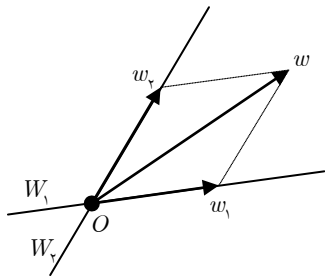
3. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

4. هر عضو $w \in W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت

$$w = w_1 + w_2 \quad \text{دارد که در آن } w_1 \in W_1 \text{ و } w_2 \in W_2$$

$$w = w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$1. \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$2. \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

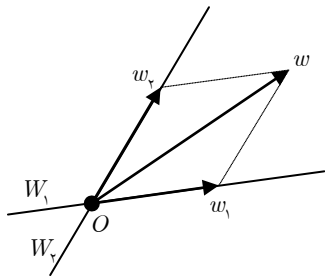
3. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

4. هر عضو $w \in W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت

$$w = w_1 + w_2 \quad \text{دارد که در آن } w_1 \in W_1 \text{ و } w_2 \in W_2$$

$$w = w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2 \Rightarrow w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2$$

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



$$1. \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$2. \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

3. اجتماع پایه‌های W_1 و W_2 پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ خواهد بود

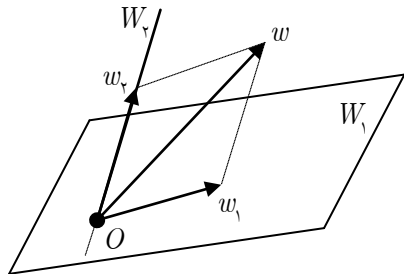
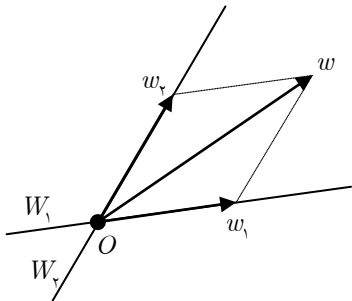
4. هر عضو $w \in W_1 + W_2$ نمایش یکتایی به صورت

$$w = w_1 + w_2 \quad \text{دارد که در آن } w_1 \in W_1 \text{ و } w_2 \in W_2$$

$$w = w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2 \Rightarrow \boxed{w_1 - w'_1} = \boxed{w'_2 - w_2}$$

 W_1 W_2

اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها



اعداد، بردارها و اعمال جبری آنها

