فصل ۷

فضا

ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسیِ «عدد» و «فضا» بنا شده است. علومِ حساب و جبر از عدد برمی‌آیند و هندسه، در مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضاست. اغلب دو رویکرد متمایز ریاضی—یکی جبری‌ـعددی و دیگری هندسی—به پدیده‌ای معیّن وجود دارد. در رویکرد جبری‌ـعددی چارچوبی نمادین ارائه می‌شود که اغلب برای حل مسائل دیگر هم به کار گرفته می‌شود؛ گاهی نیز الگوریتم یا دستورالعملی زنجیره‌ای را برای حل مسئله فراهم می‌آورد. در رویکرد هندسی، که ظاهراً از حسّ بینایی انسان سر برمی‌آورد، سعی ما بر آن است که تمام روابط موجود در اجزای پدیده‌ای خاص را یکجا و در کل در نظر آوریم، خصوصیات برجستهٔ آن را بشناسیم، و مسئله را بر اساس آن «مشاهدات» حل کنیم. دو مثال زیر تمایز بین این دو را روشن‌تر می‌نماید.

مثال ۱

می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع می‌شوند مجذور کاملی است. درواقع، به ازای هر عدد طبیعی مانند n:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^{۲}. \qquad (۱)$$

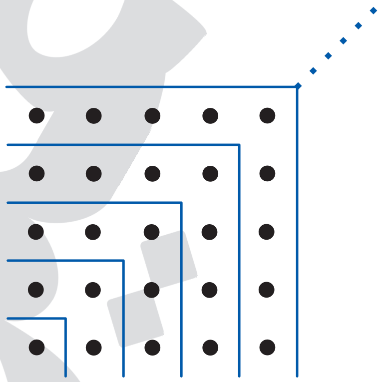
روشی جبری‌ـعددی برای اثبات این ادعا استقراست. حکم به ازای $n = ۱$ صادق است. فرض می‌کنیم

تساوی (۱) به ازای n برقرار باشد و، از این گذشته، نشان می‌دهیم به ازای $(n+۱)$ نیز برقرار است:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)+(۲n+۱)=n^۲+(۲n+۱)=(n+۱)^۲$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

رویکردی هندسی به همین حکم—بدون هیچ توضیحی—در شکل ۱.۷ دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به صورت لایه‌هایی متوالی از گوشهٔ چپ افزوده می‌شوند و همواره یک مربع شکل می‌گیرد.



شکل ۱.۷

مثال ۲

می‌خواهیم در مورد تعداد جواب‌های حقیقی دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x+y=۳ \\ x^۲+y^۲+x+y=۴ \end{cases} \qquad (۲)$$

مسئله را نخست با رویکرد جبری بررسی می‌کنیم. با جایگزینی از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم، $x^۲+y^۲=۱$ حاصل می‌شود. حال، از

$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲-۲(x,y)$$
$$۱=۹-۲(x,y)$$

$(x,y)=۴$ نتیجه می‌شود. بنابراین، داریم:

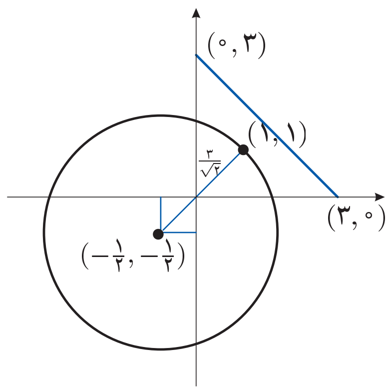
$$\begin{cases} x+y=۳ \\ (x,y)=۴ \end{cases}$$

یعنی x و y باید ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $t^۲-۳t+۴=۰$ باشند. ولی در این معادله ریشهٔ حقیقی وجود ندارد و $\Delta<۰$.

حال همین مسئله را با رویکردی هندسی بررسی می‌کنیم. دستگاه (۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} x+y=۳ \\ \left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left(y+\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۹}{۲} \end{cases} \qquad (۳)$$

رابطهٔ اول معادلهٔ خط راستی است که محورهای x و y را در نقاط $(۳,۰)$ و $(۰,۳)$ قطع می‌کند. رابطهٔ دوم معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$ و شعاع $\frac{۳}{\sqrt{۲}}$ است. پس هر جواب این دستگاه با یک نقطهٔ تلاقیِ این خط و دایره متناظر است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، هیچ نقطهٔ تلاقی بین آن دو وجود ندارد. فاصلهٔ مرکز این دایره از خطِ $x+y=۳$ به‌سادگی محاسبه می‌شود و برابر $۲\sqrt{۲}$ است. می‌دانیم $\frac{۳}{\sqrt{۲}}<۲\sqrt{۲}$؛ پس، دستگاه (۳) و درنتیجه دستگاه (۲) جواب ندارد (شکل ۲.۷).



شکل ۲.۷

در اینجا، هرچند در رویکرد هندسی نیز محاسبات جبری به کار رفت، توجه کنید که انتخاب این عملیات خاص از دانشِ هندسیِ ما دربارهٔ خط راست و دایره برآمده است. تحلیل جبری برای اَشکالِ نامأنوس ناگزیر است، ولی هر جا بتوانیم از «دیدِ هندسی» استفاده کنیم، معمولاً بینش یا تعبیر روشن‌تری از مسئله به دست می‌آوریم.

نکتهٔ مهم دیگر این که چون این مسئله ۲ متغیر دارد، بررسی هندسی آن در صفحهٔ (x,y) ممکن است. در حل مسائل سه‌متغیره نیز می‌توان از تجسم هندسی بهره جست. اما، در بسیاری از مسائل ریاضی و کاربردی، با بیش از ۳ متغیر سروکار داریم که ظاهراً مانعی عبورناپذیر در برابر رویکرد هندسی است، زیرا انسان که خود سه‌بعدی است هیچ گونه درک مستقیمی از ابعاد بیشتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما، در این فصل، فراهم آوردن نوعی هندسهٔ nبعدی است که در آن n به اعداد کوچک‌تر از یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان زبانِ ریاضیِ مناسبی برای تعمیم شهود هندسی به ابعاد بیشتر از ۳ تلقی کرد که مثل حسّ بینایی تفکر ریاضی را به یافتن روشی مناسب برای حل مسائل سوق می‌دهد. در اینجا اصلاً ادعا نمی‌کنیم که فضایی nبعدی و عینی «وجود» دارد، بلکه تلاش خواهیم کرد نظام ریاضیِ دقیقی ارائه کنیم که بستری مناسب برای نوعی تجسم و شهود، هرچند مجازی و نمادین، در ابعاد بیشتر از ۳ به دست دهد.

۱۷ فضای حقیقیِ nبعدی

ارتباط جبر و هندسه در هندسهٔ تحلیلی راهنمای خوبی در ساختن فضایی nبعدی است. می‌دانیم اولین ارتباط جبر و هندسه از انتساب عددی به هر پاره‌خط آغاز می‌شود، یعنی طول هر پاره‌خط نسبت به طول پاره‌خطِ واحد سنجیده می‌شود. بدین‌ترتیب، تناظری یک به یک بین نقاطِ خطی راست با اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، به وجود می‌آید. در هندسهٔ تحلیلی، نقاط صفحه با عناصر $\mathbb{R}^۲$، یعنی زوج‌هایی مرتب از اعداد حقیقی، و نقاط فضا با عناصر $\mathbb{R}^۳$، یعنی سه‌تایی‌هایی مرتب از اعداد حقیقی، سنجیده می‌شوند. تا اینجا، در ذهن ما جبر و هندسه مستقل از یکدیگر وجود دارند و هندسهٔ تحلیلی پلی ارتباطی بین آن دو برقرار می‌کند. nتایی‌هایی مرتب از اعداد حقیقی، به ازای $n \geq ۴$، برای nهای بزرگ‌تر از ۳ نیز معنی‌دار است، ولی هندسه‌ای فراتر از هندسهٔ فضای عادیِ سه‌بعدیِ معلوم بر ما نیست؛ با یاری گرفتن از ارتباط بین جبر و هندسه در هندسهٔ تحلیلی، مفاهیم هندسی را برای $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعهٔ nتایی‌هایی مرتب از اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم و، به این ترتیب، نوعی هندسه در $\mathbb{R}^n$ بنا می‌نهیم.

با این مقدمه، $\mathbb{R}^n$، یعنی اشیای ریاضیِ به شکلِ $\mathrm{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$، $x_i \in \mathbb{R}$، را در نظر می‌گیریم و هر چنین شیئی را **نقطه**‌ای از $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم. نخست، عملِ جمعی $\mathbb{R}^n$ را، مشابه جمع بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$، تعریف می‌کنیم.

برای $\mathrm{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $\mathrm{y} = (y_۱, \ldots, y_n)$، مجموع x و y به صورت زیر تعریف می‌شود:

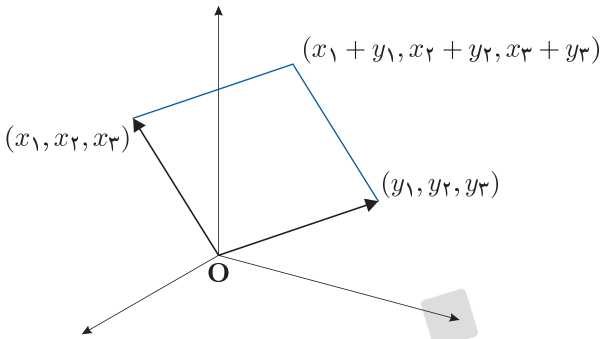
$$\mathrm{x} + \mathrm{y} = (x_۱ + y_۱, \ldots, x_n + y_n). \quad (۱)$$

۱۷ گزاره ۱

خواص جمع

الف) تعویض‌پذیری (جابه‌جایی بودن): $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{x}$.

ب) شرکت‌پذیری: $(\mathrm{x} + \mathrm{y}) + \mathrm{z} = \mathrm{x} + (\mathrm{y} + \mathrm{z})$.



شکل ۳.۷

پ) **عنصر بی‌اثر:** nتایی $(۰, \ldots, ۰) = ۰$ (یگانه عنصرِ) دارای ویژگی زیر است:

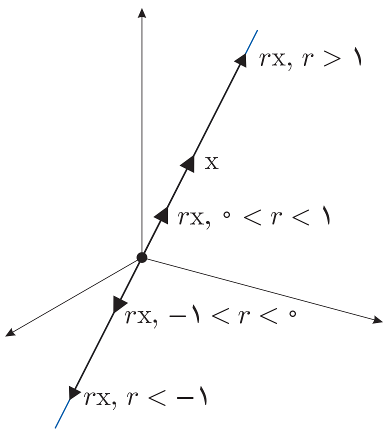
$$\mathrm{x} + ۰ = ۰ + \mathrm{x} = \mathrm{x}.$$

ت) **عنصر قرینه:** برای nتایی داده‌شدهٔ $\mathrm{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$، nتاییِ "$-\mathrm{x}$"، که به صورت $-\mathrm{x} = (-x_۱, \ldots, -x_n)$ تعریف می‌شود، (یگانه عنصرِ) دارای ویژگی زیر است:

$$\mathrm{x} + (-\mathrm{x}) = (-\mathrm{x}) + \mathrm{x} = ۰.$$

بنابراین، همهٔ خواص جمع به‌سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند.

تعریف جمع nتایی‌ها و خواص بالا عیناً از حالت دوبعدی و سه‌بعدی برگرفته شده‌اند. اگر نقاط x و y در $\mathbb{R}^۳$ را به بردارهای ساطع از ۰ منسوب کنیم، $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ مفهوم مجموع برداری معمول را دارد، یعنی رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگرش نقاط ۰، x و y است (شکل ۳.۷ را ببینید).



شکل ۴.۷

برای بردارها در صفحه و فضای سه‌بعدی، ضرب عددی حقیقی در یک بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می‌توان برای $\mathbb{R}^n$ نیز تعریف کرد. برای نقطهٔ $\mathrm{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ و عدد حقیقیِ $r \in \mathbb{R}$، حاصل ضرب r در x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r\mathrm{x} = (rx_۱, \ldots, rx_n). \tag{۲}$$

یعنی همهٔ مؤلفه‌های x در r ضرب می‌شوند. تعبیر این عمل در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ را به یاد می‌آوریم. اگر بردار واصل از ۰ را در نظر بگیریم، $r\mathrm{x}$ برداری در همان راستاست و اگر r مثبت باشد هم‌جهت با x و اگر r منفی باشد در جهت مخالف است (شکل ۴.۷ را ببینید). ■

خواص ابتدایی زیر در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع برقرار است. همهٔ احکام زیر مستقیم از تعریف نتیجه می‌شوند.

۱۷ ۲ گزاره

خواص ضرب در اعداد

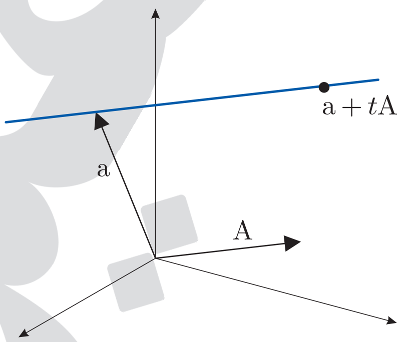
الف) به ازای هر نقطهٔ x، $۱\mathrm{x} = \mathrm{x}$.

ب) اگر r و s اعدادی حقیقی و x یک نقطه باشند، $(rs)\mathrm{x} = r(s\mathrm{x})$.

پ) اگر r و s اعدادی حقیقی باشند و x یک نقطه، $(r+s)\mathrm{x} = r\mathrm{x} + s\mathrm{x}$.

ت) اگر r عددی حقیقی باشد و x و y دو نقطه، $r(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = r\mathrm{x} + r\mathrm{y}$.

با این تعاریف، اکنون می‌توانیم بعضی مفاهیم هندسه را در $\mathbb{R}^n$ به کار بگیریم. ساده‌ترین مفهوم هندسی، پس از نقطه، «خط راست» است. برای تعریف خط راست در هندسهٔ تحلیلی دوبعدی و سه‌بعدی راه‌های گوناگونی هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوانیم صرفاً با مفاهیم جمع نقاط و ضرب آن‌ها در عددی حقیقی بیانش کنیم. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ در نظر گرفت. ■



شکل ۵.۷

فرض کنید a و $A \neq ۰$ دو نقطه در $\mathbb{R}^۲$ یا $\mathbb{R}^۳$ باشند. مضارب حقیقی A راستایی را تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از نقطهٔ a می‌گذرد و موازی این راستاست. شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌ای روی این خط باشد این است که بتوان آن را به ازای عدد حقیقیِ مناسبی، مانند t، به صورت $a + tA$ نوشت (شکل ۵.۷). در توصیف نقاط این خط به شکل $a + tA$ فقط دو عملِ ضرب در عدد حقیقی و جمع به کار رفته است پس می‌توان آن را مبنای تعریف خط راست در $\mathbb{R}^n$ قرار داد.

۱۷ ۳ تعریف

فرض کنید $a, A(\neq ۰) \in \mathbb{R}^n$، در این صورت، مجموعهٔ زیر را خطی راست در $\mathbb{R}^n$ می‌خوانیم:

$$a + \langle A \rangle = \{a + tA : t \in \mathbb{R}\} \tag{۳}$$

■

$a + \langle A \rangle$ را با توجه به مقدمهٔ بالا اصطلاحاً خط راست گذرنده از a به موازات A نیز می‌نامیم، هرچند هنوز مفهوم «توازی» را بیان نکرده‌ایم. بدین ترتیب، هر نقطهٔ $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ از مجموعهٔ بالا باید به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} x &= a + tA \\ (x_۱, \ldots, x_n) &= (a_۱, \ldots, a_n) + t(A_۱, \ldots, A_n) \\ &= (a_۱ + tA_۱, \ldots, a_n + tA_n). \end{aligned}$$

پس، برای a و Aی مفروض، خط راست $a + \langle A \rangle$ متشکل از نقاط $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_۱ = a_۱ + tA_۱ \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \tag{۴}$$

که در اینجا t همهٔ مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (۴) را **نمایش پارامتری** خط راست $a + \langle A \rangle$ نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به همان مفهوم تعریف‌شده، مطابقِ انتظار، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطهٔ $a + \langle A \rangle$ به شکل $a + tA$، یعنی متناظر با t، است و این t منحصر به فرد است؛ زیرا اگر $a + tA = a + t'A$، با اضافه کردنِ "$-a$" به دو طرف، $tA = t'A$ نتیجه می‌شود و $(t - t')A = ۰$. حال، چون $A \neq ۰$ فرض شده است، لزوماً $t - t' = ۰$ یا $t = t'$.

۱۷ ۴ مثال

محورهای مختصات. nتایی‌های $(e_۱, \ldots, e_n)$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$e_۱ = (۱, ۰, \ldots, ۰)\,,\ e_۲ = (۰, ۱, ۰, \ldots, ۰), \ldots,\ e_n = (۰, \ldots, ۰, ۱)$$

بدین ترتیب، e_iی آن nتایی است که مؤلفهٔ iاِم آن ۱ و دیگر مؤلفه‌هایش صفر است.

حال

$$\circ + \langle e_i \rangle = \{(\circ, \ldots, \circ, t, \circ, \ldots, \circ) : t \in \mathbb{R}\}$$

خط راستی است که **محور مختصاتی** iاُم یا **محور** x_i خوانده می‌شود. تعداد محورهای مختصات در $\mathbb{R}^n$ برابر n است.

اگر $l = a + \langle A \rangle$ خطی راست باشد، خط راست $\circ + \langle A \rangle$ را **انتقال‌یافتهٔ** l **به مبدأ** می‌نامیم و با نمادهای $\langle A \rangle$ یا l° نیز نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب،

$$l^\circ = \langle A \rangle = \circ + \langle A \rangle = \{tA | t \in \mathbb{R}\}$$

■

۱۷ ۵ گزاره فرض کنید l خط راستی باشد و $P, Q \in l$، آنگاه $Q - P \in l^\circ$. برعکس، اگر $R \in l^\circ$، نقاط P و Q روی l وجود دارند که $R = Q - P$.

برهان نخست، اگر $l = a + \langle A \rangle$ و $P, Q \in l$، به ازای اعداد حقیقی مناسب s و t داریم:

$$P = a + sA$$
$$Q = a + tA$$

پس $Q - P = (t - s)A \in l^\circ$. برعکس، فرض کنید $R = rA$ که در آن r عددی حقیقی است. دراین‌صورت، با قرار دادن $P = a$ و $Q = a + rA$، داریم $R = Q - P$.

■

۱۷ ۶ گزاره اگر $l = a + \langle A \rangle$ خط راستی باشد، $b \in l$ و $\circ \neq B \in l^\circ$، آنگاه:

$$b + \langle B \rangle = a + \langle A \rangle.$$

برهان طبق فرض در مورد B و b، به ازای عدد حقیقی مناسب $t_\circ \neq \circ$، $B = t_\circ A$ و به ازای عدد حقیقی مناسب t_1، $b = a + t_1 A$. پس اگر $b + sB$ نقطهٔ دلخواهی روی خط $b + \langle B \rangle$ باشد، یعنی:

$$b + sB = (a + t_1 A) + s(t_\circ A)$$
$$= a + (t_1 + st_\circ)A$$

بنابراین، $b + sB \in l$ و از آنجاکه این نقطه‌ای دلخواه در خط $b + \langle B \rangle$ است، $b + \langle B \rangle \subset a + \langle A \rangle$. برعکس، اگر $a + tA$ نقطهٔ دلخواهی از l باشد، می‌خواهیم $a + tA$ را به صورت

$$b + sB = a + (t_1 + st_\circ)A$$

بنویسیم. برای این کار، معادلهٔ $t_1 + st_\circ = tA$ را نسبت به s حل می‌کنیم که، چون $t_\circ \neq \circ$، امکان‌پذیر است. پس $a + \langle A \rangle \subset b + \langle B \rangle$، و حکم به اثبات می‌رسد.

■

دو گزارهٔ بالا نمونه‌هایی‌اند از احکامی که در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ با اتکا به شهودِ بصریْ طبیعی به نظر می‌رسند. ولی چون n در $\mathbb{R}^n$ دلخواه است، فعلاً مبنایی شهودی برای این برداشت‌ها نداریم و باید آن‌ها را ثابت کنیم. گزارهٔ زیر را، که یکی از اساسی‌ترین برداشت‌های ما را از خط راست در فضای عادی تبیین می‌کند، در $\mathbb{R}^n$ به اثبات می‌رسانیم.

۱۷ ۷ گزاره

اگر P و Q دو نقطهٔ متمایز در $\mathbb{R}^n$ باشند، یک و فقط یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل P و Q باشد.

برهان قرار می‌دهیم: $\mathrm{R} = \mathrm{Q} - \mathrm{P}$. از آنجا که P و Q متمایز فرض شده‌اند، $\mathrm{R} \neq ۰$. دراین‌صورت، خطِ راستِ $\mathrm{P} + \langle \mathrm{R} \rangle$ متشکل از نقاطی مانند $\mathrm{P} + t(\mathrm{Q} - \mathrm{P})$ است که در آن $t \in \mathbb{R}$. این خط شامل نقاط P و Q است که به ازای $t = ۰$ و $t = ۱$ به دست می‌آیند. حال، فرض کنید $l_۱ = \mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ و $l_۲ = \mathrm{b} + \langle \mathrm{B} \rangle$ دو خط راست شامل P و Q باشند. طبق گزارهٔ ۵ همین بخش، $\mathrm{R} \in l_۱^{\circ}$ و $\mathrm{R} \in l_۲^{\circ}$. بنابراین، طبق گزارهٔ ۶، $\mathrm{P} + \langle \mathrm{R} \rangle = \mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ و $\mathrm{P} + \langle \mathrm{R} \rangle = \mathrm{b} + \langle \mathrm{B} \rangle$، پس $\mathrm{b} + \langle \mathrm{B} \rangle = \mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ و یکتایی خط راست شامل P و Q به اثبات می‌رسد. ■

دو خط راست $l_۱$ و $l_۲$ را، در صورتی که نقطهٔ مشترک نداشته باشند و انتقال‌یافتهٔ آن‌ها به مبدأ یکی باشد، $l_۱^{\circ} = l_۲^{\circ}$، **موازی** می‌نامیم. بنابراین، هر خطِ l که از ۰ نگذرد موازیِ l° است. توازی دو خط $l_۱$ و $l_۲$ را با $l_۱ \| l_۲$ نمایش می‌دهیم.

نمایش متقارن نمایش دیگری برای خطوط راست است که به‌این‌صورت به دست می‌آید: اگر هر یک از روابط (۴) را نسبت به t حل کنیم و نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل چنین خواهد بود:

$$\frac{x_۱ - a_۱}{A_۱} = \frac{x_۲ - a_۲}{A_۲} = \dots = \frac{x_n - a_n}{A_n} \qquad (۵)$$

همهٔ A_iها نمی‌توانند صفر باشند، زیرا بنابر فرض $\mathrm{A} \neq ۰$. صفر بودن بعضی A_iها در (۵) به معنای تقسیم بر صفر نیست؛ بلکه، با توجه به (۴)، متوجه می‌شویم $A_i = ۰$ بدین معناست که x_i ثابت و همواره برابر a_i است.

۱۷ ۸ مثال

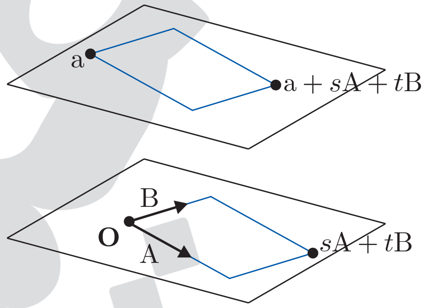
فرض کنید $A_۱ \neq ۰$ و $A_۲ = \cdots = A_n = ۰$. دراین‌صورت،

$$\mathrm{A} = (A_۱, ۰, \dots, ۰)$$

یعنی A به محور $x_۱$ تعلق دارد: پس، خط راست $\mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ با محورِ $x_۱$ موازی یا بر آن منطبق است. به همین ترتیب، اگر $A_j \neq ۰$ و A_iهای دیگر صفر باشند، خط $\mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ موازی محور x_j یا منطبق بر آن خواهد بود. ■

شاید «صفحه» یا «سطح تخت» ابتدایی‌ترین مفهوم هندسه، پس از «نقطه» و «خط راست»، باشد. در اینجا می‌خواهیم درک خود از صفحه را در فضای سه‌بعدی به صفحه در $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهیم. برای این کار روشی را در پیش می‌گیریم که مشابه آن است که برای تعریف خط (راست) در $\mathbb{R}^n$ به‌کارگرفتیم. فرض‌کنید A و B دو nتایی ناهمراستا باشند ـــ یعنی هیچ‌یک مضرب حقیقی دیگری نباشد.

نخست، مجموعهٔ نقاط $s\mathrm{A}+t\mathrm{B}$ را در نظر می‌گیریم. تصور شهودی ما از این مجموعه همان صفحهٔ گذرنده از مبدأ است و شامل نقاط A و B. توجه کنید که مبدأ به ازای $s=t=۰$ به دست می‌آید و به ازای $t=۰$، $s=۱$، نقطهٔ A و به ازای $t=۱$، $s=۰$، نقطهٔ B. حال، اگر نقطه‌ای چون a را در نظر آوریم و همهٔ نقاط این مجموعه را به اندازهٔ a انتقال دهیم، حاصلْ «صفحهٔ گذرنده از a به موازات A و B» خواهد بود (شکل ۶.۷).



شکل ۶.۷

بدین‌ترتیب، تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{a}+\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle=\{\mathrm{a}+s\mathrm{A}+t\mathrm{B}|s,t\in\mathbb{R}\}. \qquad (۶)$$

این مجموعه را صفحهٔ گذرنده از a به موازات A و B می‌نامیم.

مثال ۹ **صفحات مختصاتی.** تعداد $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ زوج اندیس $\{i,j\}$، $i\neq j$، در $\{۱,\dots,n\}$ وجود دارد. به ازای هر چنین $\{i,j\}$ای مجموعهٔ

$$\{s\mathrm{e}_i+t\mathrm{e}_j|s,t\in\mathbb{R}\}$$

صفحه‌ای مختصاتی در $\mathbb{R}^n$ است. ■

اگر E صفحه‌ای در $\mathbb{R}^n$ باشد، $E=\mathrm{a}+\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$، E°ــ یا انتقال‌یافتهٔ E به مبدأــ را چنین

$$E^\circ=۰+\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$$

تعریف می‌کنیم. اغلب $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$ را جایگزین $۰+\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$ می‌کنیم. اگر هر یک از $E_۱$ و $E_۲$ خط یا صفحه باشد، $E_۱$ و $E_۲$ را **موازی** می‌نامیم و می‌نویسیم $E_۱\|E_۲$ به شرط آنکه اشتراک $E_۱$ و $E_۲$ تهی باشد و به‌علاوه:

$$E_۲^\circ\subset E_۱^\circ \text{ یا } E_۱^\circ\subset E_۲^\circ.$$

مثال ۱۰ اگر E صفحه‌ای در $\mathbb{R}^n$ و $۰\notin E$ باشد، نشان می‌دهیم $E\|E^\circ$. باید نشان دهیم E و E° نقطهٔ مشترک ندارند. فرض کنید $E=\mathrm{a}+\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$، پس $E^\circ=\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$. اگر نقطهٔ مشترکی وجود داشته باشد، مثلاً P، آنگاه، به ازای $s_۱$ و $t_۱$ مناسب، $\mathrm{P}=\mathrm{a}+s_۱\mathrm{A}+t_۱\mathrm{B}$ و نیز، به ازای $s_۲$ و $t_۲$ مناسب، $\mathrm{P}=s_۲\mathrm{A}+t_۲\mathrm{B}$. پس $\mathrm{a}+s_۱\mathrm{A}+t_۱\mathrm{B}=s_۲\mathrm{A}+t_۲\mathrm{B}$، یا:

$$\mathrm{a}=(s_۲-s_۱)\mathrm{A}+(t_۲-t_۱)\mathrm{B} \qquad (۷)$$

درنتیجه، می‌توان نوشت:

$$۰=\mathrm{a}+(s_۱-s_۲)\mathrm{A}+(t_۱-t_۲)\mathrm{B}$$

یعنی $۰\in E$ که خلاف فرض است. ■

مثال ۱۱ اگر $E=\mathrm{a}+\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$ یک صفحه باشد و $\mathrm{b}\notin E$ و $L=\mathrm{b}+\langle \mathrm{B}\rangle$، آنگاه خط L با صفحهٔ E موازی است، زیرا اولاً $L^\circ=\langle B\rangle\subset\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle=E^\circ$، و ثانیاً خواهیم دید که L و E نقطهٔ مشترک

ندارند. فرض کنید P نقطهٔ مشترکی باشد، پس $\mathrm{P} = \mathrm{b} + t\mathrm{B}$ و نیز $\mathrm{P} = \mathrm{a} + s_1\mathrm{A} + t_1\mathrm{B}$، بنابراین:

$$\mathrm{b} + t\mathrm{B} = \mathrm{a} + s_1\mathrm{A} + t_1\mathrm{B}$$

$$\mathrm{b} = \mathrm{a} + s_1\mathrm{A} + (t_1 - t)\mathrm{B}$$

یعنی $\mathrm{b} \in E$ که خلاف فرض است ■

۱۷ ۱۲ مثال اگر دو صفحه در $\mathbb{R}^3$ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، لزوماً موازی‌اند. این وضعیت در $\mathbb{R}^n$، به ازای $n \geq 4$، لزوماً برقرار نیست، یعنی دو صفحهٔ بدونِ نقطهٔ مشترک ممکن است موازی نباشند! این مشابه وضعیت دو خط راست در $\mathbb{R}^3$ است که ممکن است نقطهٔ مشترک نداشته باشند و در عین حال موازی هم نباشند. مثال زیر را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید:

$$E_1 = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle,\ \ E_2 = \mathrm{e}_4 + \langle \mathrm{e}_1, s\mathrm{e}_3 \rangle$$

E_1 متشکل از نقاطِ $(s, t, 0, 0)$ است و E_2 متشکل از نقاط $(s', 0, t', 0)$. بدیهی است E_1 و E_2 نقطهٔ مشترک ندارند زیرا مؤلفهٔ چهارم هر عنصر E_1 برابر صفر و مؤلفهٔ چهارم هر عنصر E_2 برابر ۱ است. حال اگر E_1 و E_2 را به مبدأ منتقل کنیم، داریم:

$$E_1^\circ = E_1 = \{(s, t, 0, 0) | s, t \in \mathbb{R}\},\ \ E_2^\circ = \{(s', 0, t', 0) | s', t' \in \mathbb{R}\}$$

که نه E_1° زیرمجموعهٔ E_2° است و نه عکسِ آن صادق است، پس E_1 و E_2 در تعریف توازی صدق نمی‌کنند، به ازای $n \geq 4$، دو صفحه‌ای که در $\mathbb{R}^n$ نه نقطهٔ مشترک داشته باشند و نه موازی باشند، دو **صفحهٔ متنافر** می‌نامیم. ■

در اینجا می‌توان گزاره‌هایی مشابه گزاره‌های ۵، ۶، و ۷ را در مورد صفحه ثابت کرد. احکام مشابه به صورت زیر به دست می‌آیند.

۱۷ ۱۳ گزاره اگر E یک صفحه باشد و $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$، آنگاه $\mathrm{Q} - \mathrm{P} \in E^\circ$. برعکس، اگر $\mathrm{R} \in E^\circ$، نقاط P و Qای در E یافت می‌شوند که $\mathrm{R} = \mathrm{Q} - \mathrm{P}$. ■

۱۷ ۱۴ گزاره اگر $E = \mathrm{a} + \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ یک صفحه و $\mathrm{b} \in E$ باشد، و C و D دو عنصر ناهمراستای E° باشند، آنگاه:

$$\mathrm{b} + \langle \mathrm{C}, \mathrm{D} \rangle = \mathrm{a} + \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle.$$ ■

۱۷ ۱۵ گزاره فرض کنید P، Q، و R سه نقطهٔ متمایز در $\mathbb{R}^n$ باشند که روی یک خط قرار ندارند. در این صورت یک و فقط یک صفحهٔ E در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل هر سه نقطه است. ■

این سه گزاره را خواننده خود باید در تمرین‌های ۱۰، ۱۱، و ۱۲ آخر بخش اثبات کند. گزاره‌هایی کلی‌تر را در بخش ۲ همین فصل بررسی خواهیم کرد. با اتکا به برداشت شهودیِ خود از مفاهیم خط راست و صفحه، حکم زیر را در فضای عادیِ $\mathbb{R}^3$ بدیهی تلقی می‌کنیم، ولی این حکم را در $\mathbb{R}^n$ باید با استفاده از تعاریف دقیقی که از خط و صفحه داریم ثابت کنیم:

۱۷ ۱۶ گزاره اگر E صفحه‌ای در $\mathbb{R}^n$ باشد و P و Q دو نقطهٔ متمایز در E، آنگاه خط گذرنده از P و Q به‌تمامی در E قرار دارد.

برهان فرض کنید $E = \{\mathrm{a} + s\mathrm{A} + t\mathrm{B} | s, t \in \mathbb{R}\}$. پس به ازای اعداد حقیقی مناسب $s_۱$، $t_۱$، $s_۲$ و $t_۲$ می‌توان نوشت:

$$\mathrm{P} = \mathrm{a} + s_۱\mathrm{A} + t_۱\mathrm{B},\ \mathrm{Q} = \mathrm{a} + s_۲\mathrm{A} + t_۲\mathrm{B}$$

چون P و Q متمایزند، خط راستِ منحصر به فردی چون l از P و Q می‌گذرد، $\mathrm{R} = \mathrm{Q} - \mathrm{P} \in l^\circ$، و هر نقطهٔ S روی l را می‌توان به صورت $\mathrm{S} = \mathrm{P} + t\mathrm{R}$ نوشت که در آن $t \in \mathbb{R}$. بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= (\mathrm{a} + s_۱\mathrm{A} + t_۱\mathrm{B}) + t\big((s_۲ - s_۱)\mathrm{A} + (t_۲ - t_۱)\mathrm{B}\big)\\ &= \mathrm{a} + (s_۱ + ts_۲ - ts_۱)\mathrm{A} + (t_۱ + tt_۲ - tt_۱)\mathrm{B}\end{aligned}$$

پس S به E تعلق دارد و تمام خط در E قرار دارد. ■

۱۷ تمرین

۱. برای هر یک از دو حکم زیر اثباتی هندسی ارائه کنید:

الف) $(a+b)^۲ - (a-b)^۲ = ۴ab$؛

ب) $۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{۱}{۲}n(n+۱)$.

۲. با روش جبری و هندسی، تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر را تعیین کنید:

$$\begin{cases} x - y = ۱ \\ x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰ \end{cases}$$

۳. نشان دهید دستگاه معادلات زیر، بسته به مقدار ثابت p، یا بی‌نهایت جواب دارد یا فقط یک جواب؛ یا اصلاً هیچ جواب ندارد:

$$\begin{cases} x - ۲y + ۲z = p \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱ \end{cases}$$

۴. وضعیت نسبیِ (تقاطع، تنافر، توازی، یا انطباقِ) زوج‌های زیر از خط‌های راست را تعیین کنید:

الف) در $\mathbb{R}^۳$: خط

$$\frac{x-۱}{۴} = \frac{y-۲}{۱} = \frac{z}{۳}$$

و خط

$$\frac{x-۵}{۲} = \frac{y-۳}{۲} = \frac{z-۲}{۱};$$

ب) در $\mathbb{R}^۴$: خط

$$\frac{x_۱-۲}{۶} = \frac{x_۲-۳}{۴} = \frac{x_۳+۱}{۲} = \frac{x_۴}{-۲}$$

و خط

$$\frac{x_۱-۵}{۳} = \frac{x_۲-۵}{۲} = \frac{x_۳}{۱} = \frac{x_۴+۱}{-۱};$$

پ) در $\mathbb{R}^۴$: خط

$$\frac{x_۱}{-۲} = \frac{x_۲+۱}{۰} = \frac{x_۳-۱}{۱} = \frac{x_۴}{-۲}$$

و خط

$$\frac{x_۱+۲}{۶} = \frac{x_۲-۱}{۱} = \frac{x_۳-۱}{-۱} = \frac{x_۴-۲}{۲}.$$

۵. وضعیت نسبیِ (تقاطع، تنافر، توازی، یا انطباقِ) زوج‌های زیر از صفحه‌ها را تعیین کنید:

الف) در $\mathbb{R}^۴$: صفحهٔ

$$\langle \mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲ + \mathrm{e}_۳ \rangle$$

و صفحهٔ

$$(۰,۱,-۱,۲)+\langle e_۲-e_۴, e_۱, e_۳\rangle;$$

ب) در $\mathbb{R}^۴$: صفحهٔ

$$(-۱,۱,۲,۱)+\langle e_۱+e_۲-e_۳, e_۴\rangle$$

و صفحهٔ

$$(۰,۱,۲,-۱)+\langle e_۱+e_۲, e_۳+e_۴\rangle;$$

پ) در $\mathbb{R}^۴$: صفحهٔ

$$(۱,۱,-۱,۲)+\langle e_۱+e_۳, e_۲+e_۳-e_۴\rangle$$

و صفحهٔ

$$\langle ۲e_۱-e_۲+e_۳+e_۴, e_۳+e_۴\rangle;$$

ت) در $\mathbb{R}^۵$: صفحهٔ

$$(۱,۱,۱,-۱,۱)+\langle -e_۱+e_۲, e_۳-۲e_۴+۳e_۵\rangle$$

و صفحهٔ

$$(۰,۱,۰,-۱,۲)+\langle e_۱+۳e_۲-e_۴, e_۳+e_۵\rangle.$$

۶. در هر مورد تعیین کنید خط و صفحهٔ داده‌شده موازی‌اند یا خیر:

الف) در $\mathbb{R}^۴$: خط راست

$$(۱,۰,۲,-۱)+\langle e_۱+e_۲+e_۳+۲e_۴\rangle$$

و صفحهٔ

$$\langle ۲e_۱+e_۲, e_۳-e_۴\rangle;$$

ب) در $\mathbb{R}^۵$: خط راست

$$\langle(-۱,۰,۱,-۱)\rangle$$

و صفحهٔ

$$(۲,۳,۰,-۱,-۱)+\langle e_۱+۲e_۲-e_۳, e_۲-e_۴+e_۵\rangle.$$

۷. الف) نشان دهید هر صفحه‌ای که با صفحهٔ $\langle e_۱-e_۲, e_۳+e_۴\rangle$ در $\mathbb{R}^۴$ موازی است با صفحهٔ $\langle e_۱, e_۲\rangle$ متنافر است یا آن را در یک خط راست قطع می‌کند.

ب) نشان دهید هر صفحهٔ موازی با $\langle e_۱+۲e_۳, e_۲-e_۴\rangle$ در $\mathbb{R}^۴$ صفحهٔ $\langle e_۱, e_۲\rangle$ را در یک نقطه قطع می‌کند.

۸. دو خط راست زیر را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید:

$$\frac{x_۱-۱}{۲}=\frac{x_۲}{۳}=\frac{x_۳+۱}{-۱},\ \frac{x_۱+۱}{A}=\frac{x_۲+۲}{B}=\frac{x_۳}{C}.$$

الف) آیا می‌توان (A,B,C) را به گونه‌ای تعیین کرد که این دو خط منطبق باشند؟

ب) نشان دهید مجموعهٔ انتخاب‌های (A,B,C) که دو خطّ تمرین ۸ به ازای آن موازی‌اند یک خط راست گذرنده از $(۰,۰,۰)$ در فضای سه‌بعدیِ (A,B,C) تشکیل می‌دهند که $(۰,۰,۰)$ از آن حذف شده است.

پ) برای چه انتخاب‌هایی از (A,B,C) دو خطّ تمرین ۸ متقاطع‌اند؟ نشان دهید مجموعهٔ این انتخاب‌ها یک صفحهٔ گذرنده از $(۰,۰,۰)$ در فضای سه‌بعدی (A,B,C) تشکیل می‌دهند که $(۰,۰,۰)$ از آن حذف شده است.

۹. دو خط زیر را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید:

$$\frac{x_۱}{۳}=\frac{x_۲-۱}{۱}=\frac{x_۳}{-۱},\ \frac{x_۱-a}{۰}=\frac{x_۲-b}{۲}=\frac{x_۳-c}{۱}.$$

نشان دهید مجموعهٔ مقادیری از (a,b,c) که اشتراک این دو خط به ازای آن‌ها ناتهی است صفحه‌ای در فضای سه‌بعدی (a,b,c) تشکیل می‌دهند.

۱۰. گزارهٔ ۱۳ را ثابت کنید.

۱۱. گزارهٔ ۱۴ را ثابت کنید.

۱۲. گزارهٔ ۱۵ را ثابت کنید.

۱۳. نشان دهید اگر L خط راستی در $\mathbb{R}^n$ و P یک نقطهٔ خارج از L باشد، یک و فقط یک خط راست گذرنده از P وجود دارد که موازی L است.

۱۴. خط راست $\langle e_۳\rangle$ و صفحهٔ $\langle e_۱, e_۲\rangle$ در $\mathbb{R}^۴$ یکدیگر را در تک نقطهٔ ۰ قطع می‌کنند.

الف) نشان دهید خطوطی موازیِ $\langle e_۳\rangle$ در $\mathbb{R}^۴$ وجود دارند که اشتراکشان با صفحهٔ $\langle e_۱, e_۲\rangle$ تهی است.

ب) صفحه‌های $\langle e_۳, e_۴\rangle$ و $\langle e_۱, e_۲\rangle$ در $\mathbb{R}^۴$ یکدیگر را در تک نقطهٔ ۰ قطع می‌کنند. آیا صفحه‌ای موازی $\langle e_۳, e_۴\rangle$ در $\mathbb{R}^۴$ وجود دارد که اشتراکش با صفحهٔ $\langle e_۱, e_۲\rangle$ تهی باشد؟

پ) صفحات $\langle e_۳, e_۴\rangle$ و $\langle e_۱, e_۲\rangle$ را در $\mathbb{R}^۵$ در نظر بگیرید. آیا صفحه‌ای موازی $\langle e_۳, e_۴\rangle$ در $\mathbb{R}^۵$ وجود دارد که اشتراکش با صفحهٔ $\langle e_۱, e_۲\rangle$ تهی باشد؟

۲۷ زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$

در بخش ۱ مفاهیم نقطه، خط، و صفحه در $\mathbb{R}^n$ را بررسی کردیم. هر nتاییِ $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ را یک نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ نامیدیم. با این فرض که nتاییِ A، $(\circ, \ldots, \circ) = \circ$ نباشد، مجموعهٔ نقاطی را که می‌توانیم به صورت $\mathrm{a} + t\mathrm{A}$ بنویسیم، $t \in \mathbb{R}$، خط راست خواندیم، و با این شرط که A و B دو nتایی باشند که هیچ یک مضربی حقیقی از دیگری نباشد (به بیان دیگر، $\circ$، A و B در یک امتداد نباشند)، مجموعهٔ نقاط به شکل $\mathrm{a} + s\mathrm{A} + t\mathrm{B}$ را، که s و t اعداد حقیقی دلخواه‌اند، صفحه‌ای در $\mathbb{R}^n$ نامیدیم. بدین‌ترتیب، «نقطه» یک تک‌عضوی $\mathbb{R}^n$ است، «خط» با مجموعه اعداد حقیقی متناظر است و «صفحه» با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی تناظر دارد. اصطلاحات «زیرفضای مستوی صفربُعدی»، «زیرفضای مستوی یک‌بُعدی»، و «زیرفضای مستوی دوبُعدی» به ترتیب برای نقطه، خط، و صفحه به کار می‌روند. در این بخش «زیرفضای مستوی» و «بُعد» را دقیق تعریف خواهیم کرد، ولی مقدمتاً به طور شهودی اصطلاحِ مستوی را به زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ اطلاق می‌کنیم که مسطح باشد و امتدادی نامحدود داشته باشد. «بُعد» نیز تعداد متغیرهای حقیقی پیوستهٔ لازم برای توصیف همهٔ نقاط مجموعه است. هنگام مدرج کردن نقاط در توصیف خط و صفحه، به ترتیب به یک متغیرِ t و دو متغیر (s, t) نیازمندیم. از این‌رو، خط را یک‌بُعدی و صفحه را دوبُعدی تلقی می‌کنیم. هدف این بخش ارائهٔ تعریفی کلی برای زیرفضای مستوی kبعدی از $\mathbb{R}^n$ و بررسی خواص آن است (در اینجا k و n اعداد صحیح نامنفی‌اند و $k \leq n$).

زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ را **زیرفضای مستوی** می‌نامیم در صورتی که برای هر دو نقطهٔ متمایز P و Q از E خطِ راستِ گذرنده از P و Q به‌تمامی در E باشد. به این ترتیب، هر تک‌عنصر یا نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ زیرفضایی مستوی است، زیرا دو نقطهٔ متمایز ندارد که خط گذرنده از آن دو به‌تمامی در مجموعه نباشد. هر خط راست l زیرفضایی مستوی است، زیرا اگر P و Q دو نقطهٔ متمایز l باشند، بنابر گزارهٔ ۵ در بخش پیش، l خط راستی شامل P و Q است و $l \subset l$.

اگر E صفحه‌ای در $\mathbb{R}^n$ باشد و P و Q دو نقطهٔ متمایز E، بنابر گزارهٔ ۱۳ بخش پیش، خط گذرنده از P و Q به‌تمامی در E قرار دارد. البته خود $\mathbb{R}^n$ هم زیرفضای مستویِ $\mathbb{R}^n$ است. در این بخش، هر یک از زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$ را به صورتی مشخص خواهیم کرد. به این منظور، ساده‌تر آن است که نخست نوع خاصی از زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$ را بررسی کنیم. زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ای را **زیرفضای خطی** می‌نامیم که $\circ$ هم عنصری از آن باشد. بدین‌ترتیب، تک‌نقطه‌ایِ $\{\mathrm{x}\}$ را در صورتی زیرفضای خطی می‌نامیم که $\mathrm{x} = \circ$. هر خط راست یا صفحه در صورتی زیرفضای خطی است که از $\circ$ بگذرد. زیرفضاهای خطی $\mathbb{R}^n$ را می‌توانیم با ویژگی جبری ساده‌ای مشخص کنیم که در گزارهٔ زیر بدان پرداخته‌ایم.

۲۷ ۱ گزاره زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است اگر و فقط اگر این دو شرط را برآورده کند:

الف) هرگاه $\mathrm{x} \in E$ و $r \in \mathbb{R}$، آنگاه $r\mathrm{x} \in E$؛

ب) هرگاه $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in E$، آنگاه $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in E$.

برهان

الف) اگر $\mathrm{x} = \circ$، آنگاه به ازای هر $r \in \mathbb{R}$، $r\mathrm{x} = \circ$؛ پس، $r\mathrm{x} \in E$. ولی اگر $\mathrm{x} \neq \circ$، x و $\circ$ دو نقطهٔ متمایز خواهند بود و خط گذرنده از این دو نقطه دقیقاً از همهٔ نقاط خط $r\mathrm{x}$، $(r \in \mathbb{R})$، تشکیل می‌شود؛ پس، $r\mathrm{x} \in E$.

ب) اگر x و y متمایز نباشند، $\mathrm{y} = \mathrm{x}$ و $\mathrm{x} + \mathrm{y} = ۲\mathrm{x}$، پس بنابر (الف)، $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in E$. اما اگر x و y متمایز باشند، خط گذرنده از x و y به‌تمامی در E است. این خط از همهٔ نقاطِ خطِ $\mathrm{x} + t(\mathrm{y} - \mathrm{x})$، $(t \in \mathbb{R})$، تشکیل شده است، به‌خصوص به ازای $t = \frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \mathrm{x} + \frac{۱}{۲}(\mathrm{y} - \mathrm{x})$ روی این خط قرار دارد. پس بنابر (الف)، $\mathrm{x} + \mathrm{y} = ۲\left(\frac{۱}{۲}(\mathrm{x} + \mathrm{y})\right)$ متعلق به E است.

برعکس، فرض کنید ویژگی‌های (الف) و (ب) برای زیرمجموعهٔ ناتهی E برقرار و P و Q دو نقطهٔ متمایزِ E باشند. باید نشان دهیم خط گذرنده از P و Q به‌تمامی در E قرار دارد. هر نقطه از این خط نمایشی به صورت $\mathrm{P} + t(\mathrm{Q} - \mathrm{P})$ دارد که برابر است با $(۱ - t)\mathrm{P} + t\mathrm{Q}$. چون $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$، طبق (الف)، $(۱ - t)\mathrm{P} \in E$ و $t\mathrm{Q} \in E$، پس، طبق (ب) مجموع آن‌ها نیز در E است.

ارتباط ساده‌ای بین زیرفضاهای خطی و زیرفضاهای مستوی به مفهوم عام وجود دارد. در بخش قبلی، این ارتباط را به صورت انتقال موازی به $\circ$ نشان دادیم. به طور کلی، اگر $v \in \mathbb{R}^n$، مقصود از **انتقال توسط v** تابع $\tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ است که با $\tau_v(\mathrm{x}) = v + \mathrm{x}$ تعریف می‌شود. اگر S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، مقصود از $v + \mathrm{S}$ یا $\tau_v(\mathrm{S})$ مجموعهٔ $\{v + s \colon s \in \mathrm{S}\}$ است.

۲۷ گزاره ۲

ویژگی مستوی بودن هنگام انتقال حفظ می‌شود. به بیان دیگر، اگر E یک زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{R}^n$ باشد و v عضو دلخواهی از $\mathbb{R}^n$، E زیرفضایی مستوی از $\mathbb{R}^n$ است اگر و فقط اگر $v + E$ یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشد.

برهان نکتهٔ اصلی این است که اگر l خطِ راستی باشد، $v + l = \{\mathrm{x} + v \colon \mathrm{x} \in l\}$ نیز خط راست است، و برعکس.

اگر l یک خط راست باشد، $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^n$ و $\circ \neq \mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$ وجود دارند که

$$l = \{\mathrm{a} + t\mathrm{A} \colon t \in \mathbb{R}\}$$

بنابراین:

$$v + l = \{(\mathrm{a} + v) + t\mathrm{A} \colon t \in \mathbb{R}\}$$

یعنی $v + l$ خط گذرنده از $\mathrm{a} + v$ به موازات A است. برعکس، چون انتقال توسط $-v$ تابع وارون انتقال توسط v است، اگر مجموعهٔ $v + l$ خطی راست باشد، l نیز خط راست است.

حال با توجه به این نکته، اگر P و Q دو نقطهٔ متمایز $v + E$ باشند، $\mathrm{P}' = \mathrm{P} - v$ و $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q} - v$

دو نقطهٔ متمایزِ Eاند و خط گذرنده از P' و Q' هنگام انتقال τ_v به خط گذرنده از P و Q منتقل می‌شود. بنابراین اگر E مستوی باشد، چون خط گذرنده از P' و Q' به‌تمامی در E است، انتقال‌یافتهٔ آن هم به‌تمامی در انتقال‌یافتهٔ E است. عکس حکم نیز از اینکه τ_{-v} وارون τ_v است نتیجه می‌شود.

اکنون اگر E یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشد و $v \in E$، **انتقال‌یافتهٔ E به ۰**، E°، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^\circ = -v + E$$
$$= \{-v + \mathrm{x} \colon \mathrm{x} \in E\}$$

E° زیرفضایی خطی است؛ زیرا، طبق گزارهٔ اخیر، زیرفضایی مستوی است و به‌علاوه $\circ = v - v \in E^\circ$. افزون بر این، اگر به جای $v \in E$، هر عضو دیگر $w \in E$ در نظر گرفته شود، همین E° به دست می‌آید. موقتاً $\{\mathrm{x} - w | \mathrm{x} \in E\}$ را با E' نمایش می‌دهیم. E° و E هر دو زیرفضای خطی‌اند. چون $v \in E$، $v - w \in E'$، و $w - v = (-1)(v - w)$ نیز عضو E' است. پس برای هر $\mathrm{x} \in E$،

$$\mathrm{x} - v = (\mathrm{x} - w) + (w - v)$$

و چون E' زیرفضایی خطی است، طبق گزارهٔ ۱ (ب) در همین بخش، $\mathrm{x} - v \in E'$. بنابراین $E^\circ \subset E'$. به‌همین‌ترتیب ثابت می‌کنیم $E' \subset E^\circ$، پس $E' = E^\circ$.

بدین‌ترتیب، همهٔ زیرفضاهای مستوی را می‌توان از انتقال زیرفضاهای خطی به دست آورد. بنابراین، چنانچه تصویر دقیقی از زیرفضاهای خطی در ذهن داشته باشیم، توصیف کاملی نیز از زیرفضاهای مستوی به دست می‌آوریم. تا انتهای این بخش می‌کوشیم شناخت کامل‌تری از زیرفضاهای خطی به دست آوریم.

در خطوط راست گذرنده از ۰ دیدیم که هر چنین مجموعه‌ای از مضرب‌های حقیقیِ عنصرِ ناصفر A از $\mathbb{R}^n$ تشکیل شده است. این مجموعه را با A نمایش دادیم:

$$\mathrm{A} \neq \circ,\ \langle \mathrm{A} \rangle = \{t\mathrm{A} \colon t \in \mathbb{R}\}$$

برای هر صفحهٔ گذرنده از مبدأ، دو عضو A_1 و A_2 از $\mathbb{R}^n$ وجود دارند که هیچ یک مضربی حقیقی از دیگری نیست و صفحهٔ گذرنده از مبدأ به شکل زیر است:

$$\langle \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \rangle = \{t_1\mathrm{A}_1 + t_2\mathrm{A}_2 \colon t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

وانگهی، از اینکه A_1 و A_2 هیچ یک مضرب حقیقی آن دیگری نیست نتیجه می‌شود $\mathrm{A}_1 \neq \circ$ و $\mathrm{A}_2 \neq \circ$؛ زیرا، مثلاً اگر $\mathrm{A}_1 = \circ$، آنگاه $\mathrm{A}_1 = \circ \cdot \mathrm{A}_2$، یعنی A_1 مضربی حقیقی از A_2 است.

در فضای سه‌بعدی متداول هندسه، اگر سه بردار A_1، A_2، A_3 ساطع از ۰ طوری باشند که امتدادهای آن‌ها در یک صفحه قرار نگیرد، هر بردار در $\mathbb{R}^3$ را می‌توان در امتداد این سه بردار تجزیه کرد، یعنی آن را به صورت $t_1\mathrm{A}_1 + t_2\mathrm{A}_2 + t_3\mathrm{A}_3$ نوشت. بنابراین، به نظر می‌رسد اگر A_1، A_2، و A_3 سه عضو $\mathbb{R}^n$ باشند به نحوی که خطوط راست گذرنده از ۰ و این سه نقطه در یک صفحه قرار نگیرند، مجموعهٔ

$$\langle \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \rangle = \{t_1\mathrm{A}_1 + t_2\mathrm{A}_2 + t_3\mathrm{A}_3 \colon t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$

نامزد مناسبی برای «زیرفضای خطی سه‌بعدی» باشد. به طور کلی، نشان خواهیم داد که هر زیرفضای خطی kبعدیِ E از $\mathbb{R}^n$، $k \geq ۱$، به شکل زیر است:

$$\langle \mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k \rangle = \{t_۱\mathrm{A}_۱ + \ldots + t_k\mathrm{A}_k : t_۱, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

که در آن شرط مناسبی روی $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ در نظر گرفته می‌شود. این «شرط مناسب» باید به گونه‌ای باشد که در حالت $k = ۱$ به $\mathrm{A}_۱ \neq ۰$ تبدیل شود، در حالت $k = ۲$ به این تبدیل شود که $\mathrm{A}_۱$ و $\mathrm{A}_۲$ هم‌راستا نباشند، و در حالت $k = ۳$ به این تبدیل شود که سه بردار $\mathrm{A}_۱$، $\mathrm{A}_۲$، $\mathrm{A}_۳$ در یک صفحه قرار نگیرند. در ادامهٔ بحث از اصطلاح سودمند «ترکیب خطی» استفاده می‌کنیم.

اگر $\mathrm{A}_۱$، ...، A_k عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند، مقصود از **ترکیب خطی** $\mathrm{A}_۱$، ...، A_k عضوی به شکل $t_۱\mathrm{A}_۱ + \cdots + t_k\mathrm{A}_k$ است که در آن $t_۱$، ...، t_k اعداد حقیقی‌اند.

۲۷ ۳ تعریف

فرض کنید $\mathrm{A}_۱$، ...، A_k عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند. مجموعهٔ $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ را **مستقل خطی** می‌نامیم در صورتی که هیچ ترکیب خطی $t_۱\mathrm{A}_۱ + \ldots + t_k\mathrm{A}_k$ صفر نباشد مگر اینکه همهٔ t_iها صفر باشند.

اگر $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ مستقل خطی نباشد، آن را **وابستهٔ خطی** می‌نامیم. نفی تعریف استقلال خطی این است که ضرایب حقیقی $t_۱$، ...، t_K که همگی صفر نیستند موجود باشند به طوری که $t_۱\mathrm{A}_۱ + \cdots + t_k\mathrm{A}_k = ۰$. ■

۲۷ ۴ مثال

مجموعهٔ تک‌عنصری $\{\mathrm{A}\}$ به ازای $k = ۱$ وابستهٔ خطی است اگر عدد حقیقی ناصفر t به صورت $t\mathrm{A} = ۰$ موجود باشد. این غیرممکن است مگر اینکه $\mathrm{A} = ۰$. پس شرط لازم و کافی برای استقلال خطیِ $\{\mathrm{A}\}$ این است که $\mathrm{A} \neq ۰$. ■

۲۷ ۵ مثال

وابستگی خطی $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ به ازای $k = ۲$ معادل این است که $t_۱\mathrm{A} + t_۲\mathrm{B} = ۰$ و دست‌کم یکی از $t_۱$ و $t_۲$ صفر نباشد. مثلاً اگر $t_۱ \neq ۰$، می‌توان نوشت $\mathrm{A} = \left(-\frac{t_۲}{t_۱}\right)\mathrm{B}$، یعنی A مضربی حقیقی از B است. به همین ترتیب، اگر $t_۲ \neq ۰$، B مضربی حقیقی از A است. پس استقلال خطی $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ بدین معناست که هیچ یک از A و B مضربی حقیقی از دیگری نیست. بدین‌ترتیب، شرطی را که بر $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ برای تعریف صفحهٔ $\mathrm{a} + \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ قائل شدیم می‌توانیم به صورتی بنویسیم که $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ مستقل خطی باشد. ■

۲۷ ۶ مثال

اگر در مجموعهٔ $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ یک یا چند تا از A_iهای nتاییِ $(۰, \ldots, ۰) = ۰$ باشد، مجموعه وابستهٔ خطی است، زیرا، مثلاً اگر $\mathrm{A}_j = ۰$، t_iها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$t_i = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

و در این صورت، بدون آنکه همهٔ t_iها صفر باشند، $t_۱\mathrm{A}_۱ + \cdots + t_k\mathrm{A}_k = ۰$ خواهد بود. ■

۲۷ ۷ مثال

یادآوری می‌کنیم که e_j در $\mathbb{R}^n$ به صورت $(۰, \ldots, ۰, ۱, ۰, \ldots, ۰)$ تعریف می‌شود که در آن عدد ۱ در مکان jامِ nتایی است. می‌خواهیم نشان دهیم مجموعهٔ $\{\mathrm{e}_۱, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است. می‌دانیم:

$$t_۱\mathrm{e}_۱ + \cdots + t_n\mathrm{e}_n = (t_۱, \ldots, t_n)$$

پس اگر $t_1\mathrm{e}_1+\cdots+t_n\mathrm{e}_n=0$، به ازای هر i، $t_i=0$ به دست می‌آید؛ یعنی همهٔ ضرایب لزوماً صفرند. ■

۲۷ گزاره ۸ فرض کنید $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ عناصری از $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت، شرطی لازم و کافی برای وابستهٔ خطی بودنِ $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ این است:

الف) اگر $k=1$، $\mathrm{A}_1=0$؛

ب) اگر $k>1$، یکی از A_iها را باید بتوانیم به صورت ترکیبی خطی از A_iهای دیگر بنویسیم.

برهان اگر (الف) برقرار باشد، طبق مثال ۶، $\{\mathrm{A}_1\}$ وابستهٔ خطی است. اگر (ب) برقرار باشد، مثلاً A_j ترکیبی خطی از دیگر A_iها باشد، $\mathrm{A}_j=\sum_{i\neq j}t_i\mathrm{A}_i$. با انتقال A_j به طرف دیگر تساوی داریم $-\mathrm{A}_j+\sum_{i\neq j}t_i\mathrm{A}_i=0$ و همهٔ ضرایب صفر نیستند (مثلاً ضریب A_j)، پس مجموعهٔ $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ وابستهٔ خطی است.

برعکس فرض کنید $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ وابستهٔ خطی است. اگر $k=1$، طبق مثال ۴، نتیجهٔ (الف) حاصل می‌شود. اگر $k>1$ و بدون آنکه همهٔ ضرایب (مثلاً $t_j\neq 0$) صفر باشند، $t_1\mathrm{A}_1+\cdots+t_k\mathrm{A}_k=0$. در این صورت، با انتقال $t_j\mathrm{A}_j$ به طرف دیگر تساوی و تقسیم کردن دو طرف بر $-t_j$ می‌بینیم که A_j ترکیبی خطی از A_iهای دیگر است. ■

حکم سادهٔ زیر را فعلاً برای ارجاع‌های بعدی به صورت گزاره می‌آوریم.

۲۷ گزاره ۹ فرض کنید $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ زیرمجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد.

الف) اگر $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن نیز مستقل خطی است.

ب) اگر $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، هر مجموعهٔ $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k,\mathrm{A}_{k+1},\mathrm{A}_l\}$ شامل آن نیز وابستهٔ خطی است.

برهان

الف) اگر زیرمجموعه‌ای از $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، بدون آنکه همهٔ ضرایب صفر باشند، ترکیبی خطی از اعضای آن زیرمجموعه صفر می‌شود. اگر A_iهای دیگر را با ضریب صفر به این ترکیب خطی بیفزاییم، بدون آنکه همهٔ ضرایب صفر باشند، ترکیبی خطی از $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ صفر می‌شود که خلاف استقلال خطی $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ است.

ب) اگر $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، داریم $t_1\mathrm{A}_1+\cdots+t_k\mathrm{A}_k=0$، بدون آنکه همهٔ t_iها صفر باشند. بنابراین بدون آنکه همهٔ t_iها صفر باشند،

$$t_1\mathrm{A}_1+\cdots+t_k\mathrm{A}_k+0\mathrm{A}_{k+1}+\cdots+0\mathrm{A}_l=0.$$

پس $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_l\}$ نیز وابستهٔ خطی است. ■

حال فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است. مجموعهٔ

$$\langle A_1, \ldots, A_k\rangle = \{t_1A_1 + \cdots + t_kA_k | t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

یعنی مجموعهٔ همهٔ ترکیب‌های خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$، زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ است، زیرا شرط‌های (الف) و (ب) گزارهٔ ۱ در همین بخش را برآورده می‌کند. هدف این است نشان دهیم اگر $E \neq \{0\}$ زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد، زیرمجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ از عناصر E لزوماً وجود دارد که در آن $E = \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$. شگرد اصلی ما برای اثبات این مطلب و چند حکم اساسیِ دیگر در مورد زیرفضاهای خطیِ قضیهٔ زیر است که به سببِ فرایندِ به‌کاررفته در اثبات آن به «قضیهٔ مبادله» معروف شده است.

۲۷ **۱۰ قضیه**

فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است، $E = \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$، و $\{B_1, \ldots, B_l\}$ عضوهایی از Eاند به نحوی که $\{B_1, \ldots, B_l\}$ مستقل خطی باشد. در این صورت، $l \leq k$.

برهان فرض کنید $l > k$. نشان می‌دهیم این فرض به تناقض منجر می‌شود. چون $B_1 \in E$، می‌توان نوشت:

$$B_1 = t_1A_1 + \cdots + t_kA_k \tag{1}$$

دست‌کم یکی از t_iها باید ناصفر باشد؛ چه، در غیراین‌صورت، $B_1 = 0$ و مجموعهٔ $\{B_1, \ldots, B_l\}$ بنابر مثال ۶ نمی‌تواند مستقل خطی باشد. مثلاً فرض می‌کنیم $t_1 \neq 0$ (در صورت لزوم اندیس‌ها را تعویض می‌کنیم به طوری که ضریب با اندیس ۱ ناصفر باشد). پس با مبادله یا جایگزین کردنِ B_1 و t_1A_1 در دو طرف (۱):

$$-t_1A_1 = -B_1 + t_2A_2 + \cdots + t_kA_k$$
$$A_1 = \left(\frac{1}{t_1}\right)B_1 - \frac{t_2}{t_1}A_2 - \cdots - \frac{t_k}{t_1}A_k \tag{2}$$

از (۲) نتیجه می‌شود که هر ترکیبِ خطیِ $\{A_1, \ldots, A_k\}$، یعنی هر عضو E، ترکیبی خطی از $\{B_1, A_2, \ldots, A_k\}$ است. پس برای عنصر $B_2 \in E$ می‌توان نوشت:

$$B_2 = s_1B_1 + s_2A_2 + \cdots + s_kA_k \tag{3}$$

در اینجا همهٔ $\{s_2, \ldots, s_k\}$ نمی‌توانند صفر باشند، چون در این صورت $B_2 = s_1B_1$، و مجموعهٔ $\{B_1, B_2\}$ وابستهٔ خطی می‌شود. طبق بند (ب) گزارهٔ ۹، مجموعهٔ $\{B_1, \ldots, B_l\}$ نیز وابستهٔ خطی می‌شود که خلاف فرض قضیه است. پس دست‌کم یکی از $\{s_2, \ldots, s_k\}$ صفر نیست که مجدداً، در صورت لزوم ــ با تعویض اندیس‌ها ــ فرض می‌کنیم $s_2 \neq 0$. با جابه‌جا کردن B_2 و s_2A_2 در (۳) می‌نویسیم:

$$-s_2A_2 = s_1B_1 - B_2 + s_3A_3 + \cdots + s_kA_k$$
$$A_2 = \left(-\frac{s_1}{s_2}\right)B_1 + \left(\frac{1}{s_2}\right)B_2 - \frac{s_3}{s_2}A_3 - \cdots - \frac{s_k}{s_2}A_k \tag{4}$$

از این رابطه معلوم است که هر ترکیب خطی $\{B_1, A_2, \ldots, A_k\}$ (و در نتیجه هر ترکیب خطی $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$) ترکیبی خطی از $\{B_1, B_2, A_3, \ldots, A_k\}$ است. با ادامهٔ همین فرایند، A_iها را، یک به یک، با B_iها مبادله می‌کنیم. از آنجا که $l > k$ فرض شده است، این فرایند با تعویض B_k متوقف می‌شود و به این نتیجه می‌رسیم که هر ترکیب خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$، یعنی هر عضو E ترکیبی خطی از $\{B_1, \ldots, B_k\}$ است. بدین‌ترتیب، B_{k+1} باید ترکیبی خطی از $\{B_1, \ldots, B_k\}$ باشد که این خلاف فرض استقلال خطی $\{B_1, \ldots, B_l\}$ است. این تناقض مشخص می‌کند که پس از k گام مبادله یا قبل از آن، همهٔ B_iها باید مبادله شوند، یعنی $l \leq k$.

■

از این قضیه نتایجی به دست می‌آید که در زیر به آن‌ها پرداخته‌ایم.

۲۷ ۱۱ نتیجه فرض کنید $E \neq \{0\}$ زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت، مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ از عناصر E وجود دارد، $1 \leq k \leq n$، که $E = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$. ■

برهان چون $E \neq \{0\}$، عنصری ناصفر مانند A_1 در E موجود است. اگر $\langle A_1 \rangle = E$، حکم ثابت می‌شود. وگرنه، عضوی چون A_2 از E وجود دارد که در آن $A_2 \notin \langle A_1 \rangle$. توجه کنید که $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است، زیرا از یک طرف A_2 مضربی از A_1 نیست و، از طرف دیگر، اگر $A_1 = cA_2$ به ازای عدد حقیقی c، یا $c = 0$ که در این صورت $A_1 = 0$ و این خلاف فرض است، یا هنگامی که $c \neq 0$، $A_2 = c^{-1}A_1$ به دست می‌آید، که خلاف $A_2 \notin \langle A_1 \rangle$ است. حال اگر $E = \langle A_1, A_2 \rangle$، حکم به اثبات رسیده است. وگرنه عضوی چون A_3 از E هست که $A_3 \notin \langle A_1, A_2 \rangle$. به طور کلی، اگر این فرایند را به گونه‌ای ادامه دهیم که مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_j\}$ از عناصر E در دست باشد و $\langle A_1, \ldots, A_j \rangle$ همهٔ E نباشد، عنصری مانند A_{j+1} از E یافت می‌شود که $A_{j+1} \notin \langle A_1, \ldots, A_j \rangle$. در این صورت، ادعا می‌کنیم که $\{A_1, \ldots, A_j, A_{j+1}\}$ مستقل خطی است. فرض کنید:

$$c_1A_1 + \cdots + c_jA_j + c_{j+1}A_{j+1} = 0$$

حال $c_{j+1} \neq 0$ غیرممکن است؛ زیرا، در این صورت، با انتقال $c_{j+1}A_{j+1}$ به طرف دیگر تساوی و تقسیم کردن بر $(-c_{j+1})$، می‌توانیم A_{j+1} را به صورت عضوی از $\langle A_1, \ldots, A_j \rangle$ نمایش دهیم. پس $c_{j+1} = 0$ و از استقلال خطی $\{A_1, \ldots, A_j, A_j\}$ نتیجه می‌شود که $c_1 = \cdots = c_j = 0$. بنابراین همهٔ c_iها صفرند و استقلال خطی $\{A_1, \ldots, A_{j+1}\}$ به اثبات می‌رسد. بدین‌ترتیب، تا زمانی که $\langle A_1, \ldots, A_j \rangle$ برابر E نشود، می‌توانیم افزودن عناصر جدید E را به مجموعهٔ مستقل خطی ادامه دهیم. ولی، بنابر مثال ۷ در همین بخش، توجه کنید که $\mathbb{R}^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ و همهٔ A_iها عنصر $\mathbb{R}^n$اند. پس، بنابر قضیهٔ مبادله، این فرایند نمی‌تواند بیش از n گام ادامه یابد. بنابراین، عدد طبیعی kای وجود دارد $(k \leq n)$ که در آن $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle = E$.

■

این نتیجهٔ مهم شناساییِ موردِ نظرِ زیرفضاهای خطی $\mathbb{R}^n$ را تکمیل می‌کند: هر زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ بجز $\{0\}$ به شکل $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ است که در آن $1 \leq k \leq n$. عدد k را **بُعد** E می‌نامیم. سؤالی که بلافاصله پیش می‌آید این است که آیا عدد k ویژگی ذاتی و هندسی زیرفضای خطی E است یا به روشی موکول می‌شود که برای یافتن زیرمجموعهٔ مستقلِ $\{A_1, \ldots, A_k\}$ به کار می‌گیریم؟ نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد که «بُعد» واقعاً خاصیت ذاتی زیرفضاست.

۲۷ ۱۲ نتیجه

فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_k\}$ و $\{B_1, \ldots, B_l\}$ دو زیرمجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند که در آن‌ها $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle = \langle B_1, \ldots, B_l \rangle$. در این صورت، $l = k$.

برهان قرار می‌دهیم $E = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle = \langle B_1, \ldots, B_l \rangle$. طبق قضیهٔ مبادله داریم: $l \leq k$، و نیز $k \leq l$، پس $l = k$. ■

۲۷ ۱۳ نتیجه

فرض کنید E یک زیرفضای خطی kبُعدی $\mathbb{R}^n$ است و $\{B_1, \ldots, B_k\}$ یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از عناصر E. دراین‌صورت، $E = \langle B_1, \ldots, B_k \rangle$.

برهان چون هر B_i عضو E است، داریم $\langle B_1, \ldots, B_k \rangle \subset E$. اگر $\subset$ تساوی نباشد، عضوی چون B_{k+1} در E وجود دارد که در $\langle B_1, \ldots, B_k \rangle$ نیست. دراین‌صورت، ادعا می‌کنیم $\{B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}\}$ مستقل خطی است. فرض کنید برای اعداد حقیقی $\{t_1, \ldots, t_{k+1}\}$ رابطهٔ $t_1 B_1 + \cdots + t_k B_k + t_{k+1} B_{k+1} = 0$ برقرار است. اگر $t_{k+1} \neq 0$، می‌توان با انتقال $t_{k+1} B_{k+1}$ به طرف راست رابطه و تقسیم کردن بر $(-t_{k+1})$، B_{k+1} را به صورت عضوی از $\langle B_1, \ldots, B_k \rangle$ نوشت که این خلاف انتخاب B_{k+1} است. پس $t_{k+1} = 0$ و در نتیجه $t_1 B_1 + \cdots + t_k B_k = 0$. ولی $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی فرض شده است، پس $t_1 = \cdots = t_k = 0$، یعنی همهٔ t_iها صفرند و درنتیجه $\{B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}\}$ مستقل خطی است. ولی این نتیجه با حکم قضیهٔ مبادله در تناقض است، پس لزوماً $E = \langle B_1, \ldots, B_k \rangle$. ■

نتایج اثبات‌شده در بالا را می‌توان بدین‌صورت جمع‌بندی کرد: اگر E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، می‌توان عددی صحیح چون k $(0 \leq k \leq n)$ به نام بُعد E، یا $\dim E$، را به E نسبت داد. اگر $k = 0$، لزوماً $E = \{0\}$ و اگر $k > 0$، زیرمجموعهٔ مستقلِ خطی‌ای مانند $\{A_1, \ldots, A_k\}$ از عناصر E وجود دارد که در آن $E = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$. برعکس، اگر $\{B_1, \ldots, B_l\}$ مجموعهٔ مستقل خطی‌ای از عناصر E باشد، آنگاه $E = \langle B_1, \cdots, B_l \rangle$ اگر و فقط اگر $l = k$. هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی kعضوی از یک زیرفضای خطی kبُعدی E از $\mathbb{R}^n$ را **پایه‌ای** برای E می‌نامیم. اگر $\{A_1, \cdots, A_k\}$ پایه‌ای برای E باشد و x عضوی از E، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathrm{x} = t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k \qquad (5)$$

که در اینجا $\{t_1, \ldots, t_k\}$ اعداد حقیقی مناسبی‌اند.

از گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود که در نمایش (۵)، ضرایب $\{t_1, \ldots, t_k\}$ به صورتی منحصر به فرد تعیین می‌شوند. مجموعهٔ $\{e_1, \ldots, e_n\}$ به **پایهٔ متداول** $\mathbb{R}^n$ معروف است.

۲۷ گزاره ۱۴ فرض کنید $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ زیرمجموعهٔ مستقل خطی‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد و

$$s_1\mathrm{A}_1+\cdots+s_k\mathrm{A}_k=t_1\mathrm{A}_1+\cdots+t_k\mathrm{A}_k \qquad (۶)$$

که در اینجا s_iها و t_iها اعدادی حقیقی‌اند. در این‌صورت، $s_1=t_1$، $s_2=t_2$، …، $s_k=t_k$.

برهان با انتقال همهٔ جملات به یک طرف رابطهٔ (۶)،

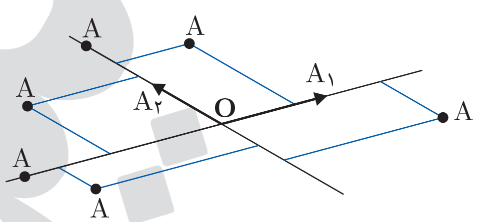
$$(t_1-s_1)\mathrm{A}_1+\cdots+(t_k-s_k)\mathrm{A}_k=0$$

چون $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ مستقل خطی است، همهٔ ضرایب باید صفر باشند و حکم به اثبات می‌رسد. ■

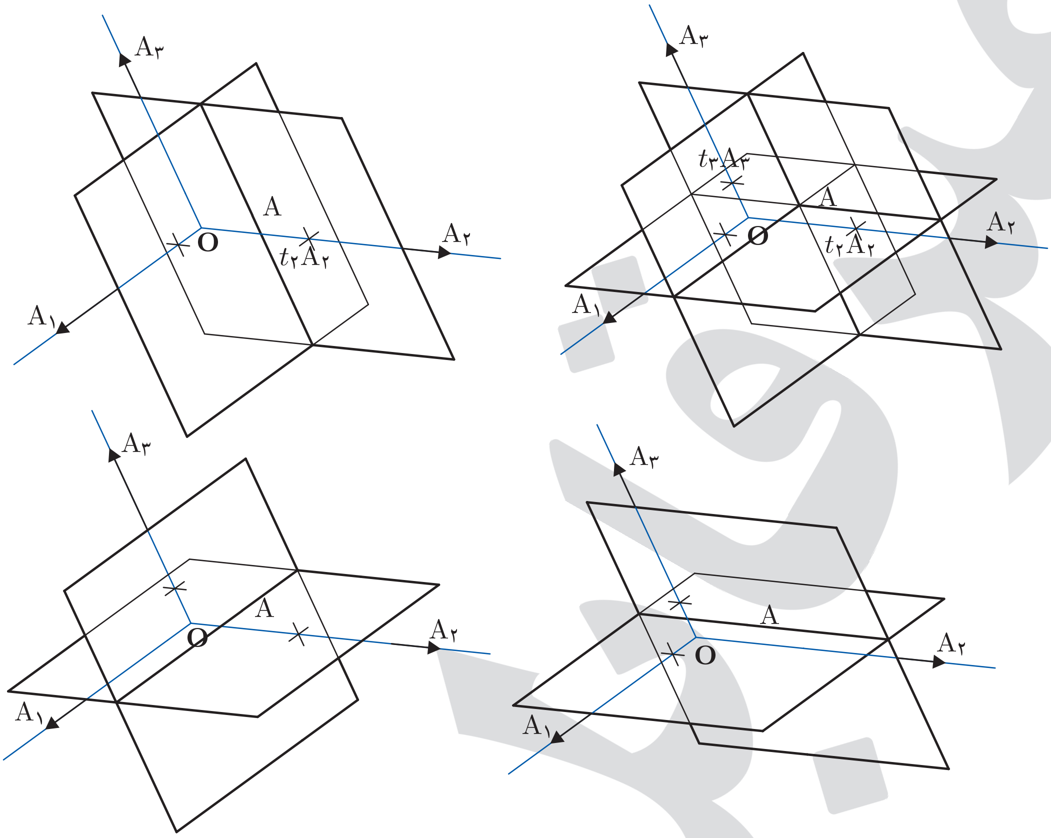
بدین‌ترتیب، هرگاه پایه‌ای برای زیرفضای خطی kبعدی E در نظر بگیریم، هر عضو E نمایشی یکتا به صورت ترکیب خطی اعضای پایه دارد. کل $\mathbb{R}^n$ زیرفضای خطی nبعدیِ خودِ $\mathbb{R}^n$ است، زیرا $\mathbb{R}^n=\langle \mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n\rangle$ و در مثال ۷ دیدیم که $\{\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n\}$ مستقل خطی است. درواقع، $\mathbb{R}^n$ تنها زیرفضای خطی nبُعدی $\mathbb{R}^n$ است زیرا برای هر زیرفضای خطی nبعدی E از $\mathbb{R}^n$ داریم $E=\langle \mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n\rangle$ که $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n\}$ مستقل خطی است. پس طبق نتیجهٔ ۱۳ همین بخش، $\mathbb{R}^n=\langle \mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n\rangle$.

نمایش عناصر E به صورت ترکیبِ خطیِ عناصرِ پایه تعبیر مأنوسی در فضاهای آشنای هندسی $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ دارد. در شکل ۷.۷ پایه‌ای متشکل از مجموعهٔ دو عضوی مستقل خطی $\{\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2\}$ را برای $\mathbb{R}^2$ در نظر گرفته‌ایم. برای نمایش A به‌صورت $t_1\mathrm{A}_1+t_2\mathrm{A}_2$ از A به موازات محورهای دو بردار A_1 و A_2 خطوطی رسم می‌کنیم تا دو محور را در مضرب‌های $t_1\mathrm{A}_1$ از A_1 و $t_2\mathrm{A}_2$ از A_2 قطع کنند. بنابر تعریف جمع برداری داریم: $\mathrm{A}=t_1\mathrm{A}_1+t_2\mathrm{A}_2$. به همین ترتیب، در شکل ۸.۷، سه‌تایی مستقل خطی $\{\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ است. اگر از A صفحاتی به موازات صفحات $\langle \mathrm{A}_3,\mathrm{A}_2\rangle$، $\langle \mathrm{A}_1,\mathrm{A}_3\rangle$، و $\langle \mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2\rangle$ رسم کنیم، این صفحات به ترتیب محورهای $\langle \mathrm{A}_1\rangle$، $\langle \mathrm{A}_2\rangle$، و $\langle \mathrm{A}_3\rangle$ را در نقاطی چون $t_1\mathrm{A}_1$، $t_2\mathrm{A}_2$، و $t_3\mathrm{A}_3$ قطع می‌کنند و $\mathrm{A}=t_1\mathrm{A}_1+t_2\mathrm{A}_2+t_3\mathrm{A}_3$.

به‌طور کلی، اگر $\mathrm{x}=t_1\mathrm{A}_1+\cdots+t_k\mathrm{A}_k$ نمایش x نسبت به پایهٔ $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ برای E باشد، t_i را **مؤلفهٔ** iام x نسبت به پایهٔ $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ می‌نامیم. با توجه به یکتایی نمایش، مؤلفهٔ iام بی‌ابهام تعریف می‌شود. در تمرین ۷ آخر بخش خواننده باید این حکم را ثابت کند: اگر E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد و $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ زیرمجموعه‌ای از E که هر نقطهٔ E نمایش یکتایی به‌صورت ترکیب خطی $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ داشته باشد، آنگاه $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_k\}$ لزوماً مستقل خطی و پایه‌ای برای E است.



شکل ۷.۷



شکل ۸.۷

۲۷ مثال ۱۵ نشان می‌دهیم مجموعهٔ $\{A_۱, A_۲, A_۳\}$ که در آن $A_۱ = (۱, ۱, ۰)$، $A_۲ = (۰, ۰, ۲)$ و $A_۳ = (-۱, ۱, ۱)$، مستقل خطی است. پس پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۳$ پدید آمده است. فرض کنید $t_۱A_۱ + t_۲A_۲ + t_۳A_۳ = ۰$. باید نشان دهیم $t_۱ = t_۲ = t_۳ = ۰$. می‌نویسیم:

$$t_۱(۱, ۱, ۰) + t_۲(۰, ۰, ۲) + t_۳(-۱, ۱, ۱) = (۰, ۰, ۰)$$

$$(t_۱ - t_۳, t_۱ + t_۳, ۲t_۲ + t_۳) = (۰, ۰, ۰)$$

از مقایسهٔ مؤلفه‌های اول $t_۱ = t_۳$ و از مقایسهٔ مؤلفه‌های دوم $t_۱ = -t_۳$ حاصل می‌شود. بنابراین، $t_۱ = t_۳ = ۰$. از مقایسهٔ مؤلفه‌های سوم $۲t_۲ + t_۳ = ۰$ به دست می‌آید و از آنجا که $t_۳ = ۰$، $t_۲ = ۰$ نتیجه می‌شود. بنابراین، هر سه ضریب باید صفر باشند و استقلال خطی ثابت می‌شود. ■

۲۷ مثال ۱۶ فرض کنید $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای خطی kبُعدی E از $\mathbb{R}^n$ باشد و $c_۱$، ...، c_k همگی اعداد حقیقی مفروض و ناصفر باشند. قرار می‌دهیم $B_i = c_iA_i$، و نشان می‌دهیم $\{B_۱, \ldots, B_k\}$ پایه‌ای برای E است. با توجه به تعداد اعضای $\{B_۱, \ldots, B_k\}$، طبق نتیجهٔ ۱۳

همین بخش کافی است نشان دهیم $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی است. فرض کنید:

$$t_1 B_1 + \cdots + t_k B_k = 0$$

در این صورت،

$$(t_1 c_1) A_1 + \cdots + (t_k c_k) A_k = 0$$

ولی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است، پس $t_i c_i$ به ازای هر $i = 1, \ldots, k$ صفر می‌شود. ولی بنابر فرض، $c_i \neq 0$؛ پس t_i به ازای هر $i = 1, \ldots, k$ صفر می‌شود و حکم به اثبات می‌رسد. ■

مثال ۱۷ فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای خطی kبُعدی E از $\mathbb{R}^n$ باشد. مجموعهٔ $\{B_1, \ldots, B_k\}$ را به صورت $B_i = A_1 + \cdots + A_i$ تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_1 + A_2 \\ \vdots \\ B_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی است، پس پایه‌ای برای E تشکیل می‌شود. فرض کنید:

$$t_1 B_1 + \cdots + t_k B_k = 0$$

در این صورت،

$$(t_1 + \cdots + t_k) A_1 + (t_2 + \cdots + t_k) A_2 + \cdots + t_k A_k = 0$$

چون $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است چنین نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} t_1 + \cdots + t_k = 0 \\ t_2 + \cdots + t_k = 0 \\ \vdots \\ t_k = 0 \end{cases}$$

طبق آخرین تساوی، $t_k = 0$. اگر این مقدار را در تساوی ماقبل آخر، یعنی $t_{k-1} + t_k = 0$، قرار دهیم، $t_{k-1} = 0$ نتیجه می‌شود. با ادامهٔ جایگزینی در تساوی‌ها، از پایین به بالا، نتیجه می‌شود که همهٔ t_iها صفرند، پس $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی است. ■

مثال ۱۸ تعمیم سودمندی از مثال بالا به این شرح است. فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ باشد و $A'_1 = 0$، $A'_2 \in \langle A_1 \rangle$. به طور کلی، به ازای $i = 2, \ldots, k$،

$A'_i \in \langle A_1, \ldots, A_{i-1}\rangle$. به ازای $i = 1, \ldots, k$، قرار می‌دهیم $B_i = A_i + A'_i$. نشان می‌دهیم $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی است، پس پایه‌ای برای E تشکیل می‌شود. فرض کنید:

$$t_1 B_1 + \cdots + t_k B_k = 0 \tag{۷}$$

پس اگر بنویسیم:

$$A'_i = c_{i1} A_1 + \cdots + c_{i\,i-1} A_{i-1}$$

با جایگزینی در (۷)، چنین نتیجه می‌شود:

$$t_1 A_1 + t_2(A_2 + c_{21} A_1) + \cdots + t_k(A_k + c_{k1} A_1 + \cdots + c_{k\,k-1} A_{k-1}) = 0$$

$$(t_1 + t_2 c_{21} + \cdots + t_k c_{k1}) A_1 + \cdots + (t_{k-1} + t_k c_{k\,k-1}) A_{k-1} + t_k A_k = 0$$

چون $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 c_{21} + \cdots + t_k c_{k1} = 0 \\ \vdots \\ t_{k-1} + t_k c_{k\,k-1} = 0 \\ t_k = 0 \end{cases}$$

از آخرین رابطه داریم $t_k = 0$. با جایگزینی در رابطهٔ ماقبل آخر نتیجه می‌شود $t_{k-1} = 0$، و به همین ترتیب با ادامهٔ جایگزینی نتایج، از پایین به بالا، می‌بینیم که همهٔ t_iها صفرند، پس $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی است. این مثال را در آینده بارها به کار خواهیم برد. ■

در بحث آغاز این بخش دیدیم که زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ از انتقال یک زیرفضای خطی حاصل می‌شود. پس شناخت مؤثری را که در مورد زیرفضاهای خطی کسب کرده‌ایم می‌توانیم به‌راحتی در مورد زیرفضاهای مستوی به کار گیریم. هر زیرفضای مستوی E را می‌توانیم به صورت

$$a + E^\circ = \{a + x | x \in E^\circ\}$$

بنویسیم که در آن E° یک زیرفضای خطی (انتقال‌یافتهٔ E به 0) است و a یک عضو E. چنانکه در آغاز بخش پس از تعریف انتقال به 0 دیدیم، اگر b عضو E باشد، $(-b) + E$ همواره برابر E° است. به عبارت دیگر، به ازای هر دو عضو a و b از E، $a + E^\circ = b + E^\circ$. بدین‌ترتیب، به ازای هر دو پایهٔ $\{A_1, \ldots, A_k\}$ و $\{B_1, \ldots, B_k\}$ از E° و هر دو عضو a و b از E تساوی زیر برقرار است:

$$a + \langle A_1, \ldots, A_k\rangle = b + \langle B_1, \ldots, B_k\rangle \tag{۸}$$

و هر دو طرف نمایشی از E است.

بُعد یک زیرفضای مستوی E را برابر بُعدِ انتقال‌یافتهٔ آن به مبدأ، یعنی E°، تعریف می‌کنیم. اگر

E و F دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند، E و F را **موازی** می‌نامیم و می‌نویسیم $E\|F$ به این شرط که دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $E \cap F = \phi$؛

ب) اگر E° و F° انتقال‌یافته‌های E و F به ۰ باشند، داشته باشیم $E^\circ \subset F^\circ$ یا $F^\circ \subset E^\circ$.

در حالتی که E و F بُعد برابری داشته باشند، شرط (ب) را می‌توان به صورت $E^\circ = F^\circ$ نوشت. اگر شرط (الف) برای E و F برقرار باشد ولی (ب) برقرار نباشد، دو زیرفضای مستوی را **متنافر** می‌نامیم. بدین‌ترتیب، اگر اشتراک دو زیرفضای مستوی تهی باشد، این دو زیرفضا یا موازی‌اند یا متنافر.

۲۷ مثال ۱۹ وضعیت نسبی خط راست L و زیرفضای مستوی سه‌بعدی E را که در $\mathbb{R}^5$ به صورت زیر تعریف شده بررسی می‌کنیم:

$$L: \frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3 - 4}{0} = \frac{x_4 - 1}{1} = \frac{x_5 + 2}{-1}$$

$$E: \mathrm{e}_3 + \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5 \rangle$$

هر عضو E به صورت $\mathrm{e}_3 + t_1\mathrm{e}_1 + t_4\mathrm{e}_4 + t_5\mathrm{e}_5$ یعنی $(t_1, 0, 1, t_4, t_5)$ است. در مورد L، مؤلفهٔ سوم همهٔ نقاط آن مقدار ثابت $x_3 = 4$ است، پس E و L نقطهٔ مشترک ندارند. اگر L و e را به ۰ انتقال دهیم L° و E° به این صورت به دست می‌آیند:

$$L^\circ: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_5}{-1}$$

$$E^\circ: \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_5 \rangle$$

چون E° سه‌بعدی و L° یک‌بعدی است، قطعاً $E^\circ \not\subset L^\circ$. از طرف دیگر، نقطهٔ $(1, 2, 0, 1, -1)$ روی L° قرار دارد، ولی عضو E° نیست. زیرا مؤلفهٔ دوم همهٔ نقاط E° باید صفر باشد، پس $L^\circ \not\subset E^\circ$. نتیجه می‌گیریم L و E ممکن نیست موازی باشند و متنافرند. ■

۲۷ مثال ۲۰ وضعیت نسبی دو صفحهٔ زیر را در $\mathbb{R}^4$ بررسی می‌کنیم:

$$E_1: \langle \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3 + e_4 \rangle$$

$$E_2: (1, 0, 2, -1) + \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_4 \rangle$$

نقاط E_1 به شکل $s(\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2) + t(\mathrm{e}_3 + \mathrm{e}_4)$، یعنی $(s, -s, t, t)$، است و نقاط E_2 به صورت

$$(1, 0, 2, -1) + u(1, 0, 0, 0) + v(0, 0, 0, 1) = (1 + u, 0, 2, -1 + v)$$

که در اینجا s، t، u، و v همهٔ مقادیر حقیقی را می‌گیرند. برای اینکه نقطهٔ مشترکی وجود داشته باشد باید

$$\begin{cases} s = 1 + u \\ -s = 0 \\ t = 2 \\ t = -1 + v \end{cases}$$

نقطهٔ (۲, ۲, ۰, ۰) تنها جواب این دستگاه است؛ پس دو صفحه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. ■

توجه کنید که در این مثال دو صفحه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، ولی این وضعیت در فضای سه‌بعدی برای دو صفحه امکان‌پذیر نیست. در فضای سه‌بعدی دو صفحه یا موازی‌اند یا یکدیگر را در یک خط راست قطع می‌کنند. به طورکلی، اگر E و F دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ با بُعدهای k و l باشند، هر چه n بزرگ‌تر باشد، احتمالات بیشتری برای نحوهٔ قرارگرفتن E و F نسبت به هم وجود خواهد داشت. این موضوع را در آینده کامل بررسی می‌کنیم. در حال حاضر به گزارهٔ سادهٔ زیر اکتفا می‌کنیم.

۲۷ ۲۱ گزاره اگر E و F دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند، چنانچه اشتراک آن‌ها تهی نباشد یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ است. اگر E و F دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند، $E \cap F$ نیز یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است.

برهان فرض کنید $E \cap F$ تهی نیست. اگر P و Q دو نقطهٔ متمایز $E \cap F$ باشند، باید نشان دهیم خط راست گذرنده از P و Q به‌تمامی در $E \cap F$ قرار دارد. از آنجا که $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$ و $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in F$، و E و F زیرفضاهایی مستوی‌اند، خط گذرنده از P و Q به‌تمامی در E و به‌تمامی در F قرار می‌گیرد. پس این خط به‌تمامی در $E \cap F$ قرار دارد. از طرف دیگر، اگر $۰ \in E$ و $۰ \in F$، آنگاه $۰ \in E \cap F$؛ پس اشتراک دو زیرفضای خطی، علاوه بر اینکه زیرفضایی مستوی است، ۰ را نیز در بر می‌گیرد، بنابراین زیرفضایی خطی است. ■

۲۷ تمرین

۱. در هر مورد تحقیق کنید که مجموعهٔ داده‌شده مستقل خطی است یا وابستهٔ خطی:

الف) مجموعهٔ $\{(۱, -۱, ۲), (-۱, ۰, ۱), (۱, ۱, ۰)\}$ در $\mathbb{R}^۳$؛

ب) مجموعهٔ $\{(۱, ۰, ۰, ۱), (۱, ۰, ۱, ۰), (۱, ۱, ۰, ۰)\}$ در $\mathbb{R}^۴$؛

پ) مجموعهٔ $\{(۰, ۳, ۱, ۱), (۲, ۱, ۱, ۰), (۱, -۱, ۰, ۲)\}$ در $\mathbb{R}^۴$؛

ت) مجموعهٔ

$$\{\mathrm{e}_۱ + \mathrm{e}_۲, \mathrm{e}_۲ + \mathrm{e}_۳, \dots, \mathrm{e}_{n-۱} + \mathrm{e}_n, \mathrm{e}_n + \mathrm{e}_۱\}$$

در $\mathbb{R}^n$ (دو حالت زوج و فرد را برای n در نظر بگیرید).

۲. فرض کنید $\{\mathrm{v}_۱, \dots, \mathrm{v}_k\}$ به ازای $k \geq ۳$ مجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$، به ازای $n \geq k$، است و ویژگی‌های زیر را دارد:

الف) $\{\mathrm{v}_۱, \dots, \mathrm{v}_{k-۱}\}$ و $\{\mathrm{v}_۲, \dots, \mathrm{v}_k\}$ هر یک وابستهٔ خطی است.

ب) $\{\mathrm{v}_۲, \dots, \mathrm{v}_{k-۱}\}$ مستقل خطی است.

نشان دهید هر زیرمجموعهٔ $(k-۱)$تایی از $\{\mathrm{v}_۱, \dots, \mathrm{v}_k\}$ وابستهٔ خطی است.

۳. وضعیت نسبیِ (تقاطع، توازی، تنافر یا انطباقِ) زیرفضاهای داده‌شده را تعیین کنید:

الف) در $\mathbb{R}^۴$: خط راست $\frac{x_۱-۲}{۳} = \frac{x_۲}{-۱} = \frac{x_۳+۱}{-۲} = \frac{x_۴-۱}{۰}$ و زیرفضای خطی $\langle \mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲, \mathrm{e}_۳ \rangle$

ب) در $\mathbb{R}^۵$: خط راست

$$\frac{x_۱}{۲} = \frac{x_۲-۱}{۱} = \frac{x_۳+۱}{۰} = \frac{x_۴-۲}{-۱} = \frac{x_۵+۲}{۲}$$

و زیرفضای خطی $\langle \mathrm{e}_۲, \mathrm{e}_۲ - \mathrm{e}_۳, \mathrm{e}_۲ + \mathrm{e}_۴ \rangle$

پ) در $\mathbb{R}^5$: صفحهٔ

$$\langle (۰,۲,۰,۲,۱), (۱,۱,۲,۲,۲)\rangle$$

و زیرفضای مستوی

$$(-۱,-۱,۰,۲,۱)+\langle(۱,۰,۰,-۱,۰), (۰,۱,۲,-۱,-۱), (۲,۲,۰,۰,۱)\rangle$$

۴. برای هر یک از موارد زیر مثالی در $\mathbb{R}^5$ بیاورید:

الف) یک زیرفضای سه‌بعدی و یک زیرفضای دوبعدی با اشتراکی به صورت یک خط راست.

ب) یک زیرفضای سه‌بعدی و یک زیرفضای دوبعدی متنافر.

پ) یک خط راست و یک زیرفضای چهاربعدی موازی.

۵. اگر L و E به ترتیب یک خط راست و یک زیرفضای $(n-۱)$بُعدی از $\mathbb{R}^n$ باشند، که در آن $n \geq ۲$، ثابت کنید L و E نمی‌توانند متنافر باشند، یعنی اگر اشتراک L و E تهی باشد، آنگاه $L \| E$.

۶. فرض کنید E یک زیرفضای خطی kبُعدی $\mathbb{R}^n$ است، $۱ \leq l < k$ و $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_l\}$ یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از عناصر E است. نشان دهید عناصر $\mathrm{A}_{l+۱}$، ...، A_k ای از E وجود دارند که $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ پایه‌ای برای E است. (راهنمایی: از برهان گزارهٔ ۸ همین بخش تبعیت کنید.)

۷. فرض کنید E زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ زیرمجموعه‌ای از E که هر نقطهٔ E نمایش یکتایی به صورت ترکیب خطی $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ دارد. نشان دهید $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ مستقل خطی و پایه‌ای برای E است.

۸. طبق تمرین ۱۳ در بخش ۱، اگر L یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ باشد و P یک نقطهٔ خارج آن، یک و فقط یک خط راست L' گذرنده از P وجود دارد که موازی L است. اگر E یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ شامل L و P باشد، نشان دهید E شامل L' نیز می‌شود.

۹. نشان دهید هر زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ اجتماعی از دسته‌ای از خطوط راست موازی است.

۱۰. فرض کنید L و L' دو خط راست متنافر در $\mathbb{R}^n$ باشند که در آن $n \geq ۳$. نشان دهید زیرفضای مستوی سه‌بُعدی یکتایی در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل L و L' است.

۱۱. فرض کنید $\{P_۱, \ldots, P_{k+۱}\}$ نقاطی در $\mathbb{R}^n$ باشند که در آن $n \geq k+۱$. نشان دهید زیرفضای مستوی kبعدیِ E از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل $\{\mathrm{P}_۱, \ldots \mathrm{P}_{k+۱}\}$ است. اگر هیچ زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ با بُعد کوچک‌تر از k وجود نداشته باشد که شامل $\{\mathrm{P}_۱, \ldots, \mathrm{P}_{k+۱}\}$ باشد، نشان دهید E یکتاست. توجه کنید که این احکام تعمیم گزارهٔ ۷ در بخش ۱ است.

۱۲. فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$ با بُعدهای به ترتیب k و l باشند که در آن $n \geq k+l+۱$. نشان دهید زیرفضای مستوی $(k+l+۱)$بُعدی E از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل $E_۱$ و $E_۲$ است. تحت چه شرط اضافی E یکتاست؟

۱۳. دایره‌های C و C' در $\mathbb{R}^۳$ به صورت زیر تعریف شده‌اند. C دایره‌ای به شعاع واحد در صفحهٔ $(x_۱, x_۲, ۰)$ به مرکز $(۰,۰,۰)$ است و C' دایره‌ای به شعاع واحد در صفحهٔ $(۰, x_۲, x_۳)$ به مرکز $(۰,۱,۰)$. این دو دایره در $\mathbb{R}^۳$ به هم قلاب شده‌اند و نمی‌توان آن‌ها را بدون شکستن یکی از دیگری جدا کرد. حال $\mathbb{R}^۳$ را به صورت زیرفضای $(x_۱, x_۲, x_۳, ۰)$ از $\mathbb{R}^۴$ در نظر بگیرید. نشان دهید، بدون آنکه دو دایره یکدیگر را قطع کنند، با حرکت دادن C در $\mathbb{R}^۴$ می‌توان آن را از C' جدا کرد. (راهنمایی: به ازای $۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$، خانوادهٔ دایره‌های C_t را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$C_t\colon (x_۱ - ۲\sin t)^۲ + x_۲^۲ = ۱,\ x_۳ = ۰,\ x_۴ = \sin ۲t.)$$

۱۴. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. نشان دهید E زیرفضایی مستوی از $\mathbb{R}^n$ است اگر و فقط اگر شرط زیر برقرار باشد: به ازای هر u، v، w در E و هر عدد حقیقی r داشته باشیم: $ru - rv + w \in E$.

۱۵. فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند که $E_۱ \cap E_۲$ یک تک‌نقطه‌ای است. نشان دهید هیچ خط راستی در $E_۱$ با هیچ خط راستی در $E_۲$ موازی نیست.

۱۶. فرض کنید $E_۱$ یک زیرفضای مستوی kبُعدی $\mathbb{R}^n$ و $E_۲$ یک زیرفضای مستوی lبُعدی $\mathbb{R}^n$ باشند که در آن $k+l > n$، $k \geq ۱$ و $l \geq ۱$. نشان دهید خطی راست چون $l_۱$ در $E_۱$ و خطی راست مانند $l_۲$ در $E_۲$ وجود دارند که $l_۱ \| l_۲$.

۳۷ ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$

تاکنون مفاهیم ابتدایی نقطه، خط، صفحه، و توازی را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌ایم. در هندسهٔ مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ و بحث دربارهٔ موضوع‌های هندسی وابسته به آن‌هاست. برای این کار، رابطهٔ طول، زاویه، و ضرب داخلی بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم و خاطرنشان می‌سازیم که هر دو مفهوم «طول» و «زاویه» را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو، در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی را مبنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر u و v دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند، حاصل ضرب داخلی آن‌ها، $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}$، اغلب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{u}\cdot\mathrm{v} = |\mathrm{u}||\mathrm{v}|\cos\alpha \qquad (۱)$$

که $\alpha \in [0,\pi]$ زاویهٔ بین u و v است و $|\ |$ طول بردار را نمایش می‌دهد. با قرار دادن $\mathrm{u}=\mathrm{v}$، از (۱) نتیجه می‌شود:

$$|\mathrm{u}| = \sqrt{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}} \qquad (۲)$$

یعنی طول بردار را می‌توانیم برحسب ضرب داخلی بیان کنیم. حال اگر $\mathrm{u}\neq 0$ و $\mathrm{v}\neq 0$، به طوری که زاویهٔ بین آن‌ها، یعنی $\alpha\in[0,\pi]$، معنی داشته باشد، با توجه به (۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}\sqrt{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}} \qquad (۳)$$

تابع کسینوس روی بازهٔ $[0,\pi]$ یک به یک است و همهٔ مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد بازهٔ $[-1,1]$، را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع وارون $\cos^{-1}:[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$ وجود دارد و می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}\sqrt{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}}\right) \qquad (۴)$$

بدین‌ترتیب، مفهوم زاویهٔ بین دو بردار نیز به کمک (۴) از ضرب داخلی به دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل ضرب داخلی دو بردار را مستقل از «طول» و «زاویه» تعریف کرد، می‌توان با به کارگرفتن (۲) و (۴) به تعریف طول و زاویه رسید. در هندسهٔ تحلیلی دوبعدی و سه‌بعدی عبارتی جبری برای حاصلِ ضرب داخلی به دست می‌آید (به کمک قضیهٔ مثلثاتی «قاعدهٔ کسینوس») که این خواست را برآورده می‌کند. در $\mathbb{R}^2$، اگر $\mathrm{u}=(u_1,u_2)$ و $\mathrm{v}=(v_1,v_2)$، ثابت می‌شود:

$$\mathrm{u}\cdot\mathrm{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \qquad (۵)$$

و نیز در $\mathbb{R}^3$، برای $\mathrm{u}=(u_1,u_2,u_3)$ و $\mathrm{v}=(v_1,v_2,v_3)$ چنین به دست می‌آید:

$$\mathrm{u}\cdot\mathrm{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \qquad (۶)$$

عبارت‌های جبری (۵) و (۶) تعریف زیر را در $\mathbb{R}^n$ پیش می‌نهد.

۳۷ ۱ تعریف
برای دو بردار $\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ و $\mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n)$، حاصل ضرب داخلی، $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}$، عبارت است از:

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

■

خواص زیر همه به‌سادگی از این تعریف نتیجه می‌شوند.

۳۷ ۲ گزاره
خواص ابتدایی ضرب داخلی

الف) به ازای هر $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$، $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{u}$.

ب) به ازای هر $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathbb{R}^n$، $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = (\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}) + (\mathrm{u} \cdot \mathrm{w})$، و

$$(\mathrm{u} + \mathrm{v}) \cdot \mathrm{w} = (\mathrm{u} \cdot \mathrm{w}) + (\mathrm{v} \cdot \mathrm{w}).$$

پ) به ازای هر $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$، $(r\mathrm{u}) \cdot \mathrm{v} = r(\mathrm{u} \cdot \mathrm{v})$ و $\mathrm{u} \cdot (r\mathrm{v}) = r(\mathrm{u} \cdot \mathrm{v})$.

ت) به ازای هر $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$، $\mathrm{u} \cdot \mathrm{u} \geq 0$ و $\mathrm{u} \cdot \mathrm{u} = 0$ اگر و فقط اگر $\mathrm{u} = 0$.

با توجه به بند (ت) و با الهام از (۲)، **طول** $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\mathrm{u}| = \sqrt{\mathrm{u} \cdot \mathrm{u}} \qquad (۷)$$

∘ تنها nتاییِ دارای طول صفر است. برای $|\mathrm{u}|$، علاوه بر طول، اصطلاح‌های **نرم** و **قدرمطلق** نیز به کار می‌رود. گاه $|\mathrm{u}|$ را با $\|\mathrm{u}\|$ نمایش می‌دهند که آن را از قدرمطلق متمایز کنند ولی از آنجا که در $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ طول همان قدرمطلق است، نیازی به این تمایز نیست. ■

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویهٔ بین u و v را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کنیم که با تعریف ارائه‌شده در $\mathbb{R}^n$، مقدار عبارت $\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}\sqrt{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}}$ همواره در بازهٔ $[-1, 1]$ قرار دارد.

۳۷ ۳ گزاره
نابرابری کوشی‌ـشوارتس. به ازای هر $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$، داریم:

$$|\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}| \leq |\mathrm{u}||\mathrm{v}|$$

به‌علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری برابری این است که u و v همراستا باشند.

برهان نخست حالتی را در نظر بگیرید که v و u همراستا باشند. اگر یکی از u یا v صفر باشد، دو طرف نابرابری بالا صفر می‌شود؛ در غیر این صورت، به ازای عددی حقیقی r، $\mathrm{v} = r\mathrm{u}$ که در این حالت هر دو طرف نابرابری به $|r||\mathrm{u}|^2$ تبدیل می‌شود و برابری برقرار است. حال فرض کنید u و v همراستا نباشند، بالاخص $\mathrm{u} \neq 0$ و $\mathrm{v} \neq 0$. nتاییِ $x\mathrm{u} + \mathrm{v}$، $x \in \mathbb{R}$، را در نظر بگیرید. داریم $x\mathrm{u} + \mathrm{v} \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $\mathrm{v} = -x\mathrm{u}$ و همراستایی ایجاد می‌شود. پس:

$$(x\mathrm{u} + \mathrm{v}) \cdot (x\mathrm{u} + \mathrm{v}) > 0 \qquad \text{(طبق بند (ت))}$$

$$(x\mathrm{u}) \cdot (x\mathrm{u}) + (x\mathrm{u}) \cdot \mathrm{v} + \mathrm{v} \cdot (x\mathrm{u}) + (\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}) > 0 \qquad \text{(با استفادهٔ مکرر از بند (ب))}$$

$$(\mathrm{u} \cdot \mathrm{u})x^2 + 2(\mathrm{u} \cdot \mathrm{v})x + (\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}) > 0 \qquad \text{(با استفادهٔ مکرر از بندهای (ب) و (الف))}$$

این نابرابری درجهٔ دوم نسبت به x به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبیّن عبارت منفی است:

$$(\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})^{2}-(\mathrm{u}\cdot\mathrm{u})(\mathrm{v}\cdot\mathrm{v})<0$$

یا:

$$|\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}|^{2}<|\mathrm{u}|^{2}|\mathrm{v}|^{2}$$

که نابرابریِ مورد نظر است.

حال با توجه به نابرابریِ کوشی‌ـشوارتس داریم:

$$-1\leq\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}\sqrt{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}}\leq 1$$

و یگانه مقداری در $[0,\pi]$ را که کسینوس آن برابر $\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}\sqrt{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}}$ باشد زاویهٔ بین u و v می‌نامیم:

$$\measuredangle(\mathrm{u},\mathrm{v})=\cos^{-1}\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\sqrt{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}\sqrt{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}}\qquad(8)$$

حکم زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی ـ شوارتس نتیجه می‌شود.

۳۷ ۴ گزاره

نابرابری مثلث. به ازای هر $\mathrm{u},\mathrm{v}\in\mathbb{R}^n$

$$|\mathrm{u}+\mathrm{v}|\leq|\mathrm{u}|+|\mathrm{v}|\cdot$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از u یا v مضربی نامنفی از دیگری باشد.

برهان کافی است نابرابری برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|\mathrm{u}+\mathrm{v}|^{2}\leq|\mathrm{u}|^{2}+|\mathrm{v}|^{2}+2|\mathrm{u}||\mathrm{v}|$$

که معادل است با:

$$(\mathrm{u}+\mathrm{v})\cdot(\mathrm{u}+\mathrm{v}|)\leq(\mathrm{u}\cdot\mathrm{u})+(\mathrm{v}\cdot\mathrm{v})+2|\mathrm{u}||\mathrm{v}|$$

و پس از ساده کردن:

$$\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}\leq|\mathrm{u}||\mathrm{v}|$$

$$|\mathrm{u}||\mathrm{v}|\cos\measuredangle(\mathrm{u},\mathrm{v})\leq|\mathrm{u}||\mathrm{v}|\quad(\text{طبق نتیجهٔ نابرابری کوشی‌ـشوارتس})$$

اگر u یا v صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفرِ دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطهٔ بالا معادل است با:

$$\cos\measuredangle(\mathrm{u},\mathrm{v})\leq 1$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos\measuredangle(\mathrm{u},\mathrm{v})=1$، یعنی u و v همراستا و هم‌جهت باشند.

برای دو عنصر u و v از $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $u \perp v$ و می‌گوییم u بر v عمود است در صورتی که $u \cdot v = ۰$. قضیهٔ فیثاغورس که پایهٔ هندسهٔ اقلیدسی است در $\mathbb{R}^n$ با تعاریف ذکرشده برای طول و زاویه برقرار است.

۳۷ ۵ قضیه

قضیهٔ فیثاغورس. هرگاه به ازای $u, v \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $u \perp v$، آنگاه

$$|u+v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$$

برهان عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u+v)\cdot(u+v) = (u\cdot u) + (v \cdot v)$$

نوشت که با توجه به $u \cdot v = ۰$ برقرار است.

■

توجه کنید که با همین استدلال (یا قرار دادن $-v$ به جای v)، رابطهٔ

$$|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$$

نیز تحت فرض $u \cdot v = ۰$ برقرار است. در $\mathbb{R}^n$ نیز، مانند $\mathbb{R}^۲$، قضیهٔ فیثاغورس به شکل $|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$ حالت خاص قاعدهٔ کسینوس است که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \qquad (\text{به ازای هر } u \neq ۰، v \neq ۰) \qquad (۹)$$

این رابطه نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبهٔ بالا با استفاده از (۸) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |u-v|^۲ &= (u-v)\cdot(u-v) = |u|^۲ + |v|^۲ - ۲(u\cdot v) \\ &= |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \quad (\text{طبق } (۸)) \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_n)$ دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصلهٔ x از y، که گاهی با $d(x,y)$ نمایش داده می‌شود، برابر $|x-y|$ تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ می‌دانیم سازگار است.

قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز بیان کنیم.

۳۷ ۶ نتیجه

نابرابری مثلث. برای $\{x,y,z\}$ در $\mathbb{R}^n$:

$$|y-z| \leq |y-x| + |x-z|$$

■

۳۷ ۷ نتیجه

قضیهٔ فیثاغورس. هرگاه برای $\{x,y,z\}$ در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $(x-y) \perp (x-z)$، آنگاه

$$|y-z|^۲ = |y-x|^۲ + |z-x|^۲$$

■

۳۷ ۸ نتیجه

قاعدهٔ کسینوس. به ازای هر $\{x,y,z\}$ در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$|y-z|^۲ = |y-x|^۲ + |z-x|^۲ - ۲|y-x||z-x|\cos\measuredangle(y-x, z-x)$$

هر یک از این روابط با جایگزینی در رابطهٔ متناظر به دست می‌آید. در نتیجهٔ ۶ در همین بخش (نابرابری مثلث) قرار می‌دهیم $u = y - x$ و $v = x - z$، آنگاه $u + v = y - z$. در مورد نتایج ۷ و ۸، می‌نویسیم $u = y - x$ و $v = z - x$، آنگاه $u - v = y - z$. ■

تصویر قائم روی یک راستا

یکی از موارد استفادهٔ مهم ضرب داخلی در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می‌آورد (شکل ۹.۷).

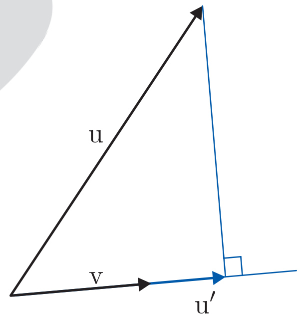
۳۷ ۹ تعریف

اگر $u, v \neq ۰$ در $\mathbb{R}^۳$ باشند، u'، تصویر قائم u بر راستای v، برداری است که طول آن برابر $|u|| \cos \measuredangle(u, v)|$ است (در حالتی که $u = ۰$، این طول برابر صفر در نظرگرفته می‌شود، هرچند زاویهٔ بین u و v تعریف نشده است)، u' مضربی از v است، $u' = rv$، و علامت r با علامت کسینوس زاویهٔ بین u و v یکی است. بدین‌ترتیب، اگر $\frac{v}{|v|}$ بردار واحد در جهت v باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$u' = |u| \cos \measuredangle(u, v) \frac{v}{|v|} \qquad (۱۰)$$

یا معادل آن:

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^۲} v \qquad (۱۱)$$



شکل ۹.۷

با توجه به این که عبارت‌های سمت راست (۱۱) همه در $\mathbb{R}^n$ معنی‌دارند، می‌توانیم تصویر قائم u بر $v \neq ۰$ در $\mathbb{R}^n$ را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که v یک بردار واحد باشد:

$$u' = (u \cdot v)v \qquad (|v| = ۱ \text{ اگر}) \qquad (۱۲)$$

مثلاً، پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$، یعنی $\{e_۱, \ldots, e_n\}$، را در نظر بگیرید. بدین‌ترتیب:

$$e_۱ = (۱, ۰, \ldots, ۰), e_۲ = (۰, ۱, ۰, \ldots, ۰), \ldots, e_n = (۰, \ldots, ۰, ۱)$$

هر $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ را می‌توان به صورت

$$x = x_۱e_۱ + \cdots + x_ne_n$$

نوشت. درواقع، x_ie_i تصویر قائم x بر راستای e_i (محور iاُم) است:

$$(x \cdot e_i)e_i = x_ie_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} (x \cdot e_i)e_i \qquad (۱۳)$$

مطلب بالا را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد. فرض کنید E زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $B = \{b_۱, \ldots, b_k\}$ پایه‌ای برای E. پایهٔ B را **متعامد** می‌نامیم در صورتی که به ازای هر $i \neq j$، $b_i \perp b_j$. اگر، به‌علاوه، به ازای هر $i = ۱, \ldots, k$، $|b_i| = ۱$، پایهٔ B یکامتعامد خوانده می‌شود. نشان می‌دهیم حکمی مشابه (۱۳) برای هر پایهٔ یکامتعامد برقرار است. ■

۳۷ گزاره ۱۰ فرض کنید E زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $\{\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_k\}$ پایهٔ یکامتعامدی برای E. دراین‌صورت، برای هر $\mathrm{x} \in E$:

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{x} \cdot \mathrm{b}_i)\mathrm{b}_i \qquad (14)$$

برهان چون $\{\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_k\}$ پایه‌ای برای E است، اعداد حقیقی $\{t_1, \dots, t_k\}$ وجود دارند که

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{k} t_i \mathrm{b}_i$$

برای هر j ثابت، $j = 1, \dots, k$. حاصل ضرب داخلی دو طرف رابطهٔ بالا در b_j را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{b}_j = \left(\sum_{i=1}^{k} t_i \mathrm{b}_i \right) \cdot \mathrm{b}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k} t_i (\mathrm{b}_i \cdot \mathrm{b}_j) \quad \text{(طبق بندهای (ب) و (پ))}$$

از یکامتعامد بودن پایه نتیجه می‌شود $\mathrm{b}_i \cdot \mathrm{b}_j = 0$ اگر $i \neq j$، و $\mathrm{b}_i \cdot \mathrm{b}_j = 1$ اگر $i = j$. پس

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{b}_j = t_j$$

و حکم به اثبات می‌رسد. ■

بدین‌ترتیب، محاسبهٔ ضرایب نمایش نسبت به پایه‌ای یکامتعامد بسیار ساده است. به‌زودی روشی عمومی برای ساختن پایه‌های یکامتعامد برای زیرفضاهای خطی ارائه خواهیم کرد، ولی نخست گزارهٔ زیر را طرح می‌کنیم.

۳۷ گزاره ۱۱ اگر $\{\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_k\}$ یک مجموعهٔ متعامد متشکل از عناصر ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\{\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_k\}$ مستقل خطی است.

برهان فرض کنید $c_1\mathrm{b}_1 + \dots + c_k\mathrm{b}_k = 0$. باید ثابت کنیم همهٔ c_iها صفرند. برای j ثابت و دلخواه، حاصل ضرب داخلی دو طرف رابطه در b_j را محاسبه می‌کنیم:

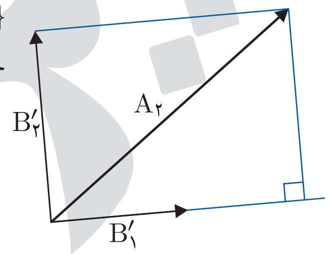
$$c_1(\mathrm{b}_1 \cdot \mathrm{b}_j) + \dots + c_k(\mathrm{b}_k \cdot \mathrm{b}_j) = 0$$

ولی $\mathrm{b}_i \cdot \mathrm{b}_j = 0$ مگر وقتی $i = j$ که در این صورت $\mathrm{b}_j \cdot \mathrm{b}_j = |\mathrm{b}_j|^2$ ناصفر است زیرا همهٔ $\{\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_k\}$ ناصفر فرض شده‌اند. پس، از رابطهٔ $c_j|\mathrm{b}_j|^2 = 0$ نتیجه می‌گیریم که $c_j = 0$. چون j دلخواه بود، $1 \leq j \leq k$، حکم به اثبات می‌رسد. ■

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به کمک هر پایهٔ داده‌شده برای زیرفضای خطی E پایه‌ای یکامتعامد برای E ساخت.

۱۲ روش گرام‌ـاشمیت

فرض کنید E یک زیرفضای خطی kبعدی از $\mathbb{R}^n$ است و $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ پایه‌ای برای E. می‌خواهیم یک پایهٔ یکامتعامد $\{\mathrm{B}_۱, \ldots, \mathrm{B}_k\}$ برای E بسازیم. برای این کار نخست یک پایهٔ متعامد $\{\mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_k\}$ برای E به دست می‌آوریم، سپس با قرار دادن $\mathrm{B}_i = \frac{۱}{|\mathrm{B}'_i|}\mathrm{B}'_i$، یک پایهٔ یکامتعامد حاصل می‌شود.



شکل ۱۰.۷

برای ساختن $\{\mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_k\}$ گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. قرار می‌دهیم $\mathrm{B}'_۱ = \mathrm{A}_۱$.

۲. برای ساختن $\mathrm{B}'_۲$، تصویر قائم $\mathrm{A}_۲$ بر $\mathrm{B}'_۱ = \mathrm{A}_۱$ را از $\mathrm{A}_۲$ کم می‌کنیم (شکل ۱۰.۷):

$$\mathrm{B}'_۲ = \mathrm{A}_۲ - \frac{\mathrm{A}_۲ \cdot \mathrm{B}'_۱}{\mathrm{B}'_۱ \cdot \mathrm{B}'_۱}\mathrm{B}'_۱ \qquad (۱۵)$$

توجه کنید که $\mathrm{B}'_۲ \perp \mathrm{B}'_۱$ زیرا حاصل ضرب داخلی طرف راست در $\mathrm{B}'_۱$ صفر می‌شود. به‌علاوه، $\mathrm{B}'_۲ \neq ۰$ زیرا اگر $\mathrm{B}'_۲ = ۰$، آنگاه با توجه به اینکه $\mathrm{A}_۱ = \mathrm{B}'_۱$، یک رابطهٔ وابستگی خطی $\mathrm{A}_۲ - \frac{\mathrm{A}_۲ \cdot \mathrm{B}'_۱}{\mathrm{B}'_۱ \cdot \mathrm{B}'_۱}\mathrm{A}_۱ = ۰$ برای $\{\mathrm{A}_۱, \mathrm{A}_۲\}$ پدید می‌آید که خلاف فرض استقلال خطی $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ است. نتیجه اینکه بنابر گزارهٔ ۱۱، $\{\mathrm{B}'_۱, \mathrm{B}'_۲\}$ مستقل خطی است. ضمناً توجه کنید که $\langle \mathrm{B}'_۱, \mathrm{B}'_۲\rangle = \langle \mathrm{A}_۱, \mathrm{A}_۲\rangle$ زیرا $\mathrm{B}'_۱ = \mathrm{A}_۱$ و طبق (۱۵) می‌توان نقش $\mathrm{A}_۲$ و $\mathrm{B}'_۲$ را با هم عوض کرد.

۳. این روش را می‌توان با استقرا ادامه داد. اگر $\{\mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_j\}$، که در آن $j < k$، به دست آمده باشد و عناصر آن ناصفر و دو به دو بر هم عمود باشند به طوری که $\langle \mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_j\rangle = \langle \mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_j\rangle$، آنگاه $\mathrm{B}'_{j+۱}$ را به روش زیر می‌سازیم:

$$\mathrm{B}'_{j+۱} = \mathrm{A}_{j+۱} - \frac{\mathrm{A}_{j+۱} \cdot \mathrm{B}'_۱}{\mathrm{B}'_۱ \cdot \mathrm{B}'_۱}\mathrm{B}'_۱ - \cdots - \frac{\mathrm{A}_{j+۱} \cdot \mathrm{B}'_j}{\mathrm{B}'_j \cdot \mathrm{B}'_j}\mathrm{B}'_j \qquad (۱۶)$$

درواقع، در (۱۶) تصویر قائم $\mathrm{A}_{j+۱}$ بر تک تک $\{\mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_j\}$ را از $\mathrm{A}_{j+۱}$ کم کرده‌ایم. حاصل باید بر $\{\mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_j\}$ عمود باشد که این موضوع با محاسبهٔ حاصل ضرب داخلی طرف راست (۱۶) در B'_i، $i = ۱, \ldots, j$، مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که $\mathrm{B}'_{j+۱} \neq ۰$، زیرا طبق فرض استقرا، $\langle \mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_j\rangle = \langle \mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_j\rangle$ و $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_j, \mathrm{A}_{j+۱}\}$ مستقل خطی است. بالاخره مجموعهٔ متعامد $\{\mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_{j+۱}\}$، که همهٔ عناصرش ناصفرند، طبق گزارهٔ ۱۱ همین بخش مستقل خطی است و مجدداً با استدلال مشابه گام ۲ داریم:

$$\langle \mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_{j+۱}\rangle = \langle \mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_{j+۱}\rangle$$

با ادامهٔ این روش در k گام به مجموعهٔ $\{\mathrm{B}'_۱, \ldots, \mathrm{B}'_k\}$ دست می‌یابیم که از عناصر ناصفر دو به دو بر هم عمود در E تشکیل شده است. چون تعداد عناصر برابر بعد E است و مجموعه طبق گزارهٔ ۱۱ مستقل خطی است، به پایه‌ای متعامد برای E دست یافته‌ایم. ■

۳۷ ۱۳ مثال

نخست تحقیق می‌کنیم که مجموعهٔ $\{A_1, A_2, A_3\}$ در $\mathbb{R}^4$، که در آن $A_1 = (0, 0, -1, 1)$، $A_2 = (1, 0, 2, 0)$، و $A_3 = (1, 1, 3, 0)$، یک مجموعهٔ مستقل خطی است، سپس پایه‌ای یکامتعامد برای $E = \langle A_1, A_2, A_3\rangle$ می‌سازیم. فرض کنید $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$، پس

$$(c_2 + c_3, c_3, -c_1 + 2c_2 + 3c_3, c_1) = (0, 0, 0, 0)$$

نتیجه اینکه $c_3 = 0$ و $c_1 = 0$، و از این‌ها چنین به دست می‌آید: $c_2 = 0$، پس $\{A_1, A_2, A_3\}$ مستقل خطی است. E را زیرفضای متشکل از ترکیب‌های خطی $\{A_1, A_2, A_3\}$ می‌گیریم: $E = \langle A_1, A_2, A_3\rangle$. توجه کنید که $\{A_1, A_2, A_3\}$ متعامد نیست، مثلاً $A_1 \cdot A_2 = -2 \neq 0$. روش **گرام‌ـاشمیت** را به کار می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
B'_1 &= A_1 = (0, 0, -1, 1)\\
B'_2 &= (1, 0, 2, 0) - \frac{(1, 0, 2, 0)\cdot(0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1)\cdot(0, 0, -1, 1)}(0, 0, -1, 1)\\
&= (1, 0, 2, 0) + (0, 0, -1, 1)
\end{aligned}$$

یا $B'_2 = (1, 0, 1, 1)$. بالاخره:

$$\begin{aligned}
B'_3 &= (1, 1, 3, 0) - \frac{(1, 1, 3, 0)\cdot(0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1)\cdot(0, 0, -1, 1)}(0, 0, -1, 1)\\
&\quad - \frac{(1, 1, 3, 0)\cdot(1, 0, 1, 1)}{(1, 0, 1, 1)\cdot(1, 0, 1, 1)}(1, 0, 1, 1)\\
&= (1, 1, 3, 0) + \frac{3}{2}(0, 0, -1, 1) - \frac{4}{3}(1, 0, 1, 1)\\
&= \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

پس مجموعهٔ $\left\{(0, 0, -1, 1), (1, 0, 1, 1), \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)\right\}$ پایه‌ای متعامد برای E است، که می‌توان این مطلب را مستقیماً نیز تحقیق کرد. برای یافتن یک پایهٔ یکامتعامد، هر یک از B'_iها را در عکس طول آن ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
B_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
B_3 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{42}}, \frac{6}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}\right)
\end{aligned}$$

روش گرام‌ـاشمیت در تکمیل مجموعه‌ای متعامد (یا یکامتعامد) برای تبدیل آن به پایه‌ای کامل نیز به کار گرفته می‌شود. ■

۳۷ ۱۴ مکمل

تکمیل مجموعهٔ متعامد به پایه. فرض کنید E یک زیرفضای خطی kبُعدی $\mathbb{R}^n$ باشد و $\{B_1, \ldots, B_l\}$ مجموعه‌ای یکامتعامد از عناصر E که در آن $l < k$. نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با استفاده از

روش گرام‌ـ‌اشمیت عناصری چون $\{B_{l+1}, \ldots, B_k\}$ از E یافت به طوری که $\{B_1, \ldots, B_k\}$ پایهٔ یکامتعامدی برای E باشد. چون $l < k$، عنصری مثل A_{l+1} از E یافت می‌شود که در $\langle B_1, \ldots, B_l\rangle$ نیست. به روش گرام‌ـ‌اشمیت، با کم کردن تصویر قائم A_{l+1} بر $\{B_1, \ldots, B_l\}$، عنصری چون B'_{l+1} به دست می‌آوریم به طوری که $\{B_1, \ldots, B_l, B'_{l+1}\}$ متعامد و مستقل خطی باشد:

$$B'_{l+1} = A_{l+1} - (A_{l+1} \cdot B_1)B_1 - \cdots - (A_{l+1} \cdot B_l)B_l$$

سپس با تعریف $B_{l+1} = \frac{1}{|B'_{l+1}|}B'_{l+1}$، یک مجموعهٔ $\{B_1, \ldots, B_l, B_{l+1}\}$ حاصل می‌شود که عناصر آن طول واحد دارند و دو به دو بر هم عمودند (یعنی مجموعه‌ای یکامتعامد است). اگر $l + 1 = k$، چون تعداد اعضای این مجموعهٔ مستقل خطی برابر بعد E است، خود پایه یکامتعامدی برای E می‌شود، $E = \langle B_1, \ldots, B_{l+1}\rangle$. اگر $l + 1 < k$، عنصری چون A_{l+2} در E یافت می‌شود که در $\langle B_1, \ldots, B_{l+1}\rangle$ نیست. به روش بالا، عنصری چون B_{l+2} را از A_{l+2} به گونه‌ای می‌سازیم که $\{B_1, \ldots, B_{l+2}\}$ یکامتعامد باشد. اگر این عمل را $(k - l)$ بار انجام دهیم به مجموعهٔ یکامتعامد kعضوی $\{B_1, \ldots, B_k\}$ می‌رسیم که بنابراین پایه‌ای برای E خواهد بود. ■

۳۷ ۱۵ نتیجه

کاربرد در معادلهٔ زیرفضاها. زیرفضای مستوی E از $\mathbb{R}^n$ را **ابرصفحه‌ای** در $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم در صورتی که بعد E برابر $(n - 1)$ باشد. بدین‌ترتیب، ابرصفحه‌های $\mathbb{R}$ نقاط $\mathbb{R}$، ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^2$ خطوط راست در $\mathbb{R}^2$، و ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^3$ صفحات واقع در $\mathbb{R}^3$اند. حال یک ابرصفحهٔ E از $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. اگر E° انتقال‌یافتهٔ E به 0 باشد، می‌توان طبق روش گرام‌ـ‌اشمیت یک پایهٔ متعامد $\{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ برای E° در نظر گرفت. با استفاده از مکمل ۱۴ در همین بخش، عنصری چون Q، $Q \neq 0$، در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که بر B_1، ...، B_{n-1} عمود است و درنتیجه $\{B_1, \ldots, B_{n-1}, Q\}$ پایهٔ متعامدی برای $\mathbb{R}^n$ است. توجه کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه عنصر x از $\mathbb{R}^n$ در E° باشد این است که

$$Q \cdot x = 0 \tag{۱۷}$$

زیرا اگر بنویسیم $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i + c_n Q$، عناصر E° دقیقاً آن xهایی‌اند که در آن $c_n = 0$. پس اگر $x \in E^\circ$، آنگاه $x \cdot a = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(B_i \cdot Q) = 0$. برعکس، اگر $Q \cdot x = 0$، داریم:

$$0 = Q \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(Q \cdot B_i) + c_n(Q \cdot Q) = c_n$$

حال فرض کنید ابرصفحهٔ E به شکل $E = p + \langle B_1, \ldots, B_{n-1}\rangle$ توصیف شده باشد که در آن $p = (p_1, \ldots, p_n)$ نقطه‌ای در E است. نقطهٔ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در E است اگر و فقط اگر $x - p \in E^\circ$، پس شرط لازم و کافی برای اینکه x عضو E باشد این است که

$$(x - p) \cdot Q = 0 \tag{۱۸}$$

اگر nتایی Q را با $(Q_1, \ldots, Q_n)$ نمایش دهیم، (۱۸) با

$$Q_1(x_1 - p_1) + \cdots + Q_n(x_n - p_n) = 0 \tag{۱۹}$$

معادل است. این رابطه را معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرنده از p عمود بر Q می‌نامند. نمایش متداول خط در صفحه و صفحه در فضای سه‌بعدی حالت‌های خاص (۱۹) است. در مورد خط در صفحه، خطی که از نقطهٔ (x_0, y_0) بگذرد و بر بردار $Q = (A, B)$ عمود باشد معادله‌ای به صورت $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ دارد که می‌توانیم آن را به صورت $Ax + By + C = 0$ بنویسیم. به همین ترتیب، صفحهٔ گذرنده از (x_0, y_0, z_0) و عمود بر $Q = (A, B, C)$ در $\mathbb{R}^3$ به صورت $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ یا $Ax + By + C + D = 0$ نمایش داده می‌شود. ■

۳۷ ۱۶ مثال

معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرنده از $(1, -1, 0, 2)$ و عمود بر خط راست

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4}{3}$$

را می‌نویسیم. از روش نوشتن صورت متقارن معادلهٔ خط راست به یاد می‌آوریم که خطّ راستِ فوق موازی $\langle (2, 1, -1, 3) \rangle$ است، پس، طبق (۱۹)، ابرصفحهٔ مورد نظر به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$2(x_1 - 1) + 1(x_2 + 1) + (-1)(x_3 - 0) + 3(x_4 - 2) = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 7 = 0$$

این یک زیرفضای مستوی سه‌بُعدی $\mathbb{R}^4$ است. ■

نمایش ابرصفحه به صورت (۱۹) را می‌توانیم به نمایش زیرفضاهای با ابعاد غیر از $(n - 1)$ تعمیم دهیم. فرض کنید E یک زیرفضای خطی kبعدی $\mathbb{R}^n$ باشد. **مکمل قائم** E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot e = 0, \forall e \in E\} \qquad (20)$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود که مجموع دو عضو $E^{\perp}$ در $E^{\perp}$ است و مضرب حقیقی هر عضو $E^{\perp}$ نیز در $E^{\perp}$ است، پس $E^{\perp}$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است. ضمناً $E \cap E^{\perp} = \{0\}$ زیرا اگر عضو e از E بر همهٔ اعضای E عمود باشد، به‌خصوص داریم $|e|^2 = e \cdot e = 0$ و $e = 0$.

۳۷ ۱۵ گزاره

فرض کنید E یک زیرفضای خطی kبُعدی $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت:

الف) $E^{\perp}$ یک زیرفضای خطی $(n - k)$بُعدی $\mathbb{R}^n$ است و $E \cap E^{\perp} = \{0\}$.

ب) $(E^{\perp})^{\perp} = E$.

برهان

الف) قبلاً توضیح دادیم که $E^{\perp}$ زیرفضایی خطی است و $E \cap E^{\perp} = \{0\}$. فرض کنید $\dim E = k$ (در اینجا dim مخفف dimension به معنای بُعد است). در این صورت، $E = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ که $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است. طبق روش گرام‌ـاشمیت می‌توان پایه‌ای متعامد چون $\{B_1, \ldots, B_k\}$ برای E در نظر گرفت. همچنین

طبق مکمل ۱۴، در همین بخش، می‌توانیم $\{\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k\}$ را به پایه‌ای متعامد مانند $\{\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k, \mathrm{B}_{k+1}, \dots, \mathrm{B}_n\}$ برای $\mathbb{R}^n$ توسعه دهیم. ادعا می‌کنیم:

$$E^{\perp} = \langle \mathrm{B}_{k+1}, \dots, \mathrm{B}_n \rangle \tag{۲۱}$$

اگر این ادعا ثابت شود، نتیجه می‌شود که $\dim E^{\perp} = n - k$. نخست، چون هر B_j، که در آن $j > k$، بر هر B_i، که در آن $i \leq k$، عمود است، B_j بر هر ترکیب خطی $\{\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k\}$ نیز عمود است، پس به ازای هر $j = k+1, \dots, n$، $\mathrm{B}_j \in E^{\perp}$. نتیجه اینکه $\langle \mathrm{B}_{k+1}, \dots, \mathrm{B}_n \rangle \subset E^{\perp}$. حال فرض کنید $\mathrm{x} \in E^{\perp}$. نشان می‌دهیم x ترکیبی خطی از $\{\mathrm{B}_{k+1}, \dots, \mathrm{B}_n\}$ است. چون در هر صورت $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$، و $\{\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ است، می‌توان نوشت:

$$\mathrm{x} = x_1 \mathrm{B}_1 + \dots + x_k \mathrm{B}_k + x_{k+1} \mathrm{B}_{k+1} + \dots + x_n \mathrm{B}_n$$

چون $\mathrm{x} \in E^{\perp}$، به ازای $i \leq k$، $\mathrm{x} \cdot \mathrm{B}_i = 0$. پس با محاسبهٔ ضرب داخلی دو طرف در B_i نتیجه می‌شود:

$$0 = x_i (\mathrm{B}_i \cdot \mathrm{B}_i)$$

زیرا $\mathrm{B}_i \cdot \mathrm{B}_j = 0$ اگر $i \neq j$، حال $\mathrm{B}_i \neq 0$ چون B_i یک عضو مجموعهٔ مستقل خطی $\{\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n\}$ است، پس، به ازای $i \leq k$، لزوماً $x_i = 0$. بدین‌ترتیب، x ترکیبی خطی از $\{\mathrm{B}_{k+1}, \dots, \mathrm{B}_n\}$ است و حکم (الف) به اثبات می‌رسد. **(ب)** نخست طبق آنچه در (الف) گذشت، $E = \langle \mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k \rangle$ و $E^{\perp} = \langle \mathrm{B}_{k+1}, \dots, \mathrm{B}_n \rangle$. پس طبق همان استدلال، $\{\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k\}$ پایهٔ متعامدی برای $(E^{\perp})^{\perp}$ است و حکم نتیجه می‌شود. ■

به عنوان نتیجه، فرض کنید $\{\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k\}$ مجموعهٔ مستقل خطی متعامدی باشد. در این صورت، مجموعهٔ xهای متعلق به $\mathbb{R}^n$ که در روابط زیر صدق می‌کنند یک زیرفضای خطی $(n-k)$بُعدی $\mathbb{R}^n$، درواقع $\langle \mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k \rangle^{\perp}$ است:

$$\begin{cases} \mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{x} = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{B}_k \cdot \mathrm{x} = 0 \end{cases} \tag{۲۲}$$

به طور کلی، اگر $\{s\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_k\}$ هر مجموعهٔ مستقل خطی kتایی در $\langle \mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_k \rangle$ باشد، دستگاه (۲۲) با

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{x} = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_k \cdot \mathrm{x} = 0 \end{cases} \tag{۲۳}$$

یک مجموعه جواب دارد، زیرا هر A_i ترکیبی خطی از $\{B_1,\dots,B_k\}$ است و برعکس. بدین‌ترتیب، نمایش (۲۲) تعمیم (۱۷) به زیرفضاهای خطی $(n-k)$بُعدی است. چون زیرفضاهای مستوی از انتقال زیرفضاهای خطی به دست می‌آیند، هر زیرفضای مستوی $(n-k)$بُعدی F گذرنده از نقطهٔ $p \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان برابر مجموعهٔ xهایی گرفت که در دستگاهی چون

$$\begin{cases} A_1 \cdot (x-p) = 0 \\ \vdots \\ A_k \cdot (x-p) = 0 \end{cases} \tag{۲۴}$$

صدق می‌کنند. در اینجا $\{A_1,\dots,A_k\}$ مستقل خطی است و اگر F° انتقال‌یافتهٔ F به 0 باشد داریم:

$$F^\circ = \langle A_1,\dots,A_k\rangle^\perp$$

دستگاه (۲۴) تعمیم (۱۸) یا (۱۹) است.

می‌توانیم (۲۴) را این گونه نیز تعبیرکنیم: هر معادلهٔ (۲۴) یک ابرصفحهٔ $\mathbb{R}^n$، یعنی یک زیرفضای مستوی $(n-1)$بعدی $\mathbb{R}^n$، را نمایش می‌دهد که از xهایی تشکیل شده است که $x-p$ بر یک A عمود است. اگر $\{A_1,\dots,A_k\}$ مستقل خطی باشد، اشتراک این kابرصفحه یک زیرفضای مستوی $(n-k)$بُعدی $\mathbb{R}^n$ است.

۳۷ ۱۶ مثال

زیرفضای خطی $E=\langle A_1,A_2\rangle$ از $\mathbb{R}^4$ را در نظر بگیرید که در آن $A_1=(2,0,-1,1)$ و $A_2=(1,1,1,0)$. توجه کنید که $\{A_1,A_2\}$ مستقل خطی است (چرا؟)، پس E یک زیرفضای خطی دوبعدی است. می‌خواهیم معادلهٔ آن زیرفضای مستوی دوبعدی $\mathbb{R}^4$ را بیابیم که از $p=(1,3,0,-4)$ می‌گذرد و موازی مکمل قائم E است. طبق (۲۳) این زیرفضای مستوی از نقاط (x_1,x_2,x_3,x_4) تشکیل شده است که

$$\begin{cases} (2)(x_1-1)+(0)(x_2-3)+(-1)(x_3-0)+(1)(x_4+4)=0 \\ (1)(x_1-1)+(1)(x_2-3)+(1)(x_3-0)+(0)(x_4+4)=0 \end{cases}$$

یا معادل آن

$$\begin{cases} 2x_1-x_3+x_4+2=0 \\ x_1+x_2+x_3-4=0 \end{cases}$$

بدین‌ترتیب، صفحهٔ مورد نظر به‌صورت اشتراک دو ابرصفحه ظاهر می‌شود. ■

۳۷ تمرین

۱. فرض کنید E یک زیرفضای خطی kبُعدی $\mathbb{R}^n$ باشد، که در آن $k<n$، و $\{b_1,\dots,b_n\}$ پایهٔ یکامتعامدی برای E است. به ازای $u \in \mathbb{R}^n$، نشان دهید $u' = \sum_{i=1}^k (u\cdot b_i)b_i$ (تصویر قائم u بر E) یگانه عنصر E است به طوری که $u-u'$ بر E

عمود است، یعنی، به ازای هر $\mathrm{v} \in E$، $(\mathrm{u} - \mathrm{u}') \cdot \mathrm{v} = ۰$).

۲. در هر مورد، تصویر قائم نقطهٔ داده‌شده بر زیرفضای داده‌شده را به دست آورید:

الف) در $\mathbb{R}^۳$، نقطهٔ $(۱, ۱, -۱)$ و صفحهٔ $x+y+z+۲ = ۰$؛

ب) در $\mathbb{R}^۴$، نقطهٔ $(۱, -۱, ۰, ۲)$ و خط راست $\langle(۲, ۳, -۱, ۱)\rangle$؛

پ) در $\mathbb{R}^۴$، نقطهٔ $(۱, -۱, ۰, ۲)$ و صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ $(۲, ۲, -۱, ۱)$، $(۳, -۱, ۰, ۲)$، و $(۲, ۰, ۱, ۰)$؛

ت) در $\mathbb{R}^۴$، نقطهٔ $(۱, -۱, ۰, ۲)$ و ابرصفحهٔ $x_۱ - x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ + ۱ = ۰$.

۳. در هر مورد، معادله یا معادلاتی را بنویسید که زیرفضای داده‌شده را توصیف می‌کنند:

الف) در $\mathbb{R}^۴$، ابرصفحه‌ای که از $(۱, -۱, ۲, ۳)$ می‌گذرد و بر خط راست $\frac{x_۱}{۲} = \frac{x_۲-۱}{۱} = \frac{x_۳}{۰} = \frac{x_۴+۱}{۳}$ عمود است؛

ب) در $\mathbb{R}^۵$، خط راستی که از $(۲, ۱, -۱, ۰, ۳)$ می‌گذرد و بر ابرصفحهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ - x_۴ + ۲x_۵ + ۱ = ۰$ عمود است؛

پ) در $\mathbb{R}^۴$، صفحهٔ گذرنده از ۰ و شامل خط راست $\frac{x_۱+۱}{-۱} = \frac{x_۲}{۲} = \frac{x_۳}{۱} = \frac{x_۴-۲}{۳}$؛

ت) در $\mathbb{R}^۴$، صفحهٔ گذرنده از $(-۱, -۱, ۰, ۱)$ و موازی مکمل قائم صفحهٔ گذرنده از ۰ و دو نقطهٔ $(-۱, ۱, ۲, ۳)$ و $(۲, -۱, -۱, ۱)$.

۴. در هر مورد، مجموعهٔ داده‌شده را به پایهٔ متعامدی برای $\mathbb{R}^۴$ تکمیل کنید، سپس از پایهٔ متعامد حاصل پایهٔ یکامتعامدی بسازید. در مواردی که مجموعهٔ داده‌شده بیش از یک عضو دارد، نخست تحقیق کنید که مجموعهٔ داده‌شده متعامد است:

الف) در $\mathbb{R}^۴$، مجموعهٔ $\{(۱, ۱, -۱, ۲)\}$؛

ب) در $\mathbb{R}^۴$، مجموعهٔ $\{(۲, ۰, ۱, -۱), (-۱, ۳, ۳, ۱)\}$؛

پ) در $\mathbb{R}^۴$، مجموعهٔ

$$\{(۱, ۱, -۱, -۱), (۱, ۰, ۰, ۱), (۱, -۱, ۱, -۱)\}$$

۵. در هر مورد، مجموعهٔ S داده‌شده را به پایهٔ متعامدی برای زیرفضای خطی Eی داده‌شده تکمیل کنید. در هر مورد که $\mathrm{S} \neq \phi$، نخست تحقیق کنید که عناصر S عضو Eاند و در مواردی که S بیش از یک عضو دارد تحقیق کنید که مجموعهٔ S متعامد است.

الف) E: ابرصفحهٔ $x_۱ - x_۲ - x_۳ + ۳x_۴ = ۰$ در $\mathbb{R}^۴$، $\mathrm{S} = \phi$؛

ب) E: ابرصفحهٔ $x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$ در $\mathbb{R}^۴$، و $\mathrm{S} = \{(۱, ۱, ۱, ۰), (-۱, ۱, ۲, ۱)\}$؛

پ) E: ابرصفحهٔ $۳x_۱ + x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ = ۰$ در $\mathbb{R}^۴$ و $\mathrm{S} = \{(۱, -۱, ۰, -۱)\}$؛

ت) E: متمم قائم خط راست $\frac{x_۱}{-۱} = \frac{x_۲}{۲} = \frac{x_۳}{۱} = \frac{x_۴}{۱}$ در $\mathbb{R}^۴$ و $\mathrm{S} = \{(۲, ۰, ۱, ۱), (۲, ۳, -۲, -۲)\}$؛

ث) E: اشتراک دو ابرصفحهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$ و $۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ = ۰$ در $\mathbb{R}^۴$ و

$$\mathrm{S} = \{(۰, ۱, ۰, -۱)\}$$

۶. در $\mathbb{R}^n$، نشان دهید تصویر قائم $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ بر راستای v، که در آن $\mathrm{v} \neq ۰$، نقطهٔ اشتراک ابرصفحهٔ گذرنده از u و عمود بر خط راست $\langle \mathrm{v} \rangle$ است.

۷. به ازای هر $\mathrm{u} \neq ۰$ و $\mathrm{v} \neq ۰$ در $\mathbb{R}^n$ نشان دهید.

$$\left| \frac{\mathrm{u}}{|\mathrm{u}|} - |\mathrm{u}|\mathrm{v} \right| = \left| \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|} - |\mathrm{v}|\mathrm{u} \right|$$

(راهنمایی: مجذور دو طرف را در نظر بگیرید.) تعبیر هندسی این تساوی چیست؟

۸. نشان دهید فاصلهٔ نقطهٔ $(a_۱, \ldots, a_n)$ از ابرصفحهٔ $A_۰ + A_۱x_۱ + \cdots + A_nx_n = ۰$ در $\mathbb{R}^n$ برابر است با

$$\frac{|A_۰ + A_۱a_۱ + \cdots + A_na_n|}{\sqrt{A_۱^۲ + \cdots + A_n^۲}}.$$

۹. فرض کنید p و L به ترتیب یک نقطه و یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ باشند. نشان دهید حداقل فاصلهٔ p از نقاط L برای نقطه‌ای چون $\mathrm{q} \in L$ به دست می‌آید که $\mathrm{q} - \mathrm{p}$ بر L عمود است. اگر خط راست L را به صورت $\mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ نمایش دهیم، نشان دهید $\mathrm{q} = \mathrm{a} + \frac{(\mathrm{p}-\mathrm{a})\cdot\mathrm{A}}{|\mathrm{A}|^۲}\mathrm{A}$.

۱۰. اگر $L = \mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ یک خط راست و E یک زیرفضای مستوی در $\mathbb{R}^n$ باشند، **زاویهٔ بین** L و E را برابر زاویهٔ بین A و تصویر قائم آن روی E تعریف می‌کنیم.

الف) اگر $\{\mathrm{b}_۱, \ldots, \mathrm{b}_k\}$ پایهٔ یکامتعامدی برای E° باشد، نشان دهید زاویهٔ بین L و E برابر است با

$$\cos^{-۱} \frac{\sqrt{\sum_{i=۱}^{k} (\mathrm{A} \cdot \mathrm{b}_i)^۲}}{|\mathrm{A}|}$$

ب) اگر $\mathrm{a} + \langle \mathrm{A} \rangle$ یک خط راست L و $\mathrm{Q} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{p}) = ۰$ یک ابرصفحهٔ E در $\mathbb{R}^n$ باشند، نشان دهید زاویهٔ بین L و E برابر است با

$$\sin^{-۱} \frac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{Q}}{|\mathrm{A}||\mathrm{Q}|};$$

پ) زاویهٔ بین خط راست $\frac{x_۱ - ۲}{۱} = \frac{x_۲}{۱} = \frac{x_۳ + ۱}{-۱} = \frac{x_۴ + ۲}{۱}$ و ابرصفحهٔ $۲x_۲ - ۲x_۳ - x_۴ + ۵ = ۰$ را در $\mathbb{R}^۴$ پیدا کنید.

۱۱. فرض کنید L و L' دو خط متنافر در $\mathbb{R}^n$ باشند و $n \geq ۳$. در تمرین ۱۰ بخش ۲ آمده است که زیرفضای مستوی سه‌بعدی منحصر به فردی از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل L و L' است.

الف) نشان دهید خط راست منحصر به فردی در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که L و L' را قطع می‌کند و بر هر دو عمود است.

ب) نشان دهید صفحهٔ منحصر به فردی در $\mathbb{R}^۴$ وجود دارد که L و L' را قطع می‌کند و بر هر دو عمود است.

پ) در قسمت (ب)، وقتی L محور $x_۱$ و L' خط راست

$$\frac{x_۱ + ۱}{۲} = \frac{x_۲ - ۳}{۱} = \frac{x_۳}{۱} = \frac{x_۴}{۱}$$

باشد، صفحهٔ مزبور را پیدا کنید.

۱۲. برای دو زیرفضای خطی $E_۱$ و $E_۲$ از $\mathbb{R}^n$ دو رابطهٔ «قائم بودن» و «عمود بودن» را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. می‌گوییم $E_۱$ و $E_۲$ **نسبت به هم قائم**‌اند و می‌نویسیم $E_۱ \perp\!\!\!\perp E_۲$ در صورتی که به ازای هر $\mathrm{u} \in E_۱$ و هر $\mathrm{v} \in E_۲$ داشته باشیم $\mathrm{u} \perp \mathrm{v}$. می‌گوییم $E_۱$ بر $E_۲$ **عمود** است و می‌نویسیم $E_۱ \perp E_۲$ در صورتی که اگر $E'_۱$ مکمل قائم $E_۱ \cap E_۲$ در $E_۱$ باشد، داشته باشیم $E'_۱ \perp\!\!\!\perp E_۲$.

الف) اگر $E_۱ \perp\!\!\!\perp E_۲$، نشان دهید $E_۱ \cap E_۲ = \{۰\}$.

ب) نشان دهید $E_۱ \perp E_۲$ اگر و فقط اگر $E_۲ \perp E_۱$.

۱۳. رابطهٔ زیر را که به **اتحاد متوازی‌الاضلاع** معروف است به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

$$|\mathrm{u} + \mathrm{v}|^۲ + |\mathrm{u} - \mathrm{v}|^۲ = ۲(|\mathrm{u}|^۲ + |\mathrm{v}|^۲).$$

۱۴. رابطهٔ زیر را که به **اتحاد متوازی‌السطوح** معروف است به ازای هر $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

$$|\mathrm{u} + \mathrm{v}|^۲ + |\mathrm{v} + \mathrm{w}|^۲ + |\mathrm{w} + \mathrm{u}|^۲ =$$
$$|\mathrm{u}|^۲ + |\mathrm{v}|^۲ + |\mathrm{w}|^۲ + |\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w}|^۲.$$

۱۵. به ازای هر u، v و w در $\mathbb{R}^n$، نابرابری زیر را که منسوب به هلاوکا[1] است ثابت کنید:

$$|\mathrm{u} + \mathrm{v}| + |\mathrm{v} + \mathrm{w}| + |\mathrm{w} + \mathrm{u}| \leq$$
$$|\mathrm{u}| + |\mathrm{v}| + |\mathrm{w}| + |\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w}|$$

۱۶. فرض کنید $\{d_۱, \ldots, d_n\}$ اعداد مثبت مفروضی باشند. به ازای $\mathrm{u} = (u_۱, \ldots, u_n)$ و $\mathrm{v} = (v_۱, \ldots, v_n)$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{u} * \mathrm{v} = d_۱ u_۱ v_۱ + \cdots + d_n u_n v_n$$

الف) نشان دهید چهار ویژگی ابتدایی ضرب داخلی، برای $*$ برقرارند. بنابراین، اگر $|\mathrm{u}|$ را به صورت $|\mathrm{u}| = \sqrt{\mathrm{u} * \mathrm{u}}$ تعریف کنیم، نابرابری‌های کوشی‌ـشوارتس و مثلث برقرار می‌شوند، و اگر زاویه را به صورت $\cos^{-۱} \frac{\mathrm{u} * \mathrm{v}}{|\mathrm{u}||\mathrm{v}|}$ تعریف کنیم، قضیهٔ فیثاغورس همچنان برقرار می‌ماند.

ب) نشان دهید محورهای مختصات نسبت به ضرب داخلی $*$ همچنان دو به دو بر هم عمودند. بردارهای واحد در جهت مثبت محورهای مختصات را پیدا کنید.

۱۷. اعداد حقیقی a، b و c داده شده‌اند به طوری که $a > ۰$ و $ac - b^۲ > ۰$. برای u و v در $\mathbb{R}^۲$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{u} * \mathrm{v} = a u_۱ v_۱ + b(u_۱ v_۲ + u_۲ v_۱) + c u_۲ v_۲$$

الف) نشان دهید چهار ویژگی ابتدایی ضرب داخلی برای $*$ برقرارند.

ب) اگر $a = ۲$ و $b = c = ۱$، زاویهٔ بین دو محور مختصات را نسبت به این ضرب داخلی پیدا کنید.

1. E. Hlawka

۴۷ نگاشت خطی (۱)

محور اصلی بحث ما در فصل‌های ۲ تا ۶ در جلد اول، توابع یک‌متغیرهٔ حقیقی، یعنی توابعی به شکل $f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ بود که در آن S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. در جلد دوم کتاب، توابع $f : \mathrm{S} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ که در آن S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است موضوع اصلی خواهد بود و به‌خصوص مفهوم‌های مشتق و انتگرال را بررسی خواهیم کرد که برای توابع چندمتغیره، یعنی به ازای $n > ۱$، غنا و پیچیدگی بیشتری از توابع یک‌متغیره دارند. برای این منظور، نخست لازم است شناخت کارسازی از ساده‌ترین حالت یعنی وقتی تابع از درجهٔ یک یا، به عبارت دیگر، «مستوی» یا «خطی» است به دست آوریم که در این حالت نیازی به مشتق و انتگرال نیست. درواقع، چنانکه در حالت یک‌متغیره دیدیم، مشتق در یک نقطه، نوعی تقریب خطی برای تابع فراهم می‌کند که به کمک آن می‌توان به بعضی خواص تابع پی برد یا از آن برای محاسبهٔ تقریبی بهره گرفت. در حالت یک‌متغیره، هر تابع مستوی را می‌توان به شکل $A(x) = mx + b$ نمایش داد که نمودار آن یک خط راست غیرقائم است و خواص آن را به‌سادگی می‌توان بررسی کرد. هدف این بخش و بخش بعد دستیابی به تعمیم قابل استفاده‌ای از وضعیتی است که در آن، به جای تک‌متغیر x، nتاییِ $(x_۱, \ldots, x_n)$ قرار دارد. برای این کار استفاده از «جبر ماتریسی» سودمند واقع خواهد شد.

جبر ماتریسی

مقصود از یک ماتریس $m \times n$ (حقیقی) یک جدول A با m سطر و n ستون است که در هر خانهٔ جدول یک عدد (حقیقی) وارد شده است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{۱}$$

عددهای a_{ij} را **درایه‌های** ماتریس می‌نامند. در این اندیس‌گذاری، اندیس اول (سمت چپ) شمارهٔ سطر را از بالا به پایین و اندیس دوم شمارهٔ ستون را از چپ به راست نشان می‌دهد. گاهی A را با $[a_{ij}]$ یا به طور کامل‌تر به صورت $[a_{ij}]_{i=۱,\ldots,m;\, j=۱,\ldots,n}$ نمایش می‌دهیم. بدین‌ترتیب، یک ماتریس $m \times n$ با $m \times n$ عدد و ترتیب قرارگرفتن آن‌ها در سطرها و ستون‌ها مشخص می‌شود، چنانکه یک عضو $\mathbb{R}^n$ یک nتایی **مرتب** از اعداد حقیقی است، یعنی ترتیب قرارگرفتن n مؤلفه نیز جزئی از تعریف nتایی است. برای ماتریس‌های $m \times n$ عمل جمع و نیز ضرب در اعداد حقیقی مشابه عمل‌های متناظر در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود. بدین‌ترتیب، اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس $m \times n$ باشند و $r \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم:

$$A + B = [c_{ij}] \tag{۲}$$

که در آن

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{۳}$$

و

$$rA = [ra_{ij}] \tag{۴}$$

۴۷ ۱ گزاره

خواص ابتدایی جمع ماتریسی

الف) تعویض‌پذیری (جابه‌جایی بودن). اگر A و B ماتریس‌هایی $m\times n$ باشند، $A+B=B+A$.

ب) شرکت‌پذیری. اگر A، B، و C ماتریس‌هایی $m\times n$ باشند،

$$A+(B+C)=(A+B)+C.$$

پ) عنصر بی‌اثر. ماتریس صفر $m\times n$، که همهٔ درایه‌های آن صفر است و با $\circ$ نمایش داده می‌شود، یگانه ماتریس $m\times n$ای است که به ازای هر ماتریس $m\times n$ چون A، $A+\circ=\circ+A=A$.

ت) عنصر قرینه. برای ماتریس $A=[a_{ij}]$، ماتریس $B=[b_{ij}]$ که در آن $b_{ij}=-a_{ij}$، یگانه ماتریسی است که $A+B=B+A=\circ$.

اثبات خواص فوق همه سرراست است و از این نتیجه می‌شود که در جمع ماتریس‌ها عناصر متناظر با هم جمع می‌شوند. ■

۴۷ ۲ گزاره

خواص ابتدایی ضرب در اعداد

الف) برای هر ماتریس A، $1A=A$.

ب) برای هر ماتریس A و هر عدد حقیقی r و s، $(rs)A=r(sA)$.

پ) برای هر ماتریس A و هر عدد حقیقی r و s، $(r+s)A=rA+sA$.

ت) برای هر عدد حقیقی r و هر دو ماتریس $m\times n$ چون A و B، $r(A+B)=rA+rB$.

صحت این خواص از این نتیجه می‌شود که ضرب کردن عدد r در ماتریس A به معنای ضرب کردن تک‌تک درایه‌های A در r است. ■

دو عمل فوق کاملاً مانند عملیات مشابه برای nتایی‌های مرتب است و تنها چیزی که ماتریس را از بردار متمایز می‌کند طریقهٔ نمایش درایه‌ها در یک جدول $m\times n$ به جای یک ردیف $m\times n$تایی است. اکنون ضرب ماتریس‌ها را برای ماتریس‌های با اندازهٔ مناسب تعریف می‌کنیم.

اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m\times n$ و $B=[b_{ij}]$ یک ماتریس $n\times p$ باشد، ماتریس حاصلِ ضرب، $AB=[c_{ij}]$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \qquad (۵)$$

توجه کنید که لازمهٔ تعریف حاصل ضرب این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد زیرا تنها در این صورت (۵) معنی دارد. درواقع، می‌توان c_{ij} را حاصل ضرب داخلی سطر iامِ ماتریس A به عنوان nتاییِ $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ در ستون jامِ ماتریس B به‌عنوان nتاییِ $(b_{1j},\ldots,b_{nj})$ تلقی کرد. انگیزهٔ این تعریف را به‌زودی ملاحظه خواهیم کرد.

۴۷ ۳ گزاره

خواص ابتدایی ضرب ماتریس‌ها

الف) شرکت‌پذیری. اگر A، B، و C ماتریس‌هایی با اندازه‌های به ترتیب $m\times n$، $n\times p$، و $p\times q$ باشند، آنگاه:

$$(AB)C=A(BC)$$

ب) توزیع‌پذیری (پخشی). داریم:

$$(A+B)C=(AC)+(AB),\ A(B+C)=(AB)+(AC)$$

مشروط بر اینکه اندازهٔ ماتریس‌های فوق برای این عملیات مناسب باشد.

پ) ماتریس واحد. ماتریس $n\times n$، $I_n=[\delta_{ij}]$، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۰ & i\neq j\end{cases}$$

برای هر ماتریس $m\times n$، چون A، و هر ماتریس $n\times p$، مانند B، داریم

$$AI_n=A,\ I_nB=B$$

در اینجا اثبات (الف) را می‌آوریم. دو اثبات دیگر ساده‌ترند و به خواننده واگذار می‌شود. برای (الف) می‌نویسیم $A=[a_{ij}]$، $B=[b_{ij}]$، $C=[c_{ij}]$، $AB=[d_{ij}]$، $BC=[e_{ij}]$، $(AB)C=[x_{ij}]$ و $A(BC)=[y_{ij}]$. طبق تعریف حاصل ضرب ماتریس‌ها عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}x_{ij}&=\sum_{k=۱}^{p}d_{ik}c_{kj}\\&=\sum_{k=۱}^{p}\left(\sum_{l=۱}^{n}a_{il}b_{lk}\right)c_{kj}\\&=\sum_{k=۱}^{p}\sum_{l=۱}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj}\\&=\sum_{l=۱}^{n}a_{il}\left(\sum_{k=۱}^{p}b_{lk}c_{kj}\right)\\&=\sum_{l=۱}^{n}a_{il}e_{lj}\\&=y_{ij}\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. ■

شایان ذکر است که اگر AB تعریف شده باشد، لزومی ندارد BA نیز تعریف‌شدنی باشد، زیرا تعریف AB مستلزم این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد، و این امر الزامی در مورد برابری تعداد ستون‌های B با تعداد سطرهای A پیش نمی‌آورد. حتی اگر AB و BA هر دو تعریف‌شدنی باشند، لزومی ندارد هر دو به یک اندازه باشند، مثلاً به ازای $n>۱$، اگر A یک ماتریس $n\times ۱$ و B یک ماتریس $۱\times n$ باشند آنگاه:

$$A=[a_۱\dots a_n],\ B=\begin{bmatrix}b_۱\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

AB یک ماتریس 1×1 با تک‌درایهٔ $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ است، در حالی که BA یک ماتریس $n \times n$ است که درایهٔ سطر iام و ستون jام آن عبارت است از $b_i a_j$. حتی اگر A و B هر دو $n \times n$ (که در آن $n \geq 2$) باشند، لزومی بر تساوی AB و BA نیست، مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

البته در مورد ماتریس I_n و هر ماتریس $n \times n$ای چون A، از (پ) نتیجه می‌شود که $AI_n = I_n A (= A)$.

توجه کنید که برای یک nتایی مرتب از اعداد، مثلاً $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$، اکنون سه نمایش ممکن داریم، یکی به صورت بالا که معمولاً تجسم برداری دارد، دیگری به صورت یک ماتریس $1 \times n$، $[x_1 \ldots x_n]$، و بالاخره به صورت یک ماتریس $n \times 1$: $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. اغلب لازم است که بین این سه نمایش تمایز قائل شویم تا ابهامی در عملیات حاصل نشود. برای این منظور، هرگاه nتایی $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ به صورت ماتریس $1 \times n$ نوشته شود، آن را با $\langle \mathrm{x}|$ نمایش می‌دهیم، و هرگاه به صورت ماتریس $n \times 1$ نمایش داده شود، آن را با $|\mathrm{x}\rangle$ نمایش می‌دهیم. بنابراین، حاصل ضرب داخلی x و y را می‌توان به صورت $\langle \mathrm{x}|\mathrm{y}\rangle$ یا $\langle \mathrm{y}|\mathrm{x}\rangle$ نیز نمایش داد.

مفهوم نگاشت خطی

با مقدمهٔ بالا در مورد ماتریس‌ها، به موضوع اصلی بخش می‌پردازیم که «نگاشت‌های خطی» است. اصطلاحات «تابع»، «نگاشت»، و «تبدیل» در اینجا به صورت کاملاً مترادف به کار خواهند رفت، هرچند به لحاظ تاریخی گاهی تصاویر ذهنی متفاوتی از این اصطلاحات القا می‌شود. اگر S و T دو مجموعه باشند، مقصود از یک تابع (= نگاشت = تبدیل) از S به T قانونی چون f است که به هر عنصر s از S عنصر مشخصی مانند $f(s)$ از T نسبت می‌دهد. می‌نویسیم $f : S \longrightarrow T$. در گذشته، اصطلاح «تابع» معمولاً وقتی T برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، «تبدیل» در حالت $S = T$ یعنی برای تابعی از یک مجموعه به خود آن، و «نگاشت» برای تابع‌های $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (m, n بزرگ‌تر از ۱) به کار می‌رفت. ما چنین تمایزهایی را قائل نمی‌شویم. برای تابع $f : S \longrightarrow T$، مجموعهٔ S را **دامنه** (= **قلمرو**)، و مجموعهٔ T را **بُرد** می‌نامیم. مجموعهٔ $\{f(s)|s \in S\}$ که یک زیرمجموعهٔ T است، تصویر f، یا تصویر S تحت f، خوانده می‌شود. درواقع، برای هر زیرمجموعهٔ E از S تصویر E تحت f، که با $f(E)$ نمایش داده می‌شود، به صورت:

$$f(E) = \{f(s)|s \in E\}$$

تعریف می‌شود. تابع f را **یک به یک** می‌نامیم در صورتی که هرگاه $f(s_1) = f(s_2)$، $s_1 = s_2$ نتیجه شود، و f را **پوشا** می‌نامیم اگر $f(S) = T$. برای تابع‌های یک به یک و پوشا، $f : S \longrightarrow T$، تابعی به نام وارون f (یا معکوس f) به صورت زیر تعریف می‌شود که آن را با $f^{-1} : T \longrightarrow S$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $t \in T$، چون f پوشاست، عنصری چون s از S وجود دارد که $f(s) = t$. به‌علاوه، چون f یک به یک فرض شده است، چنین عنصر s به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود،

پس $f^{-۱}$ به صورت قانونی بی‌ابهام، $f_{(t)}^{-۱} = s$، تعریف‌شدنی است و داریم

$$f \circ f^{-۱} = ۱_T \ , \ f^{-۱} \circ f = ۱_S$$

که مقصود از ۱_X تابع همانی مجموعهٔ X است: به ازای هر $x \in X$، $۱_X(x) = x$.

نماد $f^{-۱}(t)$ حتی وقتی $f^{-۱}$ تعریف‌شدنی نباشد نیز به کار می‌رود. مقصود از $f^{-۱}(t)$ مجموعهٔ نقاطی از S است که تحت f به t فرستاده (= نگاشته) می‌شوند، یعنی

$$f^{-۱}(t) = \{s \in S | f(s) = t\}$$

$f^{-۱}(t)$ را **مجموعهٔ تراز** منسوب به t می‌خوانیم. به طور کلی، اگر Y زیرمجموعه‌ای از T باشد، زیرمجموعهٔ $f^{-۱}(Y)$ (تصویر وارون Y) یک زیرمجموعهٔ S است که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$f^{-۱}(Y) = \{s \in S | f(s) \in Y\}$$

موضوع اصلی بحث ما بررسی توابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (یا به طور کلی‌تر، توابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$) است. بدین‌ترتیب، چنین تابع fای به هر nتایی مرتب از اعداد حقیقی در دامنه، mتایی مرتبی از اعداد حقیقی نسبت می‌دهد:

$$f(x_۱, \ldots, x_n) = (y_۱, \ldots, y_m) \qquad (۶)$$

هر y_i وابسته به $(x_۱, \ldots, x_n)$ است، پس، درواقع، ارائهٔ f همانند ارائهٔ m تابع $\{f_۱, \ldots, f_m\}$، هر یک از S به $\mathbb{R}$ ، است، $f_i(x_۱, \ldots, x_n) = y_i$، که در آن $i = ۱, \ldots, m$. (۶) را به صورت (۷) نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} f_۱(x_۱, \ldots, x_n) = y_۱ \\ \cdots \\ f_m(x_۱, \ldots, x_n) = y_m \end{cases} \qquad (۷)$$

گاهی می‌نویسیم $f = (f_۱, \ldots, f_m)$ و هر f_i را یک مؤلفهٔ f می‌نامیم.

تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در (۶) یا (۷) را **خطی** می‌نامیم در صورتی که هر $f_i(x_۱, \ldots, x_n)$ یک عبارت همگن درجهٔ اول نسبت به $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ باشد، یعنی

$$\begin{cases} y_۱ = a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n \\ \cdots \qquad \cdots \\ y_m = a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (۸)$$

مقصود از «همگن» این است که همهٔ جملات سمت راست از یک درجه (که در اینجا همه از درجهٔ ۱)اند، و به‌خصوص جملهٔ ثابت وجود ندارد. اگر هر عبارت سمت راست را فقط از درجهٔ ۱ در نظر

بگیریم و محدودیت همگن بودن را حذف کنیم، یک عدد ثابت نیز ممکن است به هر جمله افزوده شود. این گونه توابع را **مستوی** می‌نامیم:

$$\begin{cases} y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \\ y_m = a_{m0} + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{۹}$$

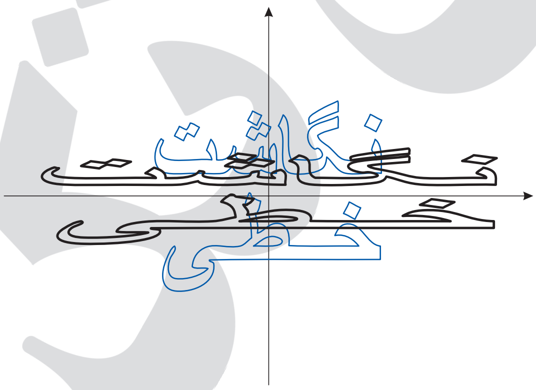
مقدار تابع مستوی (۹) از انتقال مقدار تابع (۸) با mتایی ثابت $(a_{10}, \dots, a_{m0})$ به دست می‌آید. پس، خواص توابع مستوی به‌سادگی از خواص توابع خطی نتیجه خواهند شد.

۴۷ مثال ۴ هر تابع خطی $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به شکل $f(x) = mx$ است که در آن $m \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقیِ داده‌شده است. هر تابع مستوی $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به شکل $g(x) = mx + b$ است که در آن m و b اعداد حقیقیِ داده‌شده‌اند. ■

۴۷ مثال ۵ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, x_2) = \left(2x_1, \frac{1}{2}x_2\right)$$

هر دو عبارت $2x_1$ و $\frac{1}{2}x_2$ از درجهٔ ۱ و نسبت به (x_1, x_2) همگن‌اند، پس f خطی است. عملکرد این تابع بدین صورت است که فاصلهٔ هر نقطه را از محور x_2 به دو برابر افزایش می‌دهد و فاصلهٔ آن را از محور x_1 نصف می‌کند. محور x_1 با ضریب تجانس ۲ به خود آن نگاشته می‌شود (انبساط با ضریب ۲)، و محور x_2 با ضریب تجانس $\frac{1}{2}$ روی خود منقبض می‌شود (شکل ۱۱.۷).



شکل ۱۱.۷

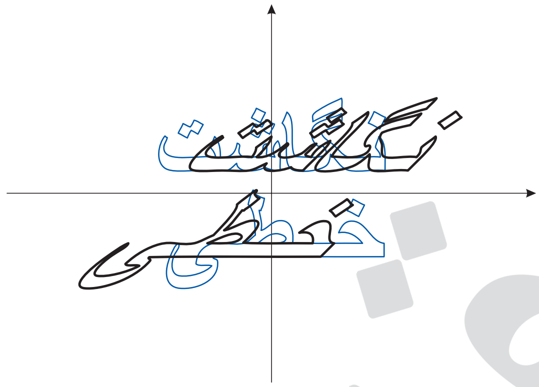
■

۴۷ مثال ۶ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$$

f خطی است. توجه کنید که هر خط راست افقی $x_2 = c$ به خود آن نگاشته می‌شود، ولی هر نقطهٔ روی این خط به اندازهٔ مقدار c انتقال افقی می‌یابد. بدین‌ترتیب، خطوط راست افقی بالای محور x_1

به طرف راست و خطوط افقی پایین محور x_1 به سمت چپ روی خود می‌لغزند. نقاط محور x_1 سر جای خود ثابت می‌مانند (شکل ۱۲.۷).



شکل ۱۲.۷

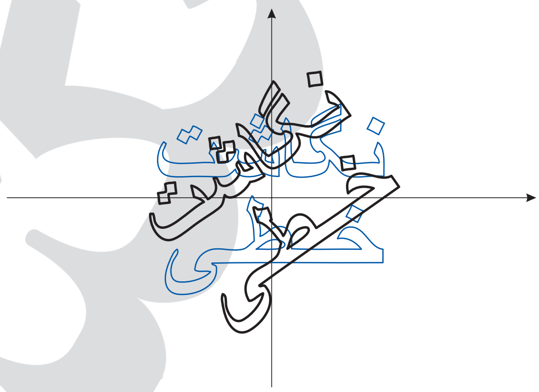
■

۴۷ مثال ۷ (دوران حول ۰ در $\mathbb{R}^2$) دوران حول ۰ در $\mathbb{R}^2$ با زاویهٔ α را در نظر بگیرید. اگر $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ نقطه‌ای غیر از ۰ در صفحه باشد، نمایش آن را به صورت قطبی در نظر بگیرید: $x_1 = |\mathrm{x}| \cos\theta$، $x_2 = |\mathrm{x}| \sin\theta$.

اگر دوران زاویهٔ α حول ۰ را با $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ نمایش دهیم، نمایش قطبی $f(x_1, x_2)$ چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \big(|\mathrm{x}|\cos(\theta+\alpha), |\mathrm{x}|\sin(\theta+\alpha)\big) \\ &= (|\mathrm{x}|\cos\theta\cos\alpha - |\mathrm{x}|\sin\theta\sin\alpha, |\mathrm{x}|\sin\theta\cos\alpha + |\mathrm{x}|\cos\theta\sin\alpha) \\ &= \big((\cos\alpha)x_1 - (\sin\alpha)x_2, (\sin\alpha)x_1 + (\cos\alpha)x_2\big) \end{aligned}$$

هر یک از دو مؤلفهٔ f یک تابع درجهٔ یک همگن نسبت به (x_1, x_2) است، پس f خطی است (شکل ۱۳.۷).



شکل ۱۳.۷

■

۴۷ مثال ۸ **تصویر روی زیرفضایی مختصاتی.** فرض کنید $n > m$ و $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$$

این تابع خطی است و عملکرد آن این است که نقطهٔ $(x_۱,\dots,x_n)$ را به $(x_۱,\dots,x_m)$، متشکل از m مؤلفهٔ اول آن، می‌نگارد. مثلاً به ازای ۳ $=n$ و ۲ $=m$، $f(x,y,z)=(x,y)$ تصویر (x,y,z) روی صفحهٔ (x,y) است. ■

۴۷ مثال ۹ $f:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}^۴$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x_۱,x_۲)=(x_۱,x_۱-x_۲,۲x_۱+x_۲,-x_۲)$$

چون هر مؤلفهٔ f عبارت درجهٔ یک همگنی نسبت به $(x_۱,x_۲)$ است، این تابع خطی است. ■

۴۷ مثال ۱۰ $f:\mathbb{R}^۳\longrightarrow\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x_۱,x_۲,x_۳)=(x_۱-x_۲+x_۳,x_۱x_۲)$$

این تابع خطی نیست زیرا مؤلفهٔ دوم f، یعنی $x_۱x_۲$ از درجهٔ یک نیست. ■

اکنون ارتباط میان دو بحث این بخش را بیان می‌کنیم. توجه کنید که می‌توان (۸) را به صورت زیر هم نوشت:

$$\begin{bmatrix} y_۱\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m۱} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

یا به طور فشرده:

$$|\mathrm{y}\rangle=A|\mathrm{x}\rangle \tag{۱۱}$$

یعنی مقدار یک تابع خطی بدین صورت محاسبه می‌شود که ضرایب a_{ij} در (۸) را در یک ماتریس $m\times n$ قرار دهیم و حاصل ضرب این ماتریس را در ستون $|x\rangle$ محاسبه کنیم. بدین‌ترتیب، یک تناظر یک به یک میان توابع خطی $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های $m\times n$ ایجاد می‌شود.

برای مثال‌های توابع خطی ۴ تا ۹ در بخش ۲، ماتریس‌های مربوط به ترتیب عبارت‌اند از:

الف) $[m]$،

ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$،

پ) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$،

ت) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$،

ث) $\begin{bmatrix} 1 & \bigcirc & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ \bigcirc & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$،

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

با نگاه کردن به ماتریس متناظر یک تابع خطی می‌توان عملکرد تابع خطی بر اعضای پایهٔ متداول، یعنی $\{e_1, \ldots, e_n\}$، را فوراً دریافت. توجه کنید اگر ماتریس $A = [a_{ij}]$ از سمت چپ در ستون $|e_j\rangle$ ضرب شود، ستون jاِم ماتریس $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ به دست می‌آید. بدین‌ترتیب، برای نوشتن ماتریس مربوط به یک تابع خطی f، کافی است $f(e_1)$، $\cdots$، $f(e_n)$ را محاسبه کنیم و نتایج حاصل را به ترتیب در ستون‌های اول تا nاُم درج کنیم.

ویژگی خطی بودن یک تابع را می‌توان به صورت دیگری نیز بیان کرد که اغلب در اثبات قضایا سودمند واقع می‌شود.

۴۷ گزاره ۱۱ نگاشت $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است اگر و تنها اگر واجد دو شرط زیر باشد:

الف) $f(x + x') = f(x) + f(x')$، به ازای هر x و x' در $\mathbb{R}^n$؛

ب) $f(rx) = rf(x)$، به ازای هر x در $\mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$؛

برهان اگر $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی باشد، ماتریس متناظر با آن، A، را در نظر می‌گیریم. عملکرد f روی عناصر x از $\mathbb{R}^n$ به صورت

$$|f(x)\rangle = A|x\rangle \qquad (12)$$

است. بنابراین:

$$\begin{aligned} |f(x+x')\rangle &= A|x+x'\rangle \\ &= A|x\rangle + A|x'\rangle \quad \text{(بنابر قانون توزیع‌پذیری ضرب ماتریسی)} \\ &= |f'(x)\rangle + |f(x')\rangle \end{aligned}$$

پس (الف) برقرار است. همین‌طور

$$|f(rx)\rangle = A|rx\rangle = r(A|x\rangle)$$

و (ب) برقرار است. برعکس، فرض کنید شرط‌های (الف) و (ب) برای تابع $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ برقرار باشند. باید نشان دهیم ماتریسی $m \times n$، مثل A، وجود دارد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم: $|f(x)\rangle = A|x\rangle$. از بحث قبل از گزاره به یاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس یک تابع خطی به ترتیب از مؤلفه‌های $f(e_1)$ تا $f(e_n)$ تشکیل می‌شوند. بنابراین نامزد واضحی برای

ماتریس مورد نظر A وجود دارد که باید در مورد آن ادعای $|f(\mathrm{x})\rangle = A|\mathrm{x}\rangle$ را ثابت کرد. ماتریس A را این گونه در نظر می‌گیریم که ستون jاِم آن، به ازای $j = ۱, \dots, n$، برابر $|f(\mathrm{e}_j)\rangle$ باشد. برای $\mathrm{x} = (x_۱, \dots, x_n) = x_۱\mathrm{e}_۱ + \cdots + x_n\mathrm{e}_n$ داریم

$$\begin{aligned}
|f(\mathrm{x})\rangle &= |f(x_۱\mathrm{e}_۱ + \cdots + x_n\mathrm{e}_n)\rangle \\
&= |x_۱ f(\mathrm{e}_۱) + \cdots + x_n f(\mathrm{e}_n)\rangle \quad \text{(طبق (الف) و (ب))} \\
&= |x_۱ f(\mathrm{e}_۱)\rangle + \cdots + |x_n f(\mathrm{e}_n)\rangle \\
&= x_۱|f(\mathrm{e}_۱)\rangle + \cdots + x_n|f(\mathrm{e}_n)\rangle \\
&= x_۱(A|\mathrm{e}_۱\rangle) + \cdots + x_n(A|\mathrm{e}_n\rangle) \\
&= A|x_۱\mathrm{e}_۱\rangle + \cdots + A|x_n\mathrm{e}_n\rangle \\
&= A|x_۱\mathrm{e}_۱ + \cdots + x_n\mathrm{e}_n\rangle \quad \text{(طبق قانون توزیع‌پذیری ضرب ماتریسی)} \\
&= A|\mathrm{x}\rangle
\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

بدین‌ترتیب، برای تحقیقِ خطی بودن یک تابع، تحقیق دو ویژگی (الف) و (ب) کافی است و نیازی به یافتن صریح ماتریس مربوط نیست.

این بخش را با ارائهٔ تعبیری از ضرب ماتریسی در ارتباط با نگاشت‌های خطی به پایان می‌بریم. تعریف ضرب ماتریسی در نگاه اول دور از ذهن و بدون انگیزهٔ مشخصی به نظر می‌رسد، ولی گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که حاصل ضرب دو ماتریس نمایشگر ترکیب تابع‌های خطی متناظر است.

۴۷ گزاره ۴ فرض کنید $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و $g\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ نگاشت‌هایی خطی‌اند. در این صورت، $g \circ f$ نیز نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^p$ است. به‌علاوه، اگر A ماتریس f و B ماتریس g باشد، BA ماتریس $g \circ f$ است.

برهان خطی بودن $g \circ f$ را می‌توان با استفاده از ضوابط گزارهٔ ۱۱ تحقیق کرد:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\mathrm{x} + \mathrm{x}') &= g\big(f(\mathrm{x} + \mathrm{x}')\big) \\
&= g\big(f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{x}')\big) \quad \text{(طبق بند (الف) گزارهٔ ۱۱)} \\
&= g\big(f(\mathrm{x})\big) + g\big(f(\mathrm{x}')\big) \quad \text{(طبق بند (الف) گزارهٔ ۱۱)} \\
&= (g \circ f)(\mathrm{x}) + (g \circ f)(\mathrm{x}')
\end{aligned}$$

و به همین ترتیب:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(r\mathrm{x}) &= g\big(f(r\mathrm{x})\big) \\
&= g\big(rf(\mathrm{x})\big) \quad \text{(طبق بند (ب) گزارهٔ ۱۱)} \\
&= rg\big(f(\mathrm{x})\big) \quad \text{(طبق بند (ب) گزارهٔ ۱۱)} \\
&= r(g \circ f)(\mathrm{x})
\end{aligned}$$

حال فرض کنید C ماتریس تابع خطی $g \circ f$ است. در این صورت:

$$\begin{aligned} C|\mathrm{x}\rangle &= |(g \circ f)(\mathrm{x})\rangle \\ &= |g\big(f(\mathrm{x})\big)\rangle \\ &= B|f(\mathrm{x})\rangle \\ &= B|(A|\mathrm{x}\rangle)\rangle \\ &= BA|\mathrm{x}\rangle \quad \text{(بنا بر شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی)} \end{aligned}$$

پس $C|\mathrm{x}\rangle = BA|\mathrm{x}\rangle$، یعنی اثر ضرب کردن دو ماتریس BA و C بر هر ستون $|\mathrm{x}\rangle$ یکی است. اگر x را به ترتیب برابر e_1 تا e_n در نظر بگیریم نتیجه می‌شود که ستون‌های BA و C یکسان است، پس

$$C = BA.$$

■

با توجه به این گزاره، برای دستیابی به نتیجهٔ عملکرد دو نگاشت خطی که به دنبال هم عمل می‌کنند کافی است ماتریس‌های مربوط را در هم ضرب کنیم. این مطلب انگیزهٔ تعریف ضرب ماتریسی است و در ضمن نشان می‌دهد چرا برای تعریف‌پذیر بودن BA لازم است که تعداد ستون‌های B برابر تعداد سطرهای A باشد.

۴.۷ تمرین

۱. صحت بند (ب) گزارهٔ ۲ همین بخش را تحقیق کنید.

۲. صحت بند (پ) همین گزاره را تحقیق کنید.

۳. همهٔ ماتریس‌های 2×2 حقیقی M را پیدا کنید که

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴. همهٔ ماتریس‌های 2×2 حقیقی M را پیدا کنید که

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M = M$$

۵. برای هر یک از ماتریس‌های داده‌شدهٔ A در زیر، همهٔ ماتریس‌های Mای را پیدا کنید که جذر A باشند، یعنی $MM = A$:

الف) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، پ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۶. برای هر یک از ماتریس‌های زیر یا یک جذر پیدا کنید یا نشان دهید آن ماتریس جذر ندارد:

الف) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$، ت) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$،

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، ث) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$،

پ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، ج) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۷. ماتریس $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید اگر برای ماتریس 2×2، A، $AM = 0$، آنگاه $A = 0$.

ب) ماتریس 3×3 ناصفر Bای پیدا کنید که $MB = 0$.

۸. تابع خطی $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را که با ماتریس M تمرین ۷ تعریف می‌شود در نظر بگیرید. نشان دهید f پوشاست ولی یک به یک نیست.

۹. نشان دهید تابع $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ مستوی است اگر و فقط اگر واجد این شرط باشد: به ازای هر $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$، رابطهٔ

$$f(r\mathrm{x} - r\mathrm{y} + \mathrm{z}) = rf(\mathrm{x}) - rf(\mathrm{y}) + f(\mathrm{z})$$

برقرار باشد.

۱۰. نشان دهید که تحت اثر هر تابع مستوی $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تصویر هر خط راستی یا خطی راست است یا فقط یک نقطه. اگر l و l' دو خط موازی در $\mathbb{R}^n$ باشند، نشان دهید $f(l)$ و $f(l')$ هر دو یا نقطه‌اند یا یک زوج خط موازی.

۱۱. تعریف نگاشت مستوی $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت $f(\mathrm{x}) = L(\mathrm{x}) + B$ ارائه می‌کنیم که در آن L نگاشت خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است و $B = (-1, -1)$. تصویر مربع $S = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \colon |\mathrm{x}| < 1, |\mathrm{y}| < 1\}$ را تحت اثر f توصیف کنید.

۱۲. تعریف نگاشت مستوی $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت $f(\mathrm{x}) = L(\mathrm{x}) + B$ ارائه می‌کنیم که در آن L نگاشت خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ است و $B = (2, 0)$. تصویر قرص واحد $B = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \big| \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \leqslant 1\}$ را تحت اثر f توصیف کنید.

۱۳. تعریف نگاشت مستوی $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت $f(\mathrm{x}) = L(\mathrm{x}) + B$ ارائه می‌کنیم که در آن L نگاشت خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ است و $B = (1, 1 - \sqrt{2})$.

نشان دهید f دوران با زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ حول $(1, 1)$ است.

۱۴. مجموعه ماتریس‌های 2×2ی حقیقیِ به شکلِ

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

را با ξ نمایش می‌دهیم.

الف) نشان دهید مجموع و حاصل ضرب دو عضو ξ در ξ است.

ب) تابع $H \colon \xi \longrightarrow \mathbb{C}$ را به‌صورت $H(M) = \alpha + i\beta$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید H تابعی یک به یک و پوشاست.

پ) اگر M_1 و M_2 عناصر ξ باشند و H طبق (ب)، نشان دهید:

$$H(M_1 + M_2) = H(M_1) + H(M_2)$$

و

$$H(M_1 M_2) = H(M_1) H(M_2)$$

۱۵. نشان دهید هر تابع خطی $L \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$، با ماتریسی به شکل M در تمرین ۱۴، ترکیب یک دوران و یک تجانس حول O است.

۵۷ نگاشت خطی (۲)

مثال‌های تابع خطی در بخش پیش نشان داد که توابع خطی تنوع فراوانی دارند. علی‌رغم این تنوع، مشترکاتی نیز میان توابع خطی هست که در بخش‌ها و فصل‌های آتی از آن‌ها بهره خواهیم گرفت. در این بخش به توصیف دستهٔ مهمی از این مشترکات می‌پردازیم.

نکته‌ای مشترک و ابتدایی میان همهٔ نگاشت‌های خطی $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ این است که f عنصر 0 در $\mathbb{R}^n$ را به عنصر 0 در $\mathbb{R}^m$ می‌نگارد، زیرا اگر هر ماتریس $m \times n$ را در ستون nتایی صفر ضرب کنیم، ستون mتاییِ صفر حاصل می‌شود. گزارهٔ زیر عملکرد تابع خطی روی هرگونه زیرفضای مستوی را توصیف می‌کند.

۵۷ گزاره ۱

فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی است. دراین‌صورت:

الف) تحت اثر f، تصویر هر زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ (به ترتیب، هر زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$) زیرفضایی خطی $\mathbb{R}^m$ (به ترتیب، یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^m$) است.

ب) اگر E_1 و E_2 دو زیرفضای مستوی هم‌بعد و موازی $\mathbb{R}^n$ باشند، $f(E_1)$ و $f(E_2)$ دو زیرفضای مستوی هم‌بعد و موازی با (یا منطبق بر) $\mathbb{R}^m$اند.

برهان

الف) نخست، فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، باید ثابت کنیم

$$f(E) = \{f(\mathrm{x}) | \mathrm{x} \in E\}$$

یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ است. طبق گزارهٔ ۱ در بخش ۲ باید ثابت کنیم که اگر $\mathrm{y} \in f(E)$ و $r \in \mathbb{R}$، آنگاه $r\mathrm{y}$ نیز عضوی از $f(E)$ است، و اگر $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in f(E)$، آنگاه $\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 \in f(E)$. حال اگر $\mathrm{y} \in f(E)$، عضوی مانند x از E وجود دارد که $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$. پس:

$$\begin{aligned} r\mathrm{y} &= rf(\mathrm{x}) \\ &= f(r\mathrm{x}) \qquad \text{(طبق بندِ (ب) گزارهٔ ۱۱)} \end{aligned}$$

ولی طبق بندِ (ب) گزارهٔ ۱ در بخش ۲، $r\mathrm{x} \in E$ پس $r\mathrm{y} \in f(E)$. به همین ترتیب، اگر $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in f(E)$، عضوهای x_1 و x_2 از E موجودند که $\mathrm{y}_1 = f(\mathrm{x}_1)$ و $\mathrm{y}_2 = f(\mathrm{x}_2)$؛ پس

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 &= f(\mathrm{x}_1) + f(\mathrm{x}_2) \\ &= f(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2) \qquad \text{(طبق بند (الف) گزارهٔ ۱۱)} \end{aligned}$$

ولی طبق بند (ب) گزارهٔ ۱۱ بخش ۲، $\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \in E$. بنابراین $\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 \in f(E)$.

حال فرض کنید E زیرفضایی مستوی باشد، پس $E = a + E^\circ$ که E° انتقال‌یافتهٔ E به مبدأ است و $a \in E$. از آنجا که $f(E) = f(a) + f(E^\circ)$ و، طبق آنچه در بالا ثابت شد، $f(E^\circ)$ زیرفضایی خطی و $f(E)$ زیرفضایی مستوی است.

حکم (ب) هم با همین نوع استدلال ثابت می‌شود. اگر E_1 و E_2 دو زیرفضای هم‌بعد موازی باشند، چون انتقال‌یافته آن‌ها به مبدأ یکی است، به ازای aی مناسب در $\mathbb{R}^n$ داریم: $E_2 = a + E_1$. بنابراین، $f(E_2) = f(a) + f(E_1)$، یعنی $f(E_2)$ از انتقال $f(E_1)$ توسط $f(a)$ به دست می‌آید. در حالتی که $f(a) \in f(E_1)$، نتیجه می‌گیریم $f(E_2) = f(E_1)$، و در غیراین‌صورت، $f(E_1)$ و $f(E_2)$ موازی و هم‌بُعدند. ■

۵۷ مثال ۲

تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را که با ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم. تصویر هر نقطهٔ (x, y, z) تحت f را با (X, Y, Z) نمایش می‌دهیم. پس $(X, Y, Z) = f(x, y, z)$ و

$$X = -x + y, \quad Y = 2x + y - z, \quad Z = 5x + y - 2z \qquad (1)$$

توجه کنید که $Z = ۲Y - X$؛ پس کل $\mathbb{R}^۳$ به یک صفحهٔ گذرنده از ۰ (زیرفضای خطی دوبعدی) یعنی $x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۰$ نگاشته می‌شود. حال اثر f را بر چند صفحهٔ خاص در نظر می‌گیریم. نخست، صفحهٔ مختصاتی (x, y)، متشکل از نقاط $(x, y, ۰)$، را در نظر بگیرید. طبق (۱) داریم

$$f(x, y, ۰) = (-x + y, ۲x + y, ۵x + y)$$

ادعا می‌کنیم هر نقطهٔ صفحهٔ $x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۰$ در تصویر صفحهٔ مختصاتی (x, y) قرار دارد. اگر $(x_۱, x_۲, -x_۱ + ۲x_۲)$ چنین نقطه‌ای باشد، باید نشان دهیم دستگاه زیر برحسب x و y جواب دارد:

$$\begin{cases} -x + y = x_۱ \\ ۲x + y = x_۲ \\ ۵x + y = -x_۱ + ۲x_۲ \end{cases}$$

دو معادلهٔ اول جواب منحصر به فرد $x = \frac{-x_۱ + x_۲}{۳}$، $y = \frac{۲x_۱ + x_۲}{۳}$ را دارند که با جایگزینی در معادلهٔ سوم نیز صدق می‌کند. پس، درواقع، صفحهٔ مختصاتی (x, y) یک به یک بر صفحهٔ تصویر همهٔ $\mathbb{R}^۳$ نگاشته می‌شود. محاسبهٔ مشابه با صفحات مختصاتی (x, z) و (y, z) نشان خواهد داد که هر یک از این صفحات نیز یک به یک بر $f(\mathbb{R}^۳)$ نگاشته می‌شود. حال تصویر صفحهٔ $x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۰$ را تحت f بررسی می‌کنیم. نقاط این صفحه به شکل $(x, y, x + ۲y)$ است. طبق (۱) داریم

$$f(x, y, x + ۲y) = (-x + y, x - y, ۳x - ۳y)$$

بدین‌ترتیب، هر نقطهٔ تصویر مضربی از سه‌تایی $(-۱, ۱, ۳)$ است، یعنی خطِ راستِ

$$\frac{x}{-۱} = \frac{y}{۱} = \frac{z}{۳}$$

تصویر صفحه است. بدین‌ترتیب، تصویر برخی صفحاتی که تاکنون بررسی کردیم یک صفحه (دوبعدی) است و برخی دیگر خطی راست (یک‌بعدی). اینجا این سؤال پیش می‌آید که چه قانونی بر تعیین بعد تصویر حاکم است؟ بررسی‌های بعدی این موضوع را روشن خواهد ساخت. ■

برای تابع خطی $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$، هستهٔ f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و با $\ker(f)$ (مخفف kernel به معنای هسته) نمایش می‌دهیم:

$$\ker(f) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \colon f(\mathrm{x}) = ۰\} \qquad (۲)$$

۵۷ گزارهٔ ۳ $\ker(f)$ زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ است.

برهان اگر x و x' در $\ker(f)$ باشند، باید نشان دهیم $\mathrm{x}+\mathrm{x}'$ در $\ker(f)$ است، و اگر به‌علاوه $r \in \mathbb{R}$، باید نشان دهیم $r\mathrm{x}$ نیز در $\ker(f)$ است:

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{x}') = f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{x}') \quad \text{(طبق بند (الف) گزارهٔ ۱۱)}$$
$$= \circ + \circ = \circ$$
$$f(r\mathrm{x}) = rf(\circ) \quad \text{(طبق بند (ب) گزارهٔ ۱۱)}$$
$$= r\circ = \circ$$

و حکم به اثبات می‌رسد. ■

حال طبق بند (ب) گزارهٔ ۱ همین بخش، اگر L از انتقال هستهٔ f با یک عضو ثابت $\mathbb{R}^n$ به دست آید، تصویر L تحت f موازی و هم‌بعد تصویر هستهٔ تحت f است، ولی هسته به تک‌نقطهٔ $\{\circ\}$ نگاشته می‌شود، بنابراین تصویر L یک تک‌نقطه است.

۵۷ گزاره ۴ اگر K هستهٔ f باشد و $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^n$، تصویر $\mathrm{a}+K$ تحت f تک‌نقطهٔ $\{f(\mathrm{a})\}$ است. برعکس، اگر b نقطه‌ای در $\mathbb{R}^m$ باشد، $f^{-1}(\mathrm{b})$ (مجموعهٔ تراز منسوب به b) یا تهی است یا یک زیرفضای مستوی هم‌بعد و موازیِ K.

برهان قسمت اول حکم را در بالا توضیح دادیم و برای قسمت دوم فرض کنید $f^{-1}(\mathrm{b})$ تهی نباشد، آنگاه عنصری چون a در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $f(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$. نشان می‌دهیم:

$$f^{-1}(\mathrm{a}) = \mathrm{a} + K$$

نخست به ازای هر عنصر $\mathrm{a}+K$، یعنی عنصر به شکل $\mathrm{a}+\mathrm{x}$ که $\mathrm{x} \in K$،

$$f(\mathrm{a}+\mathrm{x}) = f(\mathrm{a}) + f(\mathrm{x})$$
$$= f(\mathrm{a})$$
$$= \mathrm{b}$$

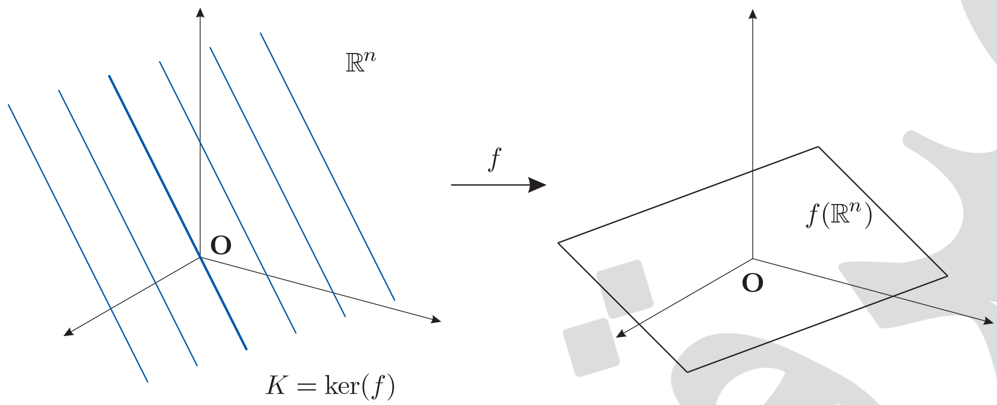
برعکس، اگر $\mathrm{a}' \in f^{-1}(\mathrm{b})$، می‌نویسیم:

$$\mathrm{a}' = \mathrm{a} + (\mathrm{a}' - \mathrm{a}) \tag{۳}$$

$\mathrm{a}' - \mathrm{a}$ در هسته است زیرا

$$f(\mathrm{a}' - \mathrm{a}) = f(\mathrm{a}') - f(\mathrm{a})$$
$$= \mathrm{b} - \mathrm{b} = \circ$$

بنابراین (۳) نشان می‌دهد که هر عضو $f^{-1}(\mathrm{b})$ مجموع a با یک عنصر هسته است و اثبات حکم کامل می‌شود. ■



شکل ۱۴.۷

نتیجه‌های اخیر تصویری ساده و به لحاظی کامل از عملکرد تابع خطیِ $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ به دست می‌دهند. طبق گزارهٔ ۱ همین بخش، کل $\mathbb{R}^n$ به یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ نگاشته می‌شود، هسته به نقطهٔ ۰ و زیرفضاهای موازی و هم‌بعد هسته هر یک به‌تمامی به یک نقطهٔ تصویر نگاشته می‌شوند. از هر نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای منحصر به فرد هم‌بعد و موازی K می‌گذرد که همهٔ نقاط آن به یک نقطهٔ واحد در $f(\mathbb{R}^n)$ نگاشته می‌شوند. می‌توان عملکرد تابع خطی را این گونه تجسم کرد که بر اثر آن، هر یک از زیرفضاهای مستوی موازی و هم‌بعد هسته به یک نقطه در $\mathbb{R}^m$ منقبض می‌شود (شکل ۱۴.۷) و حاصل زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^m$ است. به‌نظر می‌آید که بر اثر انقباض این زیرفضاهای مستوی به تک‌نقطه‌ها باید تصویر $\mathbb{R}^n$ تحت f، بعُدی برابر $(n-k)$ داشته باشد که k بعد هسته است. درواقع، حکم کلی زیر برقرار است.

۵۷ قضیه ۵ فرض کنید E زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد، دراین‌صورت:

$$\dim E = \dim f(E) + \dim \big(E \cap \ker(f)\big) \qquad (۴)$$

برهان نخست، توجه کنید که طبق گزارهٔ ۲۱ در بخش ۲.۷، اشتراک هر دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^n$ زیرفضایی خطی است؛ بنابراین، $E \cap \ker(f)$ زیرفضایی خطی است و بُعد آن معنی دارد. درحالتی که $E \cap \ker f = E$، لزوماً $E \subset \ker f$؛ پس $f(E) = \{۰\}$ و رابطهٔ (۴) برقرار است. بنابراین، فرض کنید $E \cap \ker f$ همهٔ E نباشد، مثلاً $\dim(E \cap \ker f) = l$، $\dim E = k$، و $l < k$. توجه کنید که می‌توان پایه‌ای چون $\{A_۱, \ldots A_k\}$ برای E انتخاب کرد که در آن $\{A_۱, \ldots, A_l\}$ پایه‌ای برای $E \cap \ker f$ باشد. مثلاً اگر $\{A_۱, \ldots, A_l\}$ پایهٔ یکامتعامدی برای $E \cap \ker f$ باشد، می‌توان به روش بند ۱۴ در بخش ۳.۷ (تکمیل مجموعهٔ متعامد به پایه) $\{A_۱, \ldots, A_l\}$ را به یک پایه (یکامتعامد) برای تمام E توسعه داد. حال نشان می‌دهیم $\dim f(E) = k - l$ که از آن (۴) نتیجه خواهد شد. عضو دلخواه x از E را به‌صورت ترکیبی خطی از اعضای پایه می‌نویسیم:

$$x = t_۱ A_۱ + \cdots + t_l A_l + t_{l+۱} A_{l+۱} + \cdots + t_k A_k$$

پس

$$f(\mathrm{x}) = t_۱ f(\mathrm{A}_۱) + \cdots + t_l f(\mathrm{A}_l) + t_{l+۱} f(\mathrm{A}_{l+۱}) + \cdots + t_k f(\mathrm{A}_k)$$

چون $\mathrm{A}_۱$، …، A_k اعضای هستهٔ fاند، به ازای $i \leq k$، $f(\mathrm{A}_i) = ۰$. بنابراین:

$$f(\mathrm{x}) = t_{l+۱} f(\mathrm{A}_{l+۱}) + \cdots + t_k f(\mathrm{A}_k)$$

یعنی هر عضو $f(E)$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $f(\mathrm{A}_{l+۱}), \ldots, f(\mathrm{A}_k)$ نوشت. اگر نشان دهیم این مجموعه یعنی $(k-l)$تایی مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که $\{f(\mathrm{A}_{l+۱}), \ldots, f(\mathrm{A}_k)\}$ پایه‌ای برای $f(E)$ است و حکم نتیجه می‌شود. فرض کنید برای ضرایب $c_{l+۱}$، …، c_k رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$c_{l+۱} f(\mathrm{A}_{l+۱}) + \cdots + c_k f(\mathrm{A}_k) = ۰$$

چون f خطی است، پس

$$f(c_{l+۱}\mathrm{A}_{l+۱} + \cdots + c_k \mathrm{A}_k) = ۰$$

بدین‌ترتیب، $c_{l+۱}\mathrm{A}_{l+۱} + \cdots + c_k \mathrm{A}_k$ باید عضو $E \cap \ker f$ باشد. ولی $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_l\}$ پایه‌ای برای $E \cap \ker f$ است، بنابراین ضرایب $c_۱$، …، c_k وجود دارند که

$$c_{l+۱}\mathrm{A}_{l+۱} + \cdots + c_k \mathrm{A}_k = c_۱ \mathrm{A}_۱ + \cdots + c_l \mathrm{A}_l,$$

یا

$$c_۱ \mathrm{A}_۱ + \cdots + c_l \mathrm{A}_l - c_{l+۱}\mathrm{A}_{l+۱} - \cdots - c_k \mathrm{A}_k = ۰$$

از استقلال خطی $\{\mathrm{A}_۱, \ldots, \mathrm{A}_k\}$ نتیجه می‌گیریم که همهٔ c_iها، به‌خصوص $c_{l+۱}$، …، c_k، باید صفر باشند. پس استقلال خطی $\{f(\mathrm{A}_{l+۱}), \ldots, f(\mathrm{A}_k)\}$ و حکم قضیه نتیجه می‌شوند.

■

با استفاده از همین قضیه، اکنون می‌توانیم مثال ۲ در همین بخش را کامل‌تر بررسی کنیم، به نحوی که روشن شود بعضی تصویرهای زیرفضاهای دوبعدی گوناگون یک‌بعدی و بعضی دیگر دوبعدی‌اند. برای این کار، نخست هستهٔ تابعِ خطیِ داده‌شده در مثال را پیدا می‌کنیم. باید عناصر $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^۳$ را که

$$A|\mathrm{x}\rangle = |۰\rangle \qquad (۵)$$

مشخص کنیم. در اینجا A ماتریس ۳×۳ی داده‌شده در مثال است. به ازای $\mathrm{x} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ از (۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} -x_۱ + x_۲ = ۰ \\ ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ = ۰ \\ ۵x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ = ۰ \end{cases}$$

بنابراین، $x_۱ = x_۲$ و $x_۳ = ۳x_۱$، پس هستهٔ f خط راست زیر است:

$$\frac{x_۱}{۱} = \frac{x_۲}{۱} = \frac{x_۳}{۳} \qquad (۶)$$

حال اگر E یک زیرفضای خطیِ دوبعدی $\mathbb{R}^۳$ باشد، طبق قضیهٔ ۵ در همین بخش، بُعد $f(E)$ برابر $۲ - l$ است که l بُعد $E \cap \ker f$ است. چون $\ker f$ یک‌بُعدی است، دو امکان وجود دارد: یا اشتراک E با $\ker f$ برابر $\{۰\}$ است که در این صورت $\dim f(E) = ۲$، یا اینکه E شامل خط راست (۶) است و تصویر آن یک‌بُعدی است، دیگر صفحاتی که در آن مثال در نظر گرفته شدند با (۶) فقط در ۰ اشتراک دارند و تصویر آن‌ها دوبُعدی است.

در همین مثال، اگر E یک صفحهٔ دلخواه، یعنی زیرفضای مستوی دوبُعدی باشد (نه لزوماً صفحهٔ گذرنده از ۰)، در مورد تصویر آن چه می‌توان گفت؟ طبق گزارهٔ ۱ (ب)، $f(E)$ یک زیرفضای مستوی موازی و هم‌بعد با $f(E^\circ)$ است که E° انتقال‌یافتهٔ E به ۰ است. بنابراین، برای یافتن بُعد $f(E)$ باید E را به ۰ منتقل کرد تا زیرفضای E° به دست آید و آنگاه:

$$\dim f(E) = \dim E - \dim\, (E^\circ \cap \ker f) \qquad (۷)$$

اکنون به ذکر چند کاربرد از بحث این بخش می‌پردازیم. در گزاره‌های زیر نگاشت خطی

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

منظور است.

۵۷ گزاره ۶ شرط لازم و کافی برای یک به یک بودن f این است که $\ker\,(f) = \{۰\}$. در این حالت لزوماً $n \leq m$.

برهان اگر عنصری چون $\mathrm{x} \neq ۰$ در هسته باشد، چون $f(\mathrm{x}) = f(۰) = ۰$، f یک به یک نیست. حال فرض کنید $\ker f = \{۰\}$ و $f(\mathrm{x}_۱) = f(\mathrm{x}_۲)$. چون f خطی است، نتیجه می‌گیریم که $f(\mathrm{x}_۱ - \mathrm{x}_۲) = ۰$، یعنی $\mathrm{x}_۱ - \mathrm{x}_۲ \in \ker\,(f)$، بنابراین طبق فرض، $\mathrm{x}_۱ = \mathrm{x}_۲$ و یک به یک بودن به اثبات می‌رسد. در این حالت، $\dim\,\big(f(\mathbb{R}^n)\big) = n$، و چون $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$، نتیجه می‌گیریم $n \leq m$. ■

در فرمول (۴)، وقتی $E = \mathbb{R}^n$، داریم:

$$n = \dim\,\big(f(\mathbb{R}^n)\big) + \dim\,\big(\ker\,(f)\big)$$

پوشا بودن f معادل $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ است، یعنی $n = m + \dim\,\big(\ker\,(f)\big)$. بنابراین گزارهٔ زیر حاصل می‌شود.

۵۷ گزاره ۷ شرط لازم و کافی برای پوشا بودن f این است که $\dim\,\big(\ker\,(f)\big) = n - m$. در این حالت، لزوماً $n \geq m$. ■

برای توابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$، یعنی در حالت $m = n$، گزارهٔ ۸ از گزاره‌های ۶ و ۷ نتیجه می‌شود.

۵۷ ۸ گزاره تابع خطی $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک است اگر و فقط اگر پوشا باشد. ■

می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای وجود تابع وارون، یک به یک و پوشا بودن تابع است. بدین‌ترتیب، وقتی $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک (یا به صورت معادل پوشا) باشد، تابعی چون $f^{-1}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که

$$f^{-1}\big(f(\mathrm{x})\big)=\mathrm{x}\,,\ f\big(f^{-1}(\mathrm{x})\big)=\mathrm{x}$$

ادعا می‌کنیم که f^{-1} نیز خطی است. فرض کنید $\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2\in\mathbb{R}^n$. چون f پوشاست، x_1 و x_2 به گونه‌ای وجود دارند که $\mathrm{y}_1=f(\mathrm{x}_1)$ و $\mathrm{y}_2=f(\mathrm{x}_2)$. بنابراین:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathrm{y}_1+\mathrm{y}_2) &= f^{-1}\big(f(\mathrm{x}_1)+f(\mathrm{x}_2)\big)\\ &= f^{-1}\big(f(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2)\big) \qquad (\text{چون } f \text{ خطی است})\\ &= \mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2\\ &= f^{-1}(\mathrm{y}_1)+f^{-1}(\mathrm{y}_2) \end{aligned}$$

به همین ترتیب، اگر $\mathrm{y}=f(\mathrm{x})$ و r عددی حقیقی باشد:

$$\begin{aligned} f^{-1}(r\mathrm{y}) &= f^{-1}\big(rf(\mathrm{x})\big)\\ &= f^{-1}\big(f(r\mathrm{x})\big) \qquad (\text{چون } f \text{ خطی است})\\ &= r\mathrm{x}\\ &= rf^{-1}(\mathrm{y}) \end{aligned}$$

چون f^{-1} خطی است، ماتریسی $n\times n$، B، به آن منسوب می‌شود. اگر A ماتریس تابع خطی f باشد، رابطهٔ B را با A بررسی می‌کنیم. داریم $f\circ f^{-1}=1_{\mathbb{R}^n}$ و $f^{-1}\circ f=1_{\mathbb{R}^n}$ که در آن $1_{\mathbb{R}^n}$ تابع همانی $\mathbb{R}^n$ است. از آنجا که ماتریس $1_{\mathbb{R}^n}$ برابر I_n است و ترکیب توابع خطی متناظر با حاصلِ ضرب ماتریس‌های مربوط است، داریم:

$$BA=I_n,\ \ AB=I_n$$

چنین ماتریس Bای را وارون یا معکوس ماتریس A می‌خوانیم و معمولاً با A^{-1} نمایش می‌دهیم.

رابطه با دستگاه معادلات خطی

مطالبی که در این بخش بررسی شد بازتاب و تعبیر مستقیمی در مورد دستگاه‌های معادلات درجه یک دارد و برعکس بحث در مورد این دستگاه‌ها را می‌توانیم در چارچوب نگاشت‌های خطی انجام دهیم. موضوع را با یک مثال آموزنده آغاز می‌کنیم.

۵۷ ۹ مثال فرض کنید E_1 و E_2 دو صفحه (زیرفضای مستوی دوبعدی) در $\mathbb{R}^4$ باشد. نشان می‌دهیم:

الف) اگر $E_1\cap E_2$ یک تک‌نقطه، E_1' یک صفحهٔ موازی E_1، E_2' یک صفحهٔ موازی E_2 باشد، آنگاه $E_1'\cap E_2'$ نیز یک تک‌نقطه است.

ب) اگر $E_1 \cap E_2$ خط راستی باشد، صفحه‌ای چون E'_1 موازی E_1 و صفحه‌ای چون E'_2 موازی E_2 وجود دارند به طوری که $E'_1 \cap E'_2$ تهی است.

فرض کنید E_1 صفحهٔ گذرنده از p به موازات A_1 و A_2 باشد به نحوی که $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\}$ مستقل خطی باشد، و E_2 صفحهٔ گذرنده از q به موازات B_1 و B_2 به نحوی که $\{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2\}$ مستقل خطی باشد. این را که E_1 و E_2 دقیقاً یک نقطهٔ مشترک دارند می‌توان بدین صورت بیان کرد که چهارتاییِ منحصر به فردِ (s_1, s_2, t_1, t_2) از اعداد حقیقی وجود دارد که

$$\mathrm{p} + s_1\mathrm{A}_1 + s_2\mathrm{A}_2 = \mathrm{q} + t_1\mathrm{B}_1 + t_2\mathrm{B}_2 \tag{8}$$

حال p، q، A_1، A_2، B_1، و B_2 همگی عناصر $\mathbb{R}^4$، یعنی چهارتایی‌اند. می‌نویسیم:

$$\mathrm{A}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}), \mathrm{q} = (q_1, \ldots, q_4), \mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_4)$$

$$\mathrm{B}_2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42}), \mathrm{B}_1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41}), \mathrm{A}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$$

پس اگر مؤلفه‌های اول تا چهارم دو طرف (۸) را برابر قرار دهیم،

$$\begin{cases} p_1 + s_1a_{11} + s_2a_{12} = q_1 + t_1b_{11} + t_2b_{12} \\ p_2 + s_1a_{21} + s_2a_{22} = q_2 + t_1b_{21} + t_2b_{22} \\ p_3 + s_1a_{31} + s_2a_{32} = q_3 + t_1b_{31} + t_2b_{32} \\ p_4 + s_1a_{41} + s_2a_{42} = q_4 + t_1b_{41} + t_2b_{42} \end{cases} \tag{9}$$

حاصل می‌شود. با انتقال جملات دارای t_1، t_2، s_1، و s_2 به سمت چپ و دیگر جملات به سمت راست، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_{11} & -b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & -b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & -b_{31} & -b_{32} \\ a_{41} & a_{42} & -b_{41} & -b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \\ q_4 - p_4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

ماتریس 4×4 سمت چپ یک تابع خطی $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ را تعریف می‌کند. این را که E_1 و E_2 فقط یک نقطهٔ اشتراک دارند بدین صورت می‌توانیم بیان کنیم که یک و فقط یک نقطهٔ $\mathbb{R}^4$ به نقطهٔ $(\mathrm{q} - \mathrm{p})$ نگاشته می‌شود، یا مجموعهٔ تراز $f^{-1}(\mathrm{q} - \mathrm{p})$ تک‌عضوی است. می‌دانیم که همهٔ مجموعه‌های تراز ناتهی از انتقال هسته به دست می‌آیند و با هم موازی‌اند. پس در این حالت هسته برابر $\{0\}$ است و درنتیجه f یک به یک و پوشاست. حال اگر به جای E_1 و E_2، دو زیرفضای موازی جایگزین کنیم، فقط طرف راست (۱۰) عوض می‌شود، ولی از آنجا که f یک به یک و پوشاست، مجدداً جواب منحصر به فردی چون (s_1, s_2, t_1, t_2) برای دستگاه به دست می‌آید، یعنی اشتراک دو زیرفضای موازی نیز یک تک‌نقطه است.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که $E_1 \cap E_2$ خط راستی باشد. به زبان توابع خطی، این مطلب را می‌توانیم به این صورت بیان کنیم که مجموعهٔ تراز $f^{-1}(\mathrm{q} - \mathrm{p})$ یک‌بعدی است. نتیجه می‌شود

که هستهٔ تابع خطی $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ یک‌بعدی است. بنابراین، f یک به یک نیست و طبق گزارهٔ ۸ پوشا نیست. پس طرف راست (۱۰) را می‌توانیم طوری اختیار کنیم که مجموعهٔ تراز منسوب به آن تهی باشد. مثلاً با ثابت نگاه داشتن p و تغییر مناسب q، می‌توانیم به چنین نقطه‌ای برسیم. نتیجه اینکه با انتقال موازی مناسب E_1 و E_2 می‌توانیم به دو صفحهٔ با اشتراک تهی برسیم. ■

مثال بالا به‌خوبی بیانگر آن است که بسیاری از سؤال‌های مربوط به دستگاه‌های معادلات خطی را اکنون می‌توان به کمک اطلاعاتی جواب داد که در مورد توابع خطی کسب کرده‌ایم. دستگاه کلی m معادلهٔ nمجهولی درجهٔ یک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{11}$$

یا به طور خلاصه:

$$A|\mathrm{x}\rangle = |\mathrm{b}\rangle \tag{12}$$

که در آن $A=[a_{ij}]$. دستگاهی را که طرف چپ آن مانند (۱۲) باشد و طرف راست آن از صفر تشکیل شده باشد، دستگاه همگن وابسته به (۱۱) یا (۱۲) می‌نامند:

$$A|\mathrm{x}\rangle = |0\rangle \tag{13}$$

جدول زیر رابطهٔ بین جبر حل دستگاه‌های معادلات بالا و هندسهٔ توابع خطی را خلاصه می‌کند:

جبر	هندسه
حل (۱۲) به ازای bی داده‌شده	یافتن مجموعهٔ تراز منسوب به b
وجود جواب به ازای bی داده‌شده	ناتهی بودن مجموعهٔ تراز منسوب به b
وجود جواب به ازای هر b	پوشا بودن تابع خطی f
یکتایی جواب در صورت وجود	هسته $=\{0\}$
حل دستگاه همگن	یافتن هسته

چند نمونه از احکام جبری را که اکنون می‌توانیم درستی آن‌ها را با توسل به هندسهٔ توابع خطی نشان دهیم در زیر می‌آوریم. مثال‌های دیگری در تمرین‌ها آمده‌اند.

۵٫۷ مثال ۱۰ اگر تعداد معادلات از تعداد مجهول‌ها بیشتر باشد، می‌توانیم b را طوری اختیار کنیم که دستگاه جواب نداشته باشد.

برهان این حالت $m>n$ است که طبق گزارهٔ ۷ تابع خطی مربوط به آن پوشا نیست، یعنی $\mathrm{b}\in\mathbb{R}^m$ وجود دارد که در آن $f^{-1}(\mathrm{b})$ تهی است. ■

مثال ۱۱ اگر $\bar{\mathrm{x}} = (\bar{\mathrm{x}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{x}}_n)$ یک جواب (۱۱) باشد، هر جواب (۱۱) به شکل $\mathrm{x} + \bar{\mathrm{x}}$ است که در آن $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ یک جواب دستگاه همگن متناظر است.

برهان طبق فرض، $f(\bar{\mathrm{x}}) = \mathrm{b}$. اگر x یک جواب دستگاه همگن باشد، x در هستهٔ f است، پس $f(\mathrm{x} + \bar{\mathrm{x}}) = f(\mathrm{x}) + f(\bar{\mathrm{x}})$. برعکس، فرض کنید $\bar{\bar{\mathrm{x}}}$ جواب دیگری از (۱۱) باشد، آنگاه:

$$f(\bar{\bar{\mathrm{x}}} - \bar{\mathrm{x}}) = f(\bar{\bar{\mathrm{x}}}) - f(\bar{\mathrm{x}}) = \mathrm{b} - \mathrm{b} = 0$$

پس $\bar{\bar{\mathrm{x}}} - \bar{\mathrm{x}}$ در هسته است و می‌توان نوشت $\bar{\bar{\mathrm{x}}} = (\bar{\bar{\mathrm{x}}} - \bar{\mathrm{x}}) + \bar{\mathrm{x}}$. ■

حالت مهم $m = n$ (تساوی تعداد مجهول‌ها و تعداد معادله‌ها) را در نظر بگیرید. دیدیم که شرایط زیر در این حالت معادل‌اند: f یک به یک، f پوشا، f وارون‌پذیر، هستهٔ $f = \{0\}$. در این حالت، ماتریس مربوط، A، وارون‌پذیر است و با ضرب کردن دو طرف (۱۲) در A^{-1} از سمت چپ، جواب (منحصر به فرد) دستگاه به دست می‌آید:

$$|\mathrm{x}\rangle = A^{-1}|\mathrm{b}\rangle \qquad (14)$$

تمرین

۱. در هر مورد، برای تابع خطی مربوط به ماتریس داده‌شده هسته و تصویر تابع را توصیف کنید و مشخص کنید که تابع خطی یک به یک است یا نیست، پوشاست یا نیست، و اگر تابع خطی وارون‌پذیر است، ماتریس وارون تابع را محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، ث) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$،

ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$، ج) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$،

پ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$، چ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$،

ت) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$، ح) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \bigcirc \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \bigcirc & & & & 0 \end{bmatrix}$.

۲. نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تصویر خط راست $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ و صفحهٔ $x + 2y - 2z - 4 = 0$ را تحت اثر f پیدا کنید.

۳. برای تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ در تمرین ۲ نشان دهید که تصویر محور x_1 و تصویر صفحهٔ (x_2, x_3) تحت اثر f بر یکدیگر عمود نیستند.

۴. تابع خطی $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

بُعد هسته و بُعد تصویر تابع را تعیین کنید. تصویر ابرصفحهٔ $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0$ را تحت اثر f پیدا کنید.

۵. نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) صفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f خطی راست باشد و صفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f یک صفحه باشد.

ب) ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f یک صفحه باشد و ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f سه‌بُعدی باشد.

۶. تابع خطی $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ماتریس $\left[\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$ داده شده است که در آن a و b اعداد حقیقی مفروضی‌اند و $a^2 + b^2 \neq 0$. نشان دهید اگر دو خط راست l_1 و l_2 در $\mathbb{R}^2$ با یکدیگر زاویهٔ α بسازند، $f(l_1)$ و $f(l_2)$ هم دو خط راست در $\mathbb{R}^2$اند که با هم زاویهٔ α را می‌سازند.

۷. تابع خطی $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow R^3$ را در نظر بگیرید که با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

که در اینجا $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. نشان دهید هستهٔ g یک‌بُعدی است و تصویر $\mathbb{R}^3$ تحت اثر g صفحهٔ گذرنده از 0 و عمود بر هسته است.

۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است و E_1 و E_2 دو زیرفضای مستوی موازی (نه لزوماً هم‌بُعد) در $\mathbb{R}^n$ باشند. نشان دهید $f(E_1)$ و $f(E_2)$ یا موازی‌اند یا یکی زیرمجموعه‌ای از دیگری است.

۹. فرض کنید تابع خطی $f:\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ چنان باشد که $f \circ f$ تابع ثابت با مقدار صفر باشد. نشان دهید بُعد هستهٔ f بزرگ‌تر از یا مساوی با n است. به ازای $n = 2$، مثالی‌هایی از این نوع تابع بیاورید که بُعد هسته ۲ و ۳ باشد.

۱۰. فرض کنید تابع خطی $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ هسته‌ای $(n-1)$بُعدی دارد. اگر $f \circ f$ تابع ثابت صفر نباشد، نشان دهید ترکیب kبارهٔ f با خود آن، $f \circ \ldots \circ f$، $k > 2$، نیز تابع ثابت صفر نیست.

۱۱. فرض کنید برای ماتریس $n \times n$، $A \neq 0$، ماتریسی $n \times n$، $B \neq 0$، وجود دارد که $AB = 0$. نشان دهید ماتریسی $n \times n$، $C \neq 0$، وجود دارد که $CA = 0$. (راهنمایی: توابع خطی متناظر با ماتریس‌ها را در نظر بگیرید.)

۱۲. فرض کنید E_1 و E_2 دو ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ باشند.

الف) اگر $E_1 \cap E_2$ تهی نباشد، چه امکاناتی برای بُعد این اشتراک وجود دارد؟ دقیق توضیح دهید.

ب) در حالتی که $E_1 \cap E_2$ از بُعد $(n-2)$ باشد، اگر E'_1 موازی و هم‌بُعد E_1 و E'_2 موازی و هم‌بُعد E_2 باشد، نشان دهید $E'_1 \cap E'_2$ نیز $(n-2)$بُعدی است.

تمرین‌های ۱۳ تا ۱۷ به دستگاه mمعادلهٔ nمجهولیِ (۱۱) مربوط‌اند:

۱۳. اگر دستگاه به ازای یک $\mathrm{b} = (\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_m)$ جواب یکتا داشته باشد، آنگاه به ازای هر b یا جواب ندارد یا جوابی یکتا دارد.

۱۴. اگر دستگاه به ازای یک $\mathrm{b} = (\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_m)$ بی‌نهایت جواب داشته باشد، آنگاه به ازای هر b که دستگاه جواب داشته باشد بی‌نهایت جواب وجود دارد.

۱۵. اگر دستگاه به ازای بیش از یک b جواب داشته باشد، آنگاه به ازای بی‌نهایت b جواب خواهد داشت.

۱۶. در صورتی‌که حکم زیر درست باشد، آن را ثابت کنید و در صورتی که نادرست باشد، مثال ناقضی ارائه کنید:

«اگر تعداد مجهول‌ها، n، بیش از تعداد معادلات، m، باشد، دستگاه به ازای هر b جواب دارد.»

۱۷. در صورتی که حکم زیر درست باشد، آن را ثابت کنید و در صورتی که نادرست باشد، مثال ناقضی ارائه کنید:

«اگر تعداد مجهول‌ها، n، بیش از تعداد معادلات، m، باشد، به ازای هر b که دستگاه جواب داشته باشد بی‌نهایت جواب وجود دارد.»

۶.۷ مساحت، حجم، و ضرب خارجی در $\mathbb{R}^3$

در بحث‌هایی که تاکنون در مورد هندسهٔ اشیای مسطح یا مستوی صورت گرفته صحبتی از «مساحت» و «حجم» نشده است. درواقع، اگر «طول» را اندازهٔ اشیای یک‌بُعدی، «مساحت» را اندازهٔ اشیای دوبُعدی و «حجم» را اندازهٔ اشیای سه‌بُعدی تلقی کنیم، این سؤال پیش می‌آید که برای قطعه‌ای از یک زیرفضای مستوی kبُعدی از $\mathbb{R}^n$، «محتوای kبُعدی» یا «اندازهٔ kبُعدی» را چگونه باید سنجید؟ برای پاسخ به این پرسش لازم است به تعریف مشترکی از طول، مساحت، و حجم دست یابیم و این تعریف را به ابعاد دلخواه تعمیم دهیم. در این بخش به کمک «ضرب خارجی بردارها» در $\mathbb{R}^3$ این مفاهیم را تا بُعد سه به گونه‌ای تدوین می‌کنیم که قابلیت تعمیم به بُعدهای بالاتر را داشته باشند. در بخش ۷.۷ مفهوم حجم nبُعدی را مطرح خواهیم کرد.

۶.۷ ۱ تعریف

برای $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$، $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$، **حاصل ضرب خارجی** یا **حاصل ضرب برداری**، $\mathrm{u} \times \mathrm{v}$، عضوی از $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر است:

$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \qquad (1)$$

■

احکام ۲ تا ۷ در زیر ویژگی‌های ابتدایی ضرب خارجی را بیان می‌کنند.

۶.۷ ۲ گزاره

خواص ضرب خارجی

الف) پادتقارن. برای هر u و v در $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = -\mathrm{v} \times \mathrm{u} \qquad (2)$$

به‌خصوص برای هر عضو u از $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{u} \times \mathrm{u} = 0 \qquad (3)$$

برهان در فرمول (۱) اگر نقش u و v با هم تعویض شود، هر مؤلفه در (-1) ضرب می‌شود. اگر در (۲) قرار دهیم $\mathrm{u} = \mathrm{v}$، $\mathrm{u} \times \mathrm{u} = -(\mathrm{u} \times \mathrm{u})$ نتیجه می‌شود، پس لزوماً $\mathrm{u} \times \mathrm{u} = 0$.

■

ب) قوانین توزیع‌پذیری. به ازای هر $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathrm{u} + \mathrm{v}) \times \mathrm{w} = (\mathrm{u} \times \mathrm{w}) + (\mathrm{v} \times \mathrm{w}), \quad \mathrm{u} \times (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) + (\mathrm{u} \times \mathrm{w}) \qquad (4)$$

برهان این دو قانون با محاسبهٔ سرراست از (۱) حاصل می‌شوند. محاسبه به خواننده واگذار می‌شود.

■

پ) به ازای $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$ و $r \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(r\mathrm{u}) \times \mathrm{v} = r(\mathrm{u} \times \mathrm{v}), \;\; \mathrm{u} \times (r\mathrm{v}) = r(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) \tag{۵}$$

برهان اگر در (۱) یکی از u یا v در r ضرب شود، هر مؤلفهٔ طرف راست در r ضرب می‌شود.

ت) به ازای هر $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$\mathrm{v} \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = 0, \;\; \mathrm{u} \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = 0 \tag{۶}$$

برهان این نیز یک محاسبهٔ سرراست است:

$$\begin{aligned}
\mathrm{u} \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

و به همین ترتیب اتحاد دیگر ثابت می‌شود.

ث) رابطه با ضرب داخلی. به ازای هر $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$|\mathrm{u} \times \mathrm{v}|^2 + |\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}|^2 = |\mathrm{u}|^2|\mathrm{v}|^2 \tag{۷}$$

برهان توجه کنید که مقصود از $|\mathrm{u} \times \mathrm{v}|$ **طول سه‌تایی** $\mathrm{u} \times \mathrm{v}$ است و مقصود از $|\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}|$ قدرمطلق عدد $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}$. اتحاد (۶) به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
&\quad + (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)
\end{aligned} \tag{۸}$$

صحت این اتحاد جبری را می‌توانیم با محاسبهٔ سرراست تحقیق کنیم.

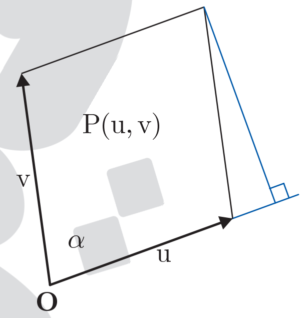
اگر $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ وابستهٔ خطی باشد، مثلاً $\mathrm{v} = r\mathrm{u}$ به ازای عدد حقیقی r، آنگاه از (۵) و (۲) نتیجه می‌شود $\mathrm{u} \times \mathrm{v} = 0$، البته این مطلب از (۷) نیز نتیجه می‌شود، زیرا، اگر $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ وابستهٔ خطی باشد، آنگاه $|\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}|$. حال فرض کنید $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ مستقل خطی باشد، به‌خصوص $\mathrm{u} \neq 0$ و $\mathrm{v} \neq 0$. در این صورت، هر یک از v و u یک نیم‌خط را تعریف می‌کند (مضارب مثبت این بردار). α را زاویهٔ بین دو نیم‌خط می‌گیریم: از آنجا که $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = |\mathrm{u}||\mathrm{v}| \cos \alpha$، از (۷) نتیجه می‌شود:

$$|\mathrm{u} \times \mathrm{v}| = |\mathrm{u}||\mathrm{v}||\sin \alpha| \tag{۹}$$

عبارت طرف راست درواقع مساحت متوازی‌الاضلاعی است که توسط u و v ایجاد می‌شود. به‌طور دقیق‌تر، مقصود از متوازی‌الاضلاع ایجادشده توسط u و v مجموعهٔ زیر است:

$$\mathrm{P}(\mathrm{u},\mathrm{v})=\{t_1\mathrm{u}+t_2\mathrm{v}|0\le t_1\le 1, 0\le t_2\le 1\}$$

توجه کنید که ارتفاع وارد بر «قاعدهٔ» u، دارای طول $|\mathrm{v}||\sin\alpha|$ است، پس $|\mathrm{u}||\mathrm{v}||\sin\alpha|$ درواقع مساحت $\mathrm{P}(\mathrm{u},\mathrm{v})$ است (شکل ۱۵.۷).



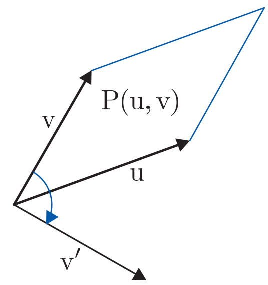
شکل ۱۵.۷

بدین‌ترتیب، تاکنون به این نتایج در مورد $\mathrm{u}\times\mathrm{v}$ رسیده‌ایم: اگر $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\mathrm{u}\times\mathrm{v}$ برابر ۰ است و اگر $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\}$ مستقل خطی باشد، آنگاه $\mathrm{u}\times\mathrm{v}$ بر صفحهٔ v و u عمود است (بنابر (۶)) و طول آن برابر $|\mathrm{u}||\mathrm{v}||\sin\alpha|$ است. درواقع، حالت وابستگی خطی را می‌توان حالت خاص حکم دوم دانست، زیرا در آن صورت $\sin\alpha=0$ و چون $\mathrm{u}\times\mathrm{v}=0$، این حاصل ضرب بر هر صفحهٔ شامل u و v عمود است (به مفهوم صفر شدن ضرب داخلی). در حالت استقلال خطی، دقیقاً دو سه‌تایی با طول $|\mathrm{u}||\mathrm{v}||\sin\alpha|$ وجود دارند که بر صفحهٔ u و v عمودند. برای مشخص کردن اینکه کدام یک برابر $\mathrm{u}\times\mathrm{v}$ است از مفهوم «دترمینان» کمک می‌گیریم.

اگر $\mathrm{u}=(u_1,u_2)$ و $\mathrm{v}=(v_1,v_2)$ دو عنصر $\mathbb{R}^2$ باشند، مؤلفه‌های u و v را به ترتیب در ستون‌های اول و دوم یک ماتریس ۲ × ۲ به صورت زیر قرار می‌دهیم

$$M=\begin{bmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{bmatrix}$$

بنابر تعریف، **دترمینان** ماتریس M، یا $\det M$، برابر $u_1v_2-u_2v_1$ است. معنی هندسی این عبارت را بررسی می‌کنیم. اگر (v_1,v_2) را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در جهت عقربهٔ ساعت دوران دهیم، بردار v' به صورت زیر حاصل می‌شود (شکل ۱۶.۷):



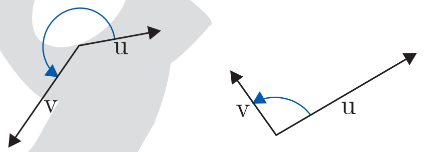
شکل ۱۶.۷

$$\mathrm{v}'=(v_2,-v_1)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}u_1v_2-u_2v_1&=\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}'\\&=|\mathrm{u}||\mathrm{v}'|\cos\measuredangle(\mathrm{u},\mathrm{v}')\\&=|\mathrm{u}||\mathrm{v}|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\\&=|\mathrm{u}||\mathrm{v}|\sin\alpha\end{aligned}$$

قدرمطلق عبارت سمت راست اندازهٔ مساحت $\mathrm{P}(\mathrm{u},\mathrm{v})$ و علامت آن به علامت $\sin\alpha$ وابسته است. اگر $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\sin\alpha=0$ و $\det M$ صفر می‌شود. ولی چنانچه $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\}$ مستقل خطی باشد، اگر زاویهٔ α (از نیم‌خط تعیین‌شده توسط u تا نیم‌خط تعیین‌شده توسط v) بین ۰ و π باشد، $\sin\alpha>0$ و $\det M$ مثبت است. ولی اگر زاویهٔ α بین π و 2π باشد، $\sin\alpha<0$ و $\det M$ منفی است.



(الف) (ب)

شکل ۱۷.۷

یک زوج مرتب برداری (u, v) در صفحه مانند (الف) در شکل ۱۷.۷ را **راستگرد** و یک زوج مرتب برداری مانند (ب) در شکل ۱۷.۷ را **چپگرد** می‌نامیم. تمایز این دو وضعیت را می‌توانیم به صورت زیر نیز بیان کنیم: چنانچه با گردش کوچک‌تر از یک نیم‌صفحه در جهت مثلثاتی از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب راستگرد خوانده می‌شود ولی چنانچه با گردش کوچک‌تر از یک نیم‌صفحه در جهت عقربهٔ ساعت از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب چپگرد محسوب می‌شود.

با توجه به بحث بالا، می‌توانیم زوج مرتب (u, v) را راستگرد (به ترتیب چپگرد) تعریف کرد اگر $\det M > ۰$ (به ترتیب $\det M < ۰$)، بنابراین $\det M$ دو اطلاع زیر را به دست می‌دهد:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر مساحت متوازی‌الاضلاع $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ است.

ب) $\det M = ۰$ اگر و فقط اگر $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\det M > ۰$ (به ترتیب $\det M < ۰$) اگر و فقط اگر زوج مرتب (u, v) راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.

این ملاحظات را می‌توان به $\mathbb{R}^۳$ تعمیم داد. فرض کنید $\mathrm{u} = (u_۱, u_۲, u_۳)$، $\mathrm{v} = (v_۱, v_۲, v_۳)$، و $\mathrm{w} = (w_۱, w_۲, w_۳)$ عناصر $\mathbb{R}^۳$ باشند. مقصود از متوازی‌السطوح ایجادشده توسط u، v، و w مجموعهٔ زیر است:

$$\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) = \{t_۱\mathrm{u} + t_۲\mathrm{v} + t_۳\mathrm{w} | ۰ \leq t_i \leq ۱, i = ۱, ۲, ۳\} \qquad (۱۰)$$

اگر سه‌تایی $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}\}$ وابستهٔ خطی باشد، سه بردار در یک صفحه قرار می‌گیرند و حجم این متوازی‌السطوح صفر است. در غیر این صورت، برای به دست آوردن حجم باید مساحت یک قاعده (مثلاً متوازی‌الاضلاع $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$) را در ارتفاع وارد بر این قاعده ضرب کنیم. ارتفاع وارد بر قاعدهٔ $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ برابر طول تصویر قائم w بر امتداد عمود بر صفحه با استفاده از $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle$ است. امتداد عمود بر صفحه با استفاده از $\mathrm{u} \times \mathrm{v}$ تعیین می‌شود، پس:

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{|\mathrm{w} \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v})|}{|\mathrm{u} \times \mathrm{v}|^۲} |\mathrm{u} \times \mathrm{v}|$$

و درنتیجه چون مساحت قاعده برابر $|\mathrm{u} \times \mathrm{v}|$ است:

$$\begin{aligned} \text{حجم}\ \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) &= |\mathrm{w} \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v})| \\ &= |w_۱(u_۲v_۳ - u_۳v_۲) + w_۲(u_۳v_۱ - u_۱v_۳) + w_۳(u_۱v_۲ - u_۲v_۱)| \qquad (۱۱) \end{aligned}$$

حال مانند حالت دوبعدی، مؤلفه‌های سه بردار u ، v، و w را به ترتیب در ستون‌های یک ماتریس ۳×۳ قرار می‌دهیم:

$$M = \begin{bmatrix} u_۱ & v_۱ & w_۱ \\ u_۲ & v_۲ & w_۲ \\ u_۳ & v_۳ & w_۳ \end{bmatrix}$$

طبق تعریف، **دترمینان** ماتریس ۳×۳ی بالا برابر است با:

$$\det M = u_۱v_۲w_۳ - u_۱v_۳w_۲ + v_۱w_۲u_۳ - v_۱w_۳u_۲ + w_۱u_۲v_۳ - w_۱u_۳v_۲ \qquad (۱۲)$$

که می‌توانیم آن را به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:

$$\det M = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) \quad (13)$$

یا:

$$\det M = v_1(w_2u_3 - w_3u_2) + v_2(w_3u_1 - w_1u_3) + v_3(w_1u_2 - w_2u_1) \quad (14)$$

یا:

$$\det M = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1) \quad (15)$$

از مقایسهٔ (۱۵) و (۱۱) می‌بینیم که قدرمطلق دترمینان M همان حجم متوازی‌السطوح $\mathrm{P(u, v, w)}$ است. در مورد علامت، سه‌تایی مرتب $\mathrm{(u, v, w)}$ در $\mathbb{R}^3$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم در صورتی که $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$). توجه کنید که $\det M = 0$ اگر و فقط اگر سه‌تایی $\mathrm{\{u, v, w\}}$ وابستهٔ خطی باشد، زیرا اگر u، v، و w در یک صفحه باشند، حاصل ضرب داخلی w با $\mathrm{u \times v}$ که بر این صفحه عمود است صفر می‌شود. به این ترتیب، مجدداً $\det M$ دو اطلاع زیر را به دست می‌دهد:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر حجم متوازی‌السطوح $\mathrm{P(u, v, w)}$ است.

ب) $\det M = 0$ اگر و فقط اگر $\mathrm{\{u, v, w\}}$ وابستهٔ خطی باشد، $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) اگر و فقط اگر سه‌تایی مرتب $\mathrm{(u, v, w)}$ راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.

ضمناً با توجه به (۱۳) و (۱۴) نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathrm{u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = -w \cdot (v \times u)} \\ \mathrm{= -v \cdot (u \times w) = -u \cdot (w \times v)} \end{aligned} \quad (16)$$

قدرمطلق هر یک از این عبارت‌ها حجم متوازی‌السطوح $P\mathrm{(u, v, w)}$ به صورت حاصل ضرب یک قاعده در ارتفاع وارد بر آن است. به سؤال اولیه‌ای باز می‌گردیم که بحث بالا را پیش آورد. اگر $\mathrm{\{u, v\}}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی باشد، می‌خواستیم بدانیم $\mathrm{u \times v}$ کدام یک از دو بردار عمود بر صفحهٔ $\mathrm{\langle u, v\rangle}$ به طول $|\mathrm{u}||\mathrm{v}||\sin\alpha|$ است. اکنون ادعا می‌کنیم:

پ) حکم. اگر $\mathrm{\{u, v\}}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشد، سه‌تایی مرتب $\mathrm{(u, v, u \times v)}$ راستگرد است.

برهان باید نشان دهیم دترمینان ماتریس زیر مثبت است:

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_2 & v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_3 & v_3 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

که بنابر (۱۵):

$$\det M = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

اگر $\mathrm{\{u, v\}}$ مستقل خطی باشد، دست‌کم یکی از سه عبارت بالا صفر نیست و $\det M > 0$.

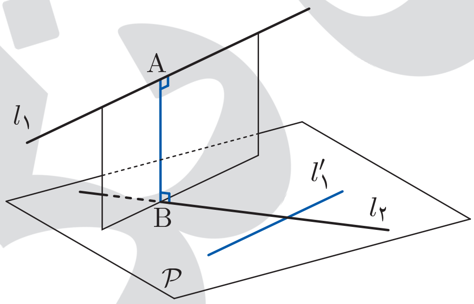
■

بدین‌ترتیب، $u \times v$ از نظر هندسی به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌شود: درصورتی‌که $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد، $u \times v$ صفر است وگرنه، $u \times v$ یگانه بردار عمود بر صفحهٔ $\{u, v\}$ به طول $|u||v|| \sin \measuredangle(u, v)|$ است و سه‌تایی مرتب $(u, v, u \times v)$ راستگرد است.

۶۷ مثال ۳

کاربرد در هندسهٔ تحلیلی سه‌بُعدی. فرض کنید l_1 و l_2 دو خط متنافر در $\mathbb{R}^3$ باشند. ادعا می‌کنیم خط راست یکتایی در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که l_1 و l_2 را قطع می‌کند و بر هر دو خط عمود است. نخست نشان می‌دهیم چنین خطی وجود دارد.

از نقطه‌ای دلخواه روی l_2 خطی، l'_1، به موازات l_1 رسم می‌کنیم. چون l_1 و l_2 موازی نیستند، l'_1 از l_2 متمایز است و صفحه‌ای شامل l_2 و l'_1 تشکیل می‌شود. خط l_1 با این صفحه اشتراک تهی دارد و با آن موازی است زیرا اگر l_1 در نقطه‌ای این صفحه را قطع کند، از آنجا که با یک خط در این صفحه موازی است، باید در آن صفحه بماند و چون با l_2 موازی نیست حتماً آن را قطع می‌کند که خلاف متنافر بودن l_1 و l_2 است. حال خط l_1 را عمود روی صفحهٔ $\mathbb{P}$ تصویر می‌کنیم. این تصویر خط l_2 را در نقطه‌ای، B، قطع می‌کند، زیرا l_1 و l_2 موازی نیستند. خط گذرنده از B و نقطهٔ A روی l_1 که بر B تصویر شده است، بر l_1 و l_2 عمود است (شکل ۱۸.۷). نشان می‌دهیم این پاره‌خط AB گذرنده از l_1 و l_2 و عمود بر هر دو منحصر به فرد است. فرض کنید $A'B'$ پاره‌خط دیگری باشد که بر هر دو خط عمود است، A' روی l_1 قرار دارد و B' روی l_2. اگر از B' خط l''_1 را به موازات l_1 رسم کنیم این خط موازی l'_1 است پس در صفحهٔ $\mathbb{P}$ می‌ماند. از طرف دیگر، $A'B'$ بر این خط عمود است. پس $A'B'$ بر صفحهٔ $\mathbb{P}$ عمود است، پس باید موازی AB باشد. چون این پاره‌خط در A' بر l_1 و در B' بر l_2 عمود است. $AA'B'A$ مستطیل است؛ بنابراین، خط گذرنده از A و A'، یعنی l_1، باید موازی خط گذرنده از B و B'، یعنی l_2، باشد که خلاف فرض متنافر بودن l_1 و l_2 است.



شکل ۱۸.۷

■

اکنون به کمک ضرب خارجی مثالی عددی را حل می‌کنیم. خط‌های راست l_1 و l_2 به صورت زیر در $\mathbb{R}^3$ داده شده‌اند:

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

$$l_2: \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

می‌خواهیم طول عمود مشترک دو خط و نیز معادلهٔ خط راستی را که هر دو را به صورتی عمودی قطع می‌کند به دست آوریم. برای به دست آوردن طول عمود مشترک کافی است پاره‌خطی متکی بر دو خط را بر راستایی عمود بر دو خط تصویر قائم کنیم. مثلاً نقطهٔ $\mathrm{p}_۱ = (۱, ۰, -۲)$ روی $l_۱$ و $\mathrm{p}_۲ = (-۱, -۱, ۰)$ روی $l_۲$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\mathrm{u} = \mathrm{p}_۱ - \mathrm{p}_۲ = (۲, ۱, -۲)$. یک بردار عمود بر $l_۱$ و $l_۲$ را می‌توان با ضرب خارجی بردارهایی موازی دو خط به دست آورد، مثلاً:

$$\begin{aligned}\mathrm{v} &= (۲, ۳, -۱) \times (۰, -۲, ۱)\\ &= (۱, -۲, -۴)\end{aligned}$$

تصویر قائم u روی v عبارت است از:

$$\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}\mathrm{v} = \frac{۸}{۲۱}(۱, -۲, -۴)$$

که طول آن برابر $\frac{۸}{\sqrt{۲۱}}$ است. بنابراین فاصلهٔ عمودی دو خط $l_۱$ و $l_۲$ نیز $\frac{۸}{\sqrt{۲۱}}$ است. خط راست عمود بر $l_۱$ و $l_۲$ موازی v است، پس معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$\frac{\mathrm{x} - x_۰}{۱} = \frac{\mathrm{y} - y_۰}{-۲} = \frac{\mathrm{z} - z_۰}{-۴} \qquad (۱۷)$$

باید نقطهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را طوری اختیار کنیم که این خط با $l_۱$ و $l_۲$ نقطهٔ مشترک داشته باشد. نقطهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را نقطهٔ اشتراک با $l_۲$ می‌گیریم. اگر بنویسیم $\frac{x+۱}{۰} = \frac{y+۱}{-۲} = \frac{z}{۱} = s$، نتیجه می‌شود: $(x_۰, y_۰, z_۰) = (-۱, -۲s - ۱, s)$. برای خط $l_۱$ می‌نویسیم $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z+۲}{-۱} = t$. پس $(x, y, z) = (۲t + ۱, ۳t, -t - ۲)$. بنابراین، برای اینکه خط (۱۷) از $(x_۰, y_۰, z_۰)$ و (x, y, z) بگذرد، باید s و t را طوری پیدا کرد که

$$\frac{۲t + ۱ + ۱}{۱} = \frac{۳t + ۲s + ۱}{-۲} = \frac{-t - ۲ - s}{-۴}$$

این دو معادلهٔ دومجهولی برحسب s و t است:

$$\begin{cases} ۲s + ۷t = -۵\\ s - ۷t = ۶\end{cases}$$

که جواب آن $s = \frac{۱}{۳}$ و $t = -\frac{۱۷}{۲۱}$ است. بنابراین $(x_۰, y_۰, z_۰) = \left(-۱, \frac{-۵}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)$ و خط راست مطلوب عبارت است از

$$\frac{x + ۱}{۱} = \frac{y + \frac{۵}{۳}}{-۲} = \frac{z - \frac{۱}{۳}}{-۴}$$

۶.۷ تمرین

۱. دترمینان هر یک از ماتریس‌های ۳ × ۳ زیر را محاسبه کنید:

الف) $\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ ۰ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} \end{bmatrix}$،

ب) $\begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{bmatrix}$،

پ) $\begin{bmatrix} ۰ & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & g \end{bmatrix}$،

ت) $\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & ۰ \end{bmatrix}$.

۲. در مورد ترتیب‌های ممکن پایهٔ متداول $\mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲, \mathrm{e}_۳$ از $\mathbb{R}^۳$ تعیین کنید کدام راستگرد و کدام چپگرد است.

۳. فرمول‌های (۱۳)، (۱۴)، و (۱۵) متن، «بسط دترمینان برحسب ستون» نام دارند. فرمول‌های مشابهی برای بسط دترمینان برحسب سطر پیدا کنید.

۴. نشان دهید در $\mathbb{R}^۳$ فرمول صفحهٔ گذرنده از نقطهٔ a به موازات خطوط راست $\mathrm{p} + \langle \mathrm{u} \rangle$ و $\mathrm{q} + \langle \mathrm{v} \rangle$ عبارت است از $(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{a}) = ۰$ که در آن $\mathrm{x} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ نقطه‌ای در صفحه است.

۵. نشان دهید در $\mathbb{R}^۳$ فاصلهٔ نقطهٔ a از خط راست $\mathrm{p} + \langle \mathrm{u} \rangle$ برابر است با $\frac{۱}{|\mathrm{u}|}|(\mathrm{a} - \mathrm{p}) \times \mathrm{u}|$.

۶. الف) مساحت متوازی‌الاضلاع $\mathrm{p}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ را که در آن $\mathrm{u} = (۱, ۱, ۰, -۲)$ و $\mathrm{v} = (۱, -۱, ۱, -۱)$ در $\mathbb{R}^۴$ پیدا کنید.

ب) حجم متوازی‌السطوح $\mathrm{p}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ را در $\mathbb{R}^۴$ پیدا کنید که در آن $\mathrm{u} = (۲, ۱, ۰, -۲)$، $\mathrm{v} = (۱, -۱, ۱, -۱)$، و $\mathrm{w} = (۲, ۲, -۲, ۱)$. (راهنمایی: می‌توانید از روش گرام‌ـاشمیت استفاده کنید.)

۷. دو خط راست $\mathrm{p} + \langle \mathrm{u} \rangle$ و $\mathrm{q} + \langle \mathrm{v} \rangle$ را در نظر بگیرید که در آن u و v همان u و v تمرین ۶ (ب) باشند و $\mathrm{p} = (۱, ۰, ۱, ۱)$ و $\mathrm{q} = (۱, -۱, ۱, ۱)$. طول عمود مشترک دو خط و معادلهٔ خط راستی را پیدا کنید که هر دو خط را قطع می‌کند و بر هر دو عمود است.

۸. تابع خطی $f : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ را در نظر بگیرید که با ماتریس زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید تحت اثر این تابع خطی زاویهٔ بین خطوط حفظ می‌شود ولی مساحت متوازی‌السطوح‌ها تغییر می‌کند.

۹. اگر A، B، و C عناصر $\mathbb{R}^۳$ باشند، نخست ثابت کنید:

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

سپس **اتحاد ژاکوبی** را نتیجه بگیرید:

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = ۰$$

۱۰. **اتحاد لاگرانژ.** به ازای هر A, B, C, D در $\mathbb{R}^۳$:

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$

۱۱. به ازای u، v، و w در $\mathbb{R}^n$، مجموعهٔ $\tau(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$، موسوم به **چهاروجهی ایجادشده توسط** u، v، و w، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) = \{t_۱\mathrm{u} + t_۲\mathrm{v} + t_۳\mathrm{w} : t_i \geq ۰, \sum_{i=۱}^{۳} t_i \leq ۱\}$$

نشان دهید حجم $\tau(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ در $\mathbb{R}^۳$ برابر یک‌ششم حجم $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ است. (راهنمایی: $\mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w})$ را به صورت اجتماع شش چهاروجهی با حجم برابر بنویسید.)

۱۲. یک چهاروجهی در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید و چهار وجه آن را به s_1، s_2، s_3، و s_4 نمایش دهید. فرض کنید u_i برداری عمود بر وجه iام چهاروجهی در جهت رو به بیرون برابر با مقدار عددی مساحت s_i باشد. نشان دهید $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

۱۳. فرض کنید u، v، و w سه نقطه در $\mathbb{R}^3$ باشند. نشان دهید این سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند اگر و فقط اگر $(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) + (\mathrm{v}\times\mathrm{w}) + (\mathrm{w}\times\mathrm{u}) = 0$.

۱۴. **قضیهٔ پاپوس.** فرض کنید l و l' دو خط راست در یک صفحه باشند و A، B، و C سه نقطهٔ متمایز روی l، و A'، B'، و C' سه نقطهٔ متمایز روی l'. اگر خط AB' موازی خط $A'B$ و خط AC' موازی خط $A'C$ باشد، نشان دهید خط BC' موازی خط BC' است. (راهنمایی: می‌توانید از تمرین ۱۳ استفاده کنید.)

۱۵. نشان دهید مساحت متوازی‌الاضلاع ایجادشده توسط u و v برای u و v در $\mathbb{R}^n$ برابر است با $\sqrt{(\mathrm{u}\cdot\mathrm{u})(\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}) - (\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})^2}$.

۱۶. الف) P یک متوازی‌الاضلاع در $\mathbb{R}^3$ با مساحت A است. تصویر قائم P روی سه صفحهٔ مختصاتی را در نظر بگیرید. اگر مساحت‌های این سه متوازی‌الاضلاع A_1، A_2، و A_3 باشد، نشان دهید:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

ب) حکم بالا را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهید: اگر P یک متوازی‌الاضلاع در $\mathbb{R}^n$ با مساحت A باشد و A_iها مساحت‌های تصویر قائم P روی صفحات مختصاتی (که تعداد آن‌ها $\frac{1}{2}n(n-1)$ است)، نشان دهید مجذور A برابر مجموع مجذورهای A_iهاست.

۱۷. یک چهاروجهی در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. از هر یال چهارضلعی یک **صفحهٔ منصف** می‌گذرد که زاویهٔ میان دو وجه منتهی به آن یال را نصف می‌کند. نشان دهید شش منصف چهاروجهی از یک نقطه می‌گذرند.

۷ حجم و دترمینان در $\mathbb{R}^n$

هدف ما در این بخش تعمیم مفاهیم دترمینان و حجم به $\mathbb{R}^n$ است. نخست تعریف هندسی و تعریف جبری دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ستون‌های ماتریس ۲ × ۲ را به ترتیب از چپ به راست با A^1 و A^2، و ستون‌های ماتریس ۳ × ۳ را با A^1، A^2 و A^3 نمایش می‌دهیم. متوازی‌الاضلاع $P(A)$ را در $\mathbb{R}^2$ به صورت

$$P(A) = \{t_1A^1 + t_2A^2 | 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1\}$$

و متوازی‌السطوح $P(A)$ را در $\mathbb{R}^3$ به صورت

$$P(A) = \{t_1A^1 + t_2A^2 + t_3A^3 | 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1, 0 \le t_3 \le 1\}$$

در نظر می‌گیریم.

۱ تعریف **تعریف هندسی دترمینان.** در حالت ۲ × ۲: مساحت $|\det A| = P(A)$

$$\text{علامت } \det A = \begin{cases} + & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2) \text{ چپگرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } \{A^1, A^2\} \text{ وابستهٔ خطی باشد} \end{cases}$$

در حالت ۳ × ۳: حجم $|\det A| = P(A)$

$$\text{علامت } \det A = \begin{cases} + & \text{اگر سه‌تایی مرتب } (A^1, A^2, A^3) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر سه‌تایی مرتب } (A^1, A^2, A^3) \text{ چپگرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } \{A^1, A^2, A^3\} \text{ وابستهٔ خطی باشد} \end{cases}$$

■

۲ تعریف **تعریف جبری دترمینان**

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

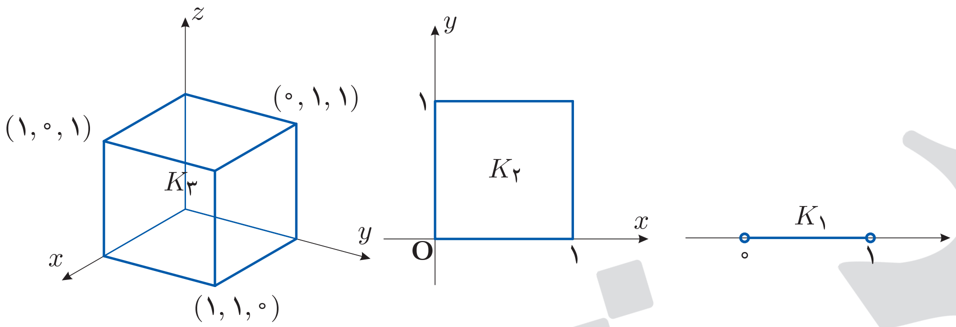
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (2)$$

ما برای تعمیم این مفاهیم به ماتریس‌های $n \times n$ و $\mathbb{R}^n$ طبعاً تصوری پیشینی از «حجم nبعدی» و «راستگرد بودن یک nتایی بردارها در $\mathbb{R}^n$» نداریم. بنابراین، راهبرد ما این خواهد بود که تعریف جبری را به گونه‌ای تعمیم دهیم که قدرمطلق آن خواصی مشابه مساحت و حجم داشته باشد و علامت آن، nتایی‌های برداری مستقل خطی را به دو دستهٔ «راستگرد» و «چپگرد» تقسیم کند به نحوی که قرابت موردنظر با دوگونگی متناظر در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ برقرار شود. به این منظور سه ویژگی دترمینان در حالت ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را بررسی می‌کنیم و خواهیم دید که به طورکلی برای ماتریس‌های $n \times n$ یک و فقط یک روش نسبت دادن یک عدد به یک ماتریس وجود دارد که این سه ویژگی را داراست. این عدد را «دترمینان ماتریس» می‌نامیم.

پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ یعنی $(e_1, \ldots, e_n)$ را در نظر بگیرید. مقصود از مکعب nبعدیِ واحد مجموعهٔ زیر است:

$$K^n = \{t_1e_1 + \cdots + t_ne_n | 0 \le t_1 \le 1, \ldots, 0 \le t_n \le 1\} \qquad (3)$$

به ازای $n = 1$، داریم $K^1 = [0, 1]$؛ به ازای $n = 2$، $K^2 = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ و به ازای $n = 3$، $K^3 = \{(x, y, z) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ (شکل ۱۹.۷).



شکل ۱۹.۷

به طور کلی، برای n عضو $A^{۱}$، ...، A^{n} در $\mathbb{R}^{n}$، متوازی‌السطوح nبعدیِ ایجادشده توسط $\{A^{۱}, \dots, A^{n}\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

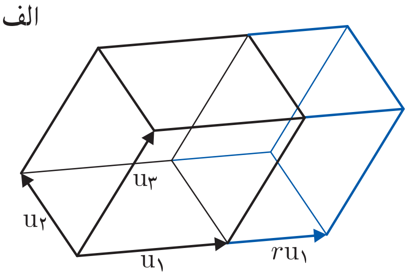
$$P(A^{۱}, \dots, A^{n}) = \{t_{۱}A^{۱} + \cdots + t_{n}A^{n} | ۰ \le t_i \le ۱, i = ۱, \dots, n\} \qquad (۴)$$

اگر nتاییِ‌های $A^{۱}$ تا A^{n} را به ترتیب به عنوان ستون‌های یک ماتریس A در نظر بگیریم، $P(A^{۱}, \dots, A^{n})$ را به طور خلاصه با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. ■

۷ گزاره ۳

سه ویژگی اساسی دترمینان (برای ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳)

الف) دترمینان نسبت به هر ستون خطی است اگر ستون‌های دیگر ثابت نگاه داشته شوند.

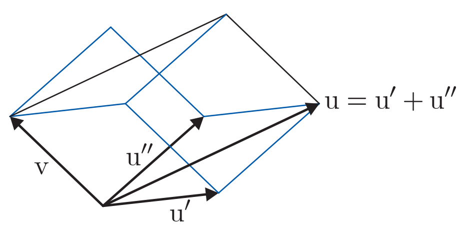


شکل ۲۰.۷

مقصود از «خطی بودن»، برقراری دو شرط گزارهٔ ۱۱ در بخش ۴ است، یعنی اگر همهٔ درایه‌های یک ستون در عددی چون r ضرب شوند، دترمینان در r ضرب می‌شود. اگر یک ستون (به عنوان یک nتاییِ عددی) برابر مجموع دو ستون باشد، دترمینان برابر مجموع دترمینان ماتریس‌هایی خواهد شد که از تفکیک دو ستون به دست می‌آیند. مثلاً:

$$\det\begin{bmatrix} a_{۱۱}+a'_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱}+a'_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱}+a'_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a'_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a'_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a'_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

این دو شرط به‌سادگی از تعریف جبری (۱) و (۲) به دست می‌آیند. نکته این است که در هر جملهٔ سمت راست (۱) و (۲) فقط یک درایه از هر ستون با درجهٔ یک ظاهر می‌شود. وقتی $r > ۰$، تعبیر هندسی شرط اول این است که با ضرب کردن طول یک ضلع متوازی‌الاضلاع (به ترتیب یک ضلع متوازی‌السطوح) در r و ثابت نگاه داشتن اضلاع دیگر، مساحت متوازی‌الاضلاع (به ترتیب حجم متوازی‌السطوح) در r ضرب می‌شود. وقتی $r < ۰$، جهت گردش (راستگردی یا چپگردی) اضلاع معکوس می‌شود، بنابراین علامت دترمینان عوض می‌شود (شکل ۲۰.۷).



شکل ۲۱.۷

تعبیر هندسی شرط دوم در حالت $n = ۲$ در شکل ۲۱.۷ نمایش داده شده است. اگر یک ضلع متوازی‌الاضلاع، مثلاً ضلع u، برابر مجموع $u' + u''$ باشد به طوری که (u, v)،

$(\mathrm{u}', \mathrm{v})$، و $(\mathrm{u}'', \mathrm{v})$ هر سه راستگرد یا هر سه چپگرد باشند، مساحت $P(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ برابر مجموع مساحت‌های $P(\mathrm{u}', \mathrm{v})$ و $P(\mathrm{u}'', \mathrm{v})$ می‌شود. وقتی جهت گردش سه دوتایی یکسان نباشد، باید علامت دترمینان را نیز منظور کرد. تعبیر مشابهی در حالت سه‌بعدی برقرار است و این حکم را می‌توان از اینکه مساحت برابر $|\mathrm{u} \times \mathrm{v}|$ و حجم برابر $|(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) \cdot \mathrm{w}|$ است نتیجه گرفت.

اکنون ویژگی اساسی دوم دترمینان را بیان می‌کنیم:

ب) دترمینان نسبت به ستون‌ها «پادمتقارن» است، یعنی هرگاه جای دو ستون تعویض شود، دترمینان در (-۱) ضرب می‌شود.

این مطلب را می‌توان به طور جبری از تعریف‌های جبری (۱) و (۲) مشاهده کرد. تعبیر هندسی این است که تعویض ترتیب دو ضلع جهت گردش را معکوس می‌کند. توجه کنید که اگر k بار تعویض ستون صورت گیرد، هر بار دترمینان در (-۱) ضرب می‌شود، بنابراین پس از k تعویض، دترمینان در $(-۱)^k$ ضرب خواهد شد.

پ) بالاخره ویژگی اساسی سوم دترمینان به شرح زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۱, \quad \det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۱$$

در حالت ۲×۲، این بدان معنی است که مساحت مربع واحد برابر یک و دوتاییِ مرتب $(\mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲)$ راستگرد است. همین‌طور در حالت ۳×۳، حجم مکعب واحد برابر یک است و سه‌تایی مرتب $(\mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲, \mathrm{e}_۳)$ راستگرد است. ■

خواهیم دید که این سه ویژگی دترمینان را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند. لازم است نخست مفهوم «پادتقارن» را کمی بیشتر بررسی کنیم. به طور کلی، جابه‌جا کردن ترتیب n شیء، مانند n ستون یک ماتریس $n \times n$، یک «جایگشت» خوانده می‌شود. اگر n شیء را با شماره‌گذاری با مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ نمایش دهیم، یک جایگشت $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در واقع یک تابع یک به یک و پوشا از $\{۱, \ldots, n\}$ به خود آن است:

$$\sigma : \{۱, \ldots, n\} \to \{۱, \ldots, n\}$$

مقصود از $\sigma(i)$ جای جدید i است. تابع همانی جایگشتی است که هر یک از ۱ تا n را در جای خود نگاه می‌دارد. یک نوع جایگشت ساده **ترانهش** است. منظور از ترانهش جایگشتی است که $(n - ۲)$ عنصر را در جای خود نگه می‌دارد و جای دو عنصر باقیمانده را تعویض می‌کند. مثلاً

$$۱ \to ۱ \,,\ ۲ \to ۳ \,,\ ۳ \to ۲ \,,\ ۴ \to ۴$$

یک ترانهش $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است.

۷ ۴ قضیه هر جایگشت $\{۱, \ldots, n\}$ را می‌توان به صورت ترکیبی متناهی از ترانهش‌ها نمایش داد. روش نمایش یکتا نیست ولی تعداد ترانهش‌های لازم همواره زوج یا همواره فرد است.

برهان حکم اول را می‌توانیم با استقرا ثابت کنیم. به ازای $n = ۲$، حکم واضح است زیرا یک جایگشت $\{۱, ۲\}$ ترانهش ۱ و ۲ است و دیگری که همانی است از ترکیب این ترانهش با خودش حاصل می‌شود. فرض کنید حکم تا n ثابت شده است، آن را برای $(n + ۱)$ ثابت می‌کنیم. پس فرض کنید σ یک جایگشت $\{۱, \dots, n, n + ۱\}$ است. اگر σ همانی باشد، می‌توانیم بنویسیم $\sigma = \tau \circ \tau$ که τ ترانهشی دلخواه است. اگر σ همانی نباشد، σ دست‌کم یک i را جابه‌جا می‌کند، مثلاً $\sigma(i) = j \neq i$. حال ترانهش ρ را در نظر بگیرید که بدین صورت تعریف می‌شود: اگر $k \neq i, j$، $\rho(i) = j$، $\rho(j) = i$ و $\rho(k) = k$، ترکیب $\rho \circ \sigma$ جایگشتی است که i را تثبیت می‌کند زیرا $(\rho \circ \sigma)(i) = \rho(j) = i$. بدین‌ترتیب، می‌توانیم $\rho \circ \sigma$ را یک جایگشت n شیئیِ $\{۱, \dots, i - ۱, i + ۱, \dots, n + ۱\}$ تلقی کنیم. طبق فرض استقرا، ρ باید ترکیب تعدادی ترانهش τ_i باشد (که i را ثابت نگاه می‌دارند)، $\rho \circ \sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_۱$. حال اگر ρ را از طرف چپ با هر طرف ترکیب کنیم، چون همانی برابر $\rho \circ \rho$ است، نتیجه می‌شود که $\sigma = \rho \circ \tau_k \circ \dots \circ \tau_۱$ یعنی σ ترکیبی از ترانهش‌هاست.

برای حکم دوم، نخست به هر جایگشت σ از $\{۱, \dots, n\}$ عدد $\epsilon(\sigma)$ را به صورت زیر نسبت می‌دهیم:

$$\epsilon(\sigma) = \frac{۱}{(۱)!(۲)!\dots(n - ۱)!} \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i)) \qquad (۵)$$

که در اینجا مقصود از $\prod_{i<j}(\sigma(j) - \sigma(i))$ حاصل ضرب همهٔ $(\sigma(j)) - \sigma(i)$هاست که در آن $i < j$. نشان می‌دهیم که $\epsilon(\sigma) = \pm ۱$. توجه کنید که به ازای هر $k \neq l$، $k, l \in \{۱, \dots, n\}$. جملهٔ $(k - l)$ یا $(l - k)$ یک و فقط یک بار در حاصل ضرب سمت راست ظاهر می‌شود، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i)) &= \pm \prod_{k<l} (l - k) \\ &= \pm \Big(\prod_{۱<l} (l - ۱)\Big)\Big(\prod_{۲<l} (l - ۲)\Big) \cdots \Big(\prod_{n-۱<l} (l - (n - ۱))\Big) \end{aligned}$$

و طرف راست برابر $\pm(n - ۱)! \cdots (۱)!$ است. بنابراین $\epsilon(\sigma) = \pm ۱$. حال اثر ترکیب یک ترانهش τ با σ را بر $\epsilon(\sigma)$ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم $\epsilon(\tau \circ \sigma) = -\epsilon(\sigma)$. فرض کنید ترانهش τ دو عدد متمایز μ و ν را جابه‌جا می‌کند و دیگر اعداد را ثابت نگاه می‌دارد. مثلاً $\mu < \nu$. در حاصل ضرب طرف راست (۵) جملات $(\sigma(j) - \sigma(i))$ که در آن‌ها $\sigma(i) \neq \mu, \nu$ و $\sigma(j) \neq \mu, \nu$ تغییری نمی‌کنند داریم:

$$(\tau \circ \sigma)(j) - (\tau \circ \sigma)(i) = \sigma(j) - \sigma(i)$$

یکی از دو جملهٔ $(\mu - \nu)$ یا $(\nu - \mu)$ یک و فقط یک بار به صورت $(\sigma(i) - \sigma(j))$ ظاهر می‌شود که، با اثر دادن τ، در (-۱) ضرب می‌شود. جملات دیگرِ $(\sigma(j) - \sigma(i))$ را که در آن‌ها

یکی از جمله‌ها برابر μ یا ν است، می‌توانیم دو به دو به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\pm\big(\sigma(k)-\nu\big)\big(\sigma(k)-\mu\big),\quad \sigma(k)\neq\mu,\nu \qquad (۶)$$

و (۶) تحت اثر τ تغییر علامت نمی‌دهد:

$$\big((\tau\circ\sigma)(k)-\tau(\nu)\big)\big((\tau\circ\sigma)(k)-\tau(\mu)\big)=\big(\sigma(k)-\mu\big)\big(\sigma(k)-\nu\big)$$
$$=\big(\sigma(k)-\nu\big)\big(\sigma(k)-\mu\big)$$

بنابراین، ماحصل اثر دادن τ این است که $\epsilon(\sigma)$ در (-۱) ضرب می‌شود:

$$\epsilon(\tau\circ\sigma)=-\epsilon(\sigma),\qquad \tau\text{: ترانهش} \qquad (۷)$$

توجه کنید که اگر σ همانی باشد، $\epsilon(\sigma)=۱$ زیرا به ازای $i<j$، $\sigma(j)-\sigma(i)=j-i>۰$. بنابراین، برای هر ترانهش τ داریم $\epsilon(\tau)=-۱$. حال اگر σ یک جایگشت دلخواه باشد، طبق قسمت اول قضیه، σ را به صورت ترکیبی از ترانهش‌ها می‌نویسیم: $\sigma=\tau_k\circ\ldots\circ\tau_۱$. با استفادهٔ مکرر از (۷) داریم:

$$\epsilon(\sigma)=(-۱)^k \qquad (۸)$$

که k تعداد ترانهش‌هاست. چون به هر σ یک $\epsilon(\sigma)$ مشخص نسبت داده شده است، (۸) نشان می‌دهد که تعداد ترانهش‌های لازم برای نمایش σ باید همواره زوج یا همواره فرد باشد.

دستاوردی از قضیهٔ بالا این است که اگر $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ دو جایگشت باشند، داریم:

$$\epsilon(\sigma_۱\circ\sigma_۲)=\epsilon(\sigma_۱)\cdot\epsilon(\sigma_۲) \qquad (۹)$$

یک جایگشت را زوج (به ترتیب فرد) می‌نامیم در صورتی که $\epsilon(\sigma)=+۱$ (به ترتیب $\epsilon(\sigma)=-۱$). هر جایگشت زوج ترکیب تعدادی زوج ترانهش است و هر جایگشت فرد ترکیب تعدادی فرد ترانهش.

اکنون می‌توانیم به کمک قضیهٔ ۴ مفهوم دترمینان را به ماتریس‌های $n\times n$ تعمیم دهیم.

۷۷ گزاره ۵ فرض کنید به هر ماتریس $n\times n$، A، عدد $D(A)$ را نسبت داده‌ایم که واجد دو شرط زیر است:

الف) $D(A)$ نسبت به هر ستون خطی است اگر ستون‌های دیگر ثابت نگاه داشته شوند.

ب) $D(A)$ نسبت به ستون‌ها پادمتقارن است، یعنی جابه‌جایی دو ستون، آن را در (-۱) ضرب می‌کند.

در این صورت، D را مقدار $D(I_n)$ به طور منحصر به فردی مشخص می‌کند.

برهان ستون‌های ماتریس $A=[a_{ij}]$ را با $\{A^۱,\ldots,A^n\}$ نمایش می‌دهیم. اگر A^j را یک nتایی، یعنی عضوی از $\mathbb{R}^n$، در نظر بگیریم، داریم:

$$A^j=a_{۱j}e_۱+\cdots+a_{nj}e_n$$

با توجه به (الف) داریم:

$$D(A)=\sum_{i_۱=۱}^{n}\ldots\sum_{i_n=۱}^{n}a_{i_۱,۱}a_{i_۲,۲}\cdots a_{i_n,n}\,D[e_{i_۱}|e_{i_۲}|\cdots|e_{i_n}] \qquad (۱۰)$$

در ماتریس بالا چنانچه به ازای $\mu \neq \nu$ داشته باشیم $e_{i_\mu} = e_{i_\nu}$، مقدار $D[e_{i_1}|\cdots|e_{i_n}]$ صفر می‌شود زیرا جابه‌جایی e_{i_ν} و e_{i_μ} از طرفی ماتریس سمت راست بالا را عوض نمی‌کند و از طرف دیگر، طبق (ب)، مقدار D باید در (-1) ضرب شود. بنابراین $D[e_{i_1}|\ldots|e_{i_n}]$ صفر است مگر اینکه $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ جایگشتی چون σ از $(1, 2, \ldots, n)$ باشد. بنابراین، می‌توانیم (۱۰) را به صورت زیر بنویسیم:

$$D(A) = \sum_{\sigma:\ \text{جایگشت}} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} D[e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)}]$$

ولی از خاصیت پادتقارن (ب) می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} D[e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)}] &= \epsilon(\sigma) D[e_1|\cdots|e_n] \\ &= \epsilon(\sigma) D(I_n) \end{aligned}$$

پس:

$$D(A) = \sum_{\sigma:\ \text{جایگشت}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} D(I_n) \tag{۱۱}$$

و گزاره به اثبات می‌رسد.

چنانکه در بررسی سه ویژگی اصلی دترمینان‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ دیدیم، ویژگی‌های اول و دوم ــ مشابه (الف) و (ب) ــ ویژگی‌های ابتدایی مساحت و حجم متوازی‌الاضلاع و متوازی‌السطوح با منظور کردن علامت‌اند. ویژگی سوم، یا همان نسبت دادن عددی به مکعب واحد، به منزلهٔ ارائهٔ واحد یا مقیاس برای مساحت یا حجم است.

توجه کنید که ستون‌های I_n، درواقع، بردارهای تعریف‌کنندهٔ مکعب واحدند. با تعیین مقدار $D(I_n)$ برای هر ماتریس A مشخص می‌شود. چنانچه $D(I_n)$ را برابر ۱ بگیریم یعنی حجم nبُعدی مکعب واحد را ۱ فرض کنیم، تابع Dی حاصل، طبق تعریف، $\det\,(A)$ (دترمینان A)، خوانده می‌شود، پس:

$$\det A = \sum_{\sigma:\ \text{جایگشت}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \tag{۱۲}$$

۷ | ۶ نتیجه تابع det که به هر ماتریس $n \times n$ مقدار (۱۲) را نسبت می‌دهد یگانه تابع از ماتریس‌های $n \times n$ به $\mathbb{R}$ است که سه ویژگی دارد: الف) وقتی ستون‌های دیگر ثابت نگاه داشته شوند، نسبت به هر ستون خطی است، ب) نسبت به ستون‌ها پادمتقارن است، و ج) $\det\,(I_n) = 1$. ■

۷ | ۷ تعریف به ازای $A^1, \ldots, A^n \in \mathbb{R}^n$، حجم nبعدی متوازی‌السطوح $P(A)$ برابر $|\det A|$ است. حجم nبُعدیِ $P(A)$ را با $\mathrm{vol}_n(P(A))$ (vol مخفف volume است) نمایش می‌دهیم. ■

تعبیر زیر برحسب نگاشت‌های خطی نیز به کار خواهد رفت. ماتریس A که از کنار هم قرار دادن nتایی‌های $(A^1, \ldots, A^n)$ به دست می‌آید، درواقع، نمایش‌دهندهٔ یک نگاشت خطیِ $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است که در آن، برای هر $j = 1, \ldots, n$، $f(e_j) = A^j$. حال $\det f$ را همان

$\det A$ تعریف می‌کنیم. نگاشت خطی f مکعب واحد را به متوازی‌السطوح $P(A)$ می‌نگارد. پس $|\det f|$، درواقع، حجم nبعدی تصویر مکعب واحد تحت f است.

۸ گزاره برای تابع‌های خطی $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\det\,(g\circ f) = (\det g)(\det f) \tag{۱۳}$$

یا اگر ماتریس f را با A و ماتریس g را با B نمایش دهیم:

$$\det\,(BA) = (\det B)(\det A) \tag{۱۴}$$

برهان برای اثبات، g (یا معادل آن B) را تثبیت می‌کنیم و دو تابع زیر از مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ به $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$D_۱, D_۲\colon n\times n \text{ مجموعهٔ ماتریس‌های } \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$D_۱(A) = (\det B)(\det A)$$
$$D_۲(A) = \det\,(BA)$$

اگر نشان دهیم هر دوِ $D_۱$ و $D_۲$ شرط‌های (الف) و (ب) گزارهٔ ۵ را برآورده می‌کنند، از این گزاره چنین نتیجه می‌گیریم که مقدار $D_۱$ و $D_۲$ با معلوم بودن مقدار آن‌ها به ازای $A = I_n$ تعیین می‌شود. ولی داریم:

$$D_۱(I_n) = (\det B)(\det I_n) = \det B$$
$$D_۲(I_n) = \det\,(BI_n) = \det B$$

پس اگر ثابت کنیم شرط‌های (الف) و (ب) برای $D_۱$ و $D_۲$ برقرارند، به ازای هر ماتریس A خواهیم داشت: $D_۱(A) = D_۲(A)$، و حکم گزاره به اثبات می‌رسد. برای $D_۱(A)$ که مضرب ثابتی از $\det A$ است، برقرار بودن (الف) و (ب) واضح است. موضوع را برای $D_۲$ تحقیق می‌کنیم. فرض کنید A^j، ستون jاُمِ A، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{۱j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{۱j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{۱j} \\ \vdots \\ a''_{nj} \end{bmatrix}$$

در این صورت، ستون jاُمِ ماتریسِ BA چنین خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\nu=۱}^{n} b_{۱\nu}a_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=۱}^{n} b_{n\nu}a_{\nu j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\nu=۱}^{n} b_{۱\nu}a'_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=۱}^{n} b_{n\nu}a'_{\nu j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\nu=۱}^{n} b_{۱\nu}a''_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=۱}^{n} b_{n\nu}a''_{\nu j} \end{bmatrix}$$

چون ویژگی (الف) در مورد det برقرار است، داریم:

$$\det(BA) = \det(BA') + \det(BA'')$$

که در آن A' و A'' ماتریس‌هایی‌اند که از تفکیک ستونِ jامِ ماتریسِ A به دست آمده‌اند. پس:

$$D_{۲}(A) = D_{۲}(A') + D_{۲}(A'')$$

همین‌طور، اگر ستون jام A در عدد r ضرب شود، ستون jام BA نیز در r ضرب خواهد شد و خطی بودن نسبت به ستون jام ثابت می‌شود. در مورد ویژگی (ب)، اگر A' ماتریسی باشد که از تعویض ستون‌های i و j ماتریس A به دست آید، BA' نیز از تعویض ستون‌های i و j ماتریس BA حاصل می‌شود زیرا به طورکلی در حاصل ضرب دو ماتریس MN، ستون jام از ضرب کردن سطرهای M در ستون jام N به دست می‌آید. پس چون det واجد شرط (ب) است، این شرط برای $D_{۲}$ نیز نتیجه می‌شود وگزاره به اثبات می‌رسد.

■

گزارهٔ بالا نتایج مهمی در پی دارد که در زیر به آن‌ها پرداخته‌ایم.

۷ ۹ نتیجه شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری تابع خطی $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ این است که $\det f \neq ۰$. همین طور شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری ماتریس $n \times n$، A، این است که $\det A \neq ۰$.

برهان اگر A وارون‌پذیر باشد، ماتریسی چون $A^{-۱}$ وجود دارد که $AA^{-۱} = I$، پس طبق گزارهٔ ۷، ۱ $(\det A)(\det A^{-۱}) = ۱$، و درنتیجه $\det A \neq ۰$. برعکس، اگر A (یا معادلاً تابع خطی متناظر، f) وارون‌پذیر نباشد، می‌دانیم ستون‌های A وابستهٔ خطی خواهند بود، پس می‌توان یک ستون را به صورت ترکیب خطی ستون‌های دیگر نوشت. بنابراین، با استفاده از بسط به کمک ویژگی (الف)، به مجموع $(n-۱)$ دترمینان ماتریس‌هایی می‌رسیم که یک ستون آن‌ها تکرار شده است. دترمینان ماتریسی که دو ستون برابر داشته باشد صفر است، زیرا با تعویض دو ستون، از یک سو، ماتریس عوض نمی‌شود و، از سویی طبق (ب)، مقدار دترمینان باید در (-۱) ضرب شود.

■

یک دستاورد برهان بالا را جداگانه در قالب نتیجهٔ ۱۰ ذکر می‌کنیم.

۷ ۱۰ نتیجه مجموعهٔ $\{A^{۱},\dots,A^{n}\}$ از عناصر $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است اگر و فقط اگر $\det A \neq ۰$. ■

بدین‌ترتیب، ضابطه‌ای الگوریتمی برای تحقیق در مورد استقلال خطیِ مجموعه‌ای nتایی از عناصر $\mathbb{R}^n$ به دست می‌آید. اگر $k < n$ و مجموعه‌ای kعنصری در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم، ضابطه‌ای مشابه وجود دارد که در تمرین آخر بخش آمده است.

۷ ۱۱ نتیجه فرض کنید $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد و P یک متوازی‌السطوح در $\mathbb{R}^n$. در این صورت، $f(P)$ نیز متوازی‌السطوح است و $\operatorname{vol}_n(f(P)) = |\det f|\operatorname{vol}_n(P)$.

برهان فرض کنید $P = P(A^۱, \ldots, A^n)$. دراین‌صورت، ماتریس $[A_۱|\ldots|A_n]$ یک ماتریس $n \times n$ است. تابع خطی متناظر با این ماتریس را با $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم. بدین‌ترتیب، به ازای $i = ۱, \ldots, n$، $g(\mathrm{e}_i) = A^i$ نتیجه آنکه $\mathrm{vol}_n(P) = |\det\, g|$. حال:

$$f(P) = \{f(t_۱ A^۱ + \cdots + t_n A^n) | ۰ \leq t_i \leq ۱, i = ۱, \ldots n\}$$

که چون f خطی است:

$$f(P) = \{t_۱ f(A^۱) + \cdots + t_n f(A^n) | ۰ \leq t_i \leq ۱, i = ۱, \ldots, n\}$$

پس $f(P)$ متوازی‌السطوح است. از طرف دیگر، $f(P)$ تصویر مکعب واحد تحت اثر $f \circ g$ است، پس

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(f(P)) &= |\det\, (f \circ g)| \\ &= |\det\, f||\det\, g| \\ &= |\det\, f| \mathrm{vol}_n(P) \end{aligned}$$

چنانکه در حکم آمده است. ■

اکنون می‌توانیم مفهوم «راستگرد» و «چپگرد» در $\mathbb{R}^n$ را تعریف کنیم. فرض کنید $\{A^۱, \ldots, A^n\}$ مستقل خطی است. nتایی مرتب $(A^۱, \ldots, A^n)$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم چنانچه $\det\, A > ۰$ (به ترتیب $\det\, A < ۰$). بنابراین، عیناً مانند حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی، $\det\, A$ حاوی دو اطلاع زیر است:

الف) $|\det\, A|$ برابر حجم nبعدیِ متوازی‌السطوح $P(A)$ است.

ب) علامت $\det\, A$ نشان‌دهندهٔ راستگردی یا چپگردیِ nتاییِ مرتبِ ستون‌های $(A^۱, \ldots, A^n)$ است.

۷ تمرین

۱. هر یک از جایگشت‌های σ در زیر را به صورت ترکیبی از ترانهش‌ها بنویسید و $\epsilon(\sigma)$ را محاسبه کنید:

الف) $\sigma : ۱ \to ۳, ۲ \to ۱, ۳ \to ۴, ۴ \to ۲$؛

ب) $\sigma : ۱ \to ۳, ۲ \to ۵, ۳ \to ۲, ۴ \to ۴, ۵ \to ۱$؛

پ) $\sigma : ۱ \to ۲, ۲ \to ۳, \ldots, (n-۱) \to n, n \to ۱$ که $n \geq ۲$ عددی طبیعی است؛

ت) $\sigma : ۱ \to p + ۱, ۲ \to p + ۲, \ldots, q \to q + p, q + ۱ \to ۱, \ldots, q + p \to p$

که در اینجا p و q اعدادی طبیعی‌اند.

۲. دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$،

ب) $\begin{bmatrix} ۰ & a & b & c \\ -a & ۰ & d & e \\ -b & -d & ۰ & f \\ -c & -e & -f & ۰ \end{bmatrix}$،

پ) ماتریس $[a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = i \cdot j$،

ت) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$،

ث) $$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & \cdots & ۰ \\ & & ۰ & ۳ & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ ۰ & & \cdots & ۰ & & n-۱ \\ n & ۰ & & \cdots & & ۰ \end{bmatrix}.$$

۳. در هر مورد، تعیین کنید مجموعهٔ داده‌شده مستقل خطی است یا وابستهٔ خطی:

الف) $\{A^۱, A^۲, A^۳, A^۴\}$ در $\mathbb{R}^۴$ که $A^۱ = (۱, ۱, ۰, -۱)$، $A^۲ = (۰, -۱, ۱, ۱)$، $A^۳ = (۰, ۰, ۱, -۱)$، و $A^۴ = (۲, ۰, ۰, ۰)$

ب) $\{A^۱, \ldots, A^n\}$ در $\mathbb{R}^n$، که در آن $A^i = \mathrm{e}_۱ + \cdots + \mathrm{e}_i$؛ در اینجا $\{\mathrm{e}_۱, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ است.

۴. در هر مورد، تعیین کنید nتایی مرتب $(A^۱, \ldots, A^n)$ در $\mathbb{R}^n$ راستگرد است یا چپگرد و حجم nبُعدی $P(A^۱, \ldots, A^n)$ را محاسبه کنید:

الف) به ازای
$$n = ۴, A^۱ = (۰, ۰, ۱, ۱), A^۲ = (۱, ۱, ۰, ۰), A^۳ = (۰, ۱, ۱, ۰), A^۴ = (۱, ۰, ۱, ۰)$$

ب) به ازای n دلخواه، $A^۱ = \mathrm{e}_۱ + \mathrm{e}_۲$، $A^۲ = \mathrm{e}_۲ + \mathrm{e}_۳$، $\cdots$، $A^{n-۱} = \mathrm{e}_{n-۱} + \mathrm{e}_n$، و $A^n = \mathrm{e}_n$؛ در اینجا $\{\mathrm{e}_۱, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ است.

پ) به ازای n دلخواه، $A^۱ = \mathrm{e}_n$ ، $A^۲ = \mathrm{e}_{n-۱}$، $\cdots$، $A^n = \mathrm{e}_۱$؛ در اینجا $\{\mathrm{e}_۱, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ است.

۵. چون هر جایگشتی مانند σ تابعی یک به یک و پوشا از $\{۱, \ldots, n\}$ به خود آن است، $\sigma^{-۱}$ نیز یک جایگشت است.

الف) نشان دهید $\epsilon(\sigma^{-۱}) = \epsilon(\sigma)$.

ب) **ترانهادهٔ** A، $A^{\mathrm{T}} = [b_{ij}]$، برای هر ماتریس $A = [a_{ij}]$ به صورت $b_{ij} = a_{ji}$ تعریف می‌شود. نشان دهید $\det\,(A^{\mathrm{T}}) = \det\,(A)$.

پ) نشان دهید ستون‌های یک ماتریس $n \times n$ به عنوان مجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر سطرهای آن ماتریس به عنوان مجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند.

۶. مقصود از ماتریسِ جایگشتیِ $n \times n$ ماتریسی است که در هر سطر و در هر ستونش یک درایه برابر ۱ است و بقیهٔ درایه‌ها برابر صفر. دترمینان یک ماتریس جایگشتی را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تجانس با ضریب $k > ۰$ باشد، یعنی به ازای هر x، $f(\mathrm{x}) = k\mathrm{x}$. نشان دهید تجانس با ضریب k هر متوازی‌السطوح nبعدی را به یک متوازی‌السطوح nبعدی می‌نگارد و اثر آن را بر حجم متوازی‌السطوح پیدا کنید.

۸. فرض کنید A یک ماتریس $k \times k$ باشد، B یک ماتریس $k \times l$، و C یک ماتریس $l \times l$. نشان دهید:
$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \bigcirc & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C)$$

۹. برای ماتریس $n \times n$، مانند $A = [a_{ij}]$، عدد A^{ij} را برابر دترمینان ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ای تعریف می‌کنیم که از حذف سطر iام و ستون jام A به دست آید. نشان دهید:

الف) (بسط برحسب ستون jام) به ازای jی ثابت
$$\det A = \textstyle\sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i+j} a_{ij} A^{ij}$$

ب) (بسط برحسب سطر iام) به ازای iی ثابت
$$\det A = \textstyle\sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{i+j} a_{ij} A^{ij}$$

۱۰. ماتریس $n \times n$، A، را **پادمتقارن** می‌نامیم در صورتی که $A + A^{\mathrm{T}} = ۰$. اگر n فرد باشد و A پادمتقارن، نشان دهید $\det A = ۰$.

۱۱. فرض کنید $k < n$ و $\{A^۱, \ldots, A^k\}$ مجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد. با قرار دادن A^iها به عنوان ستون، یک ماتریس $n \times k$ به دست می‌آوریم که آن را A می‌نامیم. نشان دهید

مجموعهٔ $\{A^1, \ldots, A^k\}$ مستقل خطی است اگر و فقط یک زیرماتریس $k \times k$ از A وجود داشته باشد که دترمینان آن صفر نباشد.

۱۲. فرض کنید $\{A^1, \ldots, A^k\}$ یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد که در آن $k \leq n$ و P متوازی‌السطوح ایجادشده توسط $\{A^1, \ldots, A^k\}$ است. نشان دهید حجم kبعدی متوازی‌السطوح P برابر $\sqrt{\det G}$ است که $G = [g_{ij}]$ ماتریس $k \times k$ با درایهٔ $g_{ij} = A^i \cdot A^j$ است. (راهنمایی: اگر E زیرفضای خطی kبعدی $\langle A^1, \ldots, A^k \rangle$ از $\mathbb{R}^n$ باشد، پایه‌ای یکامتعامد $(\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_k)$ برای E طبق روش گرام‌ـاشمیت وجود دارد. می‌نویسیم $A^j = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_j$. ماتریس $k \times k$، $A = [a_{ij}]$ را در نظر بگیرید و نشان دهید $G = A^{\mathrm{T}} A$.)

۱۳. فرض کنید $m < n$، و A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد به نحوی که $\det(AB) \neq 0$. نشان دهید ماتریس A دارای m ستون مستقل خطی (به عنوان اعضای $\mathbb{R}^m$) است.

۱۴. فرض کنید $m < n$، و A یک ماتریس $m \times n$ باشد و B یک ماتریس $n \times m$. نشان دهید $\det(BA) = 0$.

۸ ویژه‌مقدار و ویژه‌راستا

پس از آوردن چند مثال متنوع از نگاشت‌های خطی در بخش ۴.۷، در بخش‌های ۵.۷ تا ۷.۷ به مشترکات نگاشت‌های خطی پرداختیم. در این بخش مجدداً به تنوع نگاشت‌های خطی باز می‌گردیم. دسته‌ای از مفاهیم اساسی برای شناخت رفتارهای گوناگون نگاشت‌های خطی عبارت است از ویژه‌مقدار، ویژه‌بردار، ویژه‌راستا و... که در این بخش به آن‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد. زیرفضای خطی یک‌بعدیِ L از $\mathbb{R}^n$ (= خط راست گذرنده از 0) را **یک ویژه‌راستا** برای f می‌نامیم به شرطی که به ازای هر $\mathrm{u} \in L$، $f(\mathrm{u})$ متعلق به L باشد. درواقع، اگر به ازای عضو ناصفری $\mathrm{v} \in L$، $f(\mathrm{v})$ متعلق به L باشد، $f(\mathrm{u})$ هم به ازای هر عضو $\mathrm{u} \in L$ متعلق به L خواهد بود. علت آن است که اگر $\mathrm{v} \neq 0$، هر عضو $\mathrm{u} \in L$ را می‌توان به شکل $\mathrm{u} = c\mathrm{v}$ نوشت که در آن $c \in \mathbb{R}$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(\mathrm{u}) &= f(c\mathrm{v}) \\ &= cf(\mathrm{v}) \end{aligned}$$

و اگر $f(\mathrm{v})$ در L باشد، در نتیجه $f(\mathrm{u})$ نیز در L خواهد بود. به‌علاوه، عملکرد f روی هر ویژه‌راستا، یک تجانس یا قرینهٔ یک تجانس است، بدین معنا که عددی حقیقی چون λ وجود دارد به طوری که رابطهٔ $f(\mathrm{u}) = \lambda \mathrm{u}$ به ازای هر $\mathrm{u} \in L$، برقرار است. برای مشاهدهٔ این نکته فرض کنید، به ازای یک $\mathrm{v} \neq 0$ در L، داریم $f(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$؛ آنگاه برای عضو دلخواه $\mathrm{u} = c\mathrm{v}$ روی L:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{u}) &= f(c\mathrm{v}) \\ &= cf(\mathrm{v}) \\ &= c\lambda \mathrm{v} \\ &= \lambda \mathrm{u} \end{aligned}$$

پس همهٔ نقاط L تحت اثر f در عدد واحد λ ضرب می‌شوند. عدد λ را **ویژه‌مقدار** منسوب به ویژه‌راستای L می‌نامیم. هر عنصر ناصفر $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ که به ازای آن $f(\mathrm{u}) = \lambda \mathrm{u}$ یک **ویژه‌بردار** (منسوب به λ) خوانده می‌شود.

مثال ۸ ۱ تابع خطی $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ را که با ماتریس زیر نشان داده می‌شود در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای یافتن ویژه‌راستاها، برداری مانند $\mathrm{u} \neq ۰$ جستجو می‌کنیم که برای آن عدد حقیقی λ به گونه‌ای وجود داشته باشد که

$$A|\mathrm{u}\rangle = \lambda|\mathrm{u}\rangle$$

یا به عبارت دیگر:

$$A|\mathrm{u} - \lambda|\mathrm{u}\rangle = ۰$$

یا:

$$(A - \lambda I_۲)|\mathrm{u}\rangle = ۰ \qquad (۱)$$

که در اینجا $I_۲$ ماتریس همانی ۲×۲ است. به بیان دیگر، $\mathrm{u} \neq ۰$ و λ باید طوری باشند که u در هستهٔ تابع خطی مشخص‌شده توسط ماتریس $A - \lambda I_۲$ قرار گیرد. برای اینکه هستهٔ یک تابع خطی وارون‌پذیر $\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ عضوی غیر از صفر داشته باشد لازم و کافی است که تابع خطی وارون‌پذیر نباشد یا معادلاً دترمینان آن صفر باشد. پس لزوماً:

$$\det(A - \lambda I_۲) = ۰ \qquad (۲)$$

توجه کنید که تا این مرحله ۲×۲ بودن ماتریس هیچ نقشی نداشت. درواقع، برای اینکه نگاشت خطی مربوط به ماتریس $n \times n$، A، ویژه‌راستایی با ویژه‌مقدار λ داشته باشد، لازم و کافی است که

$$\det(A - \lambda I_n) = ۰ \qquad (۳)$$

به مثالِ در دست باز می‌گردیم. باید λ به گونه‌ای اختیار شود که (۱) برقرار باشد، پس:

$$\det\left(\begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}\right) = ۰$$

$$\det\begin{bmatrix} ۳-\lambda & ۸ \\ ۱ & ۱-\lambda \end{bmatrix} = ۰$$

$$(۳-\lambda)(۱-\lambda) - ۸ = ۰$$

$$\lambda^۲ - ۴\lambda - ۵ = ۰$$

جواب‌های این معادله عبارت‌اند از: $\lambda = -۱$ و $\lambda = ۵$. با قرار دادن هر یک از این دو مقدار در (۱)، ویژه‌راستاهای مربوط را پیدا می‌کنیم. نخست به ازای $\lambda = -۱$:

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۸ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ۴u_۱ + ۸u_۲ = ۰ \\ u_۱ + ۲u_۲ = ۰ \end{cases}$$

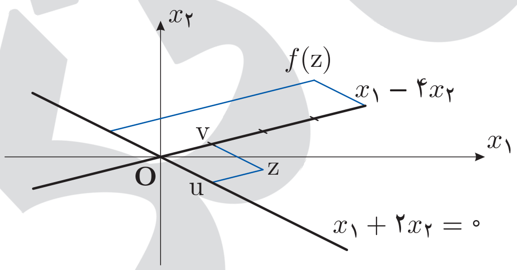
بدین‌ترتیب، ویژه‌راستا عبارت است از خط راست $x_۱ + ۲x_۲ = ۰$. هر نقطهٔ x از این خط راست تحت اثر تابع خطی به x− نگاشته می‌شود. به ازای $\lambda = ۵$، به طریق مشابه، داریم

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۸ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -۲u_۱ + ۸u_۲ = ۰ \\ u_۱ - ۴u_۲ = ۰ \end{cases}$$

پس ویژه‌راستای مربوط به $\lambda = ۵$ خط راست $x_۱ - ۴x_۲ = ۰$ است. تابع خطی روی این خط به صورت تجانس با ضریب ۵ عمل می‌کند. شکل ۲۲.۷ وضعیت دو ویژه‌راستا را نمایش می‌دهد. هر عنصر دلخواه $z \in \mathbb{R}^۲$ را می‌توانیم به‌صورت $z = u + v$ تجزیه کنیم که **u** روی خط $x_۱ + ۲x_۲ = ۰$ قرار دارد و v روی خط $x_۱ - ۴x_۲ = ۰$. بنابراین:

$$f(z) = f(u) + f(v) = -u + ۵v$$



شکل ۲۲.۷

■

۸ مثال ۲ نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم که با ماتریس قطری زیر نشان داده می‌شود:

$$D = \begin{bmatrix} d_۱ & & & \bigcirc \\ & d_۲ & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & d_n \end{bmatrix}$$

از شکل ماتریس پیداست که به ازای $j = ۱, \dots, n$، $f(\mathrm{e}_j) = d_j \mathrm{e}_j$؛ در اینجا $\{\mathrm{e}_۱, \dots, \mathrm{e}_n\}$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ است. بنابراین، هر یک از n محور مختصات ویژه‌راستایی برای f است. آیا ویژه‌راستای دیگری وجود دارد؟ اگر $\mathrm{x} = (x_۱, \dots x_n)$ عضو ناصفری از $\mathbb{R}^n$ باشد،

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{x}) &= f(x_۱\mathrm{e}_۱ + \cdots + x_n\mathrm{e}_n) \\
&= x_۱ f(\mathrm{e}_۱) + \cdots + x_n f(\mathrm{e}_n) \\
&= x_۱ d_۱ \mathrm{e}_۱ + \cdots + x_n d_n \mathrm{e}_n \\
&= (d_۱ x_۱, \dots, d_n x_n)
\end{aligned}
$$

برای اینکه $f(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{x}$، باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(\lambda x_۱, \dots, \lambda x_n) = (d_۱ x_۱, \dots, d_n x_n)$$

اگر به ازای $i \neq j$ داشته باشیم $d_i \neq d_j$، آنگاه برقراری توأمِ $\lambda x_i = d_i x_i$ و $\lambda x_j = d_j x_j$ فقط در صورتی امکان‌پذیر است که از بینِ x_i یا x_j یکی صفر باشد. بنابراین، در حالتی که همهٔ d_iها متمایز باشند، ویژه‌راستاها فقط وقتی حاصل می‌شوند که $(n-۱)$ مؤلفه از $x_۱$، ...، x_n صفر باشند، یعنی فقط محورهای مختصاتْ ویژه‌راستا هستند. وقتی k تا از $d_۱$، ...، d_n برابر باشند، مثلاً $d_۱ = \cdots = d_k$، و به ازای $i > k$، $d_i \neq d_۱$، هر خط راست گذرنده از ۰ در زیرفضای خطی $\langle \mathrm{e}_۱, \dots, \mathrm{e}_k \rangle$ ویژه‌راستایی با ویژه‌مقدار $\lambda = d_۱ = \cdots = d_k$ است و هیچ ویژه‌راستای دیگری با این ویژه‌مقدار وجود ندارد. در حالتی که همهٔ d_iها برابر یک مقدار d باشند، $f(\mathrm{x}) = d\mathrm{x}$ حاصل می‌شود و هر خط گذرنده از ۰ یک ویژه‌راستا با ویژه‌مقدار d است. ■

مثال ۳ ۸۷

وضعیت ویژه‌راستاهای تابع خطی $f : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ را بررسی می‌کنیم که با ماتریس زیر نشان داده شده است:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $f(\mathrm{e}_۲) = ۲\mathrm{e}_۲$. پس محور $x_۲$ ویژه‌راستایی با ویژه‌مقدار ۲ است. برای دستیابی به همهٔ ویژه‌مقدارها و ویژه‌راستاها، با استفاده از (۳) می‌نویسیم:

$$\det \begin{bmatrix} ۱-\lambda & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۲-\lambda & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱-\lambda \end{bmatrix} = ۰$$

با بسط دترمینان برحسب ستون دوم:

$$(۲-\lambda)(۱-\lambda)^۲ + ۳ = ۰$$

تنها ریشهٔ حقیقی این معادله $\lambda = ۲$ است. برای یافتن ویژه‌بردارهای مربوط به این ویژه‌مقدار هستهٔ $A - \lambda I$ را شناسایی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \\ u_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

که معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} -u_۱ - ۳u_۳ = ۰ \\ ۰ = ۰ \\ u_۱ - u_۳ = ۰ \end{cases}$$

که از آن نتیجه می‌شود $u_۱ = u_۳ = ۰$، و شرطی روی $u_۲$ نیست. بنابراین محور $x_۲$ تنها ویژه‌راستاست.

■

نکتهٔ شایان ذکر در این مثال این است که هر چند فقط یک ویژه‌راستا وجود دارد، صفحهٔ $(x_۱, x_۳)$ تحت عمل تابع به خود آن نگاشته می‌شود زیرا اگر در $\mathrm{u} = (u_۱, u_۲, u_۳)$ قرار دهیم $u_۲ = ۰$، می‌بینیم که مؤلفهٔ دوم $A|\mathrm{u}\rangle$ نیز صفر است. هر زیرفضای خطی که تحت عمل یک تابع خطی f به خود آن نگاشته شود یک **زیرفضای ناوردا** تحت آن تابع خطی خوانده می‌شود. بنابراین، ویژه‌راستا نوع خاصی زیرفضای ناوردا، یعنی زیرفضای ناوردای یک‌بُعدی است.

۸ مثال ۴ تابع خطی $f: \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ با ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ ویژه‌مقدارها می‌نویسیم:

$$\det \begin{bmatrix} ۲-\lambda & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱-\lambda & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۲-\lambda \end{bmatrix} = ۰$$

$$(۲-\lambda)(\lambda^۲ - \lambda - ۲) = ۰$$

پس ویژه‌مقدارها عبارت‌اند از ۱− و ۲ که ۲ به صورت ریشهٔ مضاعف ظاهر می‌شود. اکنون با محاسبهٔ هستهٔ $A - \lambda I$، ویژه‌راستاهای مربوط به هر λ را محاسبه می‌کنیم. برای $\lambda = -۱$:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \\ u_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ۳u_۱ + u_۲ - u_۳ = ۰ \\ -۳u_۲ + ۳u_۳ = ۰ \end{cases}$$

از این معادلات نتیجه می‌گیریم که $u_۱ = ۰, u_۲ = u_۳$، پس ویژه‌راستای مربوط به ۱− عبارت است از $\frac{x_۱}{۰} = \frac{x_۲}{۱} = \frac{x_۳}{۱}$.

برای $\lambda = ۲$:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \\ u_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_۲ - u_۳ = ۰ \\ -۳u_۲ = ۰ \\ -۳u_۳ = ۰ \end{cases}$$

بنابراین، محور $x_۱$ تنها ویژه‌راستای مربوط به $\lambda = ۲$ است، هرچند این ویژه‌مقدار به طور مضاعف ظاهر می‌شود. ■

مثال‌های بالا نشان می‌دهد که ویژه‌مقدارها برای نگاشتی خطی با ماتریس A از معادلهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$\det\,(A - \lambda I) = ۰ \qquad (۴)$$

درواقع، $A - \lambda I$ به ازای دقیقاً این مقادیر λ، دارای هسته‌ای بزرگ‌تر از $\{۰\}$ خواهد بود و هر زیرفضای خطی یک‌بُعدی هسته یک ویژه‌راستاست، زیرا اگر $\mathrm{u} \neq ۰$ متعلق به هسته باشد، $(A - \lambda I)(\mathrm{u}) = ۰$، یا معادل آن، $A\mathrm{u} = \lambda\mathrm{u}$. معادلهٔ (۴) **معادلهٔ مشخصهٔ** ماتریس A یا تابع خطی مربوط خوانده می‌شود. توجه کنید که این معادله از درجهٔ n و جملهٔ درجهٔ n آن $(-۱)^n\lambda^n$ است. بنابراین، حداکثر n ویژه‌مقدار برای یک تابع خطی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد.

تعویض پایه

در اینجا لازم است تناظر یک به یکی را که میان تابع‌های خطیِ $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های $m \times n$ با درایهٔ حقیقی منظور کرده‌ایم دقیق‌تر بازبینی کنیم. فرض کنید $\{\mathrm{e}_۱, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی e_j همان nتاییِ با درایهٔ ۱ در مولفهٔ jام و صفر در دیگر مؤلفه‌هاست، و $\{\mathrm{e}'_۱, \ldots, \mathrm{e}'_m\}$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^m$، یعنی e'_i هم m تاییِ با درایهٔ ۱ در مولفهٔ iام و صفر در دیگر مؤلفه‌هاست. $f(\mathrm{e}_j)$ را به صورت ترکیب خطی $\mathrm{e}'_۱, \ldots, \mathrm{e}'_i$ می‌نویسیم: $f(\mathrm{e}_j) = \sum_{i=۱}^{m} a_{ij}\mathrm{e}'_i$. ضرایب a_{ij}ی سمت راست

درایه‌های ستون jام ماتریس مربوط به تابع خطی f را تشکیل می‌دهند. بنابراین، روشن است که این ماتریس به پایه‌های خاصی مربوط می‌شود که برای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ به کار گرفته‌ایم. در اینجا بر آنیم نمایش ماتریسی را به مفهوم عام‌تر، یعنی نسبت به پایه‌های دلخواه برای $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$، مطرح کنیم. علاوه بر این، مفهوم نگاشت خطی را نیز کلی‌تر در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که اگر $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی باشد، تصویر هر زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ تحت تأثیر f زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^m$ است. گاهی لازم است دامنهٔ یک نگاشت خطی را به زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ محدود کنیم. وقتی E زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ و F زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^m$ باشد، مقصود از نگاشتی خطی از F از $g: E \longrightarrow F$ نگاشتی است که به ازای هر $\mathrm{x} \in E$، $g(\mathrm{x}) \in F$ و، علاوه بر آن، دو شرط نگاشت خطی برای g برقرار باشند، یعنی

الف) به ازای هر u و v در E، $g(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = g(\mathrm{u}) + g(\mathrm{v})$

ب) به ازای هر u در E و هر عدد حقیقی r، $g(r\mathrm{u}) = rg(\mathrm{u})$.

در حالت خاص $E = \mathbb{R}^n$ و $F = \mathbb{R}^n$، مفهوم عادی نگاشت خطی در دست است. خواهیم دید که انتخاب مناسب پایه موجب می‌شود نمایش ماتریسیِ هر نگاشت خطی به صورت کارا، گویا، و ساده‌ای درآید. در حالت خاص $m = n$، یعنی برای نگاشت‌های خطی $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$، معمولاً انتخاب پایه در امتداد ویژه‌راستاها چنین انتخاب مطلوبی است. در بحث زیر، $E \subset \mathbb{R}^p$ و $F \subset \mathbb{R}^q$ زیرفضاهایی خطی‌اند.

فرض کنید $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n)$ پایهٔ مرتبی برای E، $\mathcal{B}' = (\mathrm{b}'_1, \ldots, \mathrm{b}'_m)$ پایهٔ مرتبی برای F، و $f: E \longrightarrow F$ نگاشتی خطی باشد. هر $f(\mathrm{b}_j)$ را می‌توانیم به صورت ترکیبی خطی از $(\mathrm{b}'_1, \ldots, \mathrm{b}'_m)$ بنویسیم:

$$f(\mathrm{b}_j) = a_{1j}\mathrm{b}'_1 + \cdots + a_{mj}\mathrm{b}'_m \tag{۵}$$

مقصود از **ماتریس f نسبت به پایه‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$**، که آن را با $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ نمایش می‌دهیم، ماتریسی $m \times n$ است که ستون jام آن را ضرایب a_{ij}ی سمت راست (۵) تشکیل می‌دهند. بنابراین، در حالت $E = \mathbb{R}^n$ با $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ و $F = \mathbb{R}^m$ با $\mathcal{B}' = (\mathrm{e}'_1, \ldots, \mathrm{e}'_m)$ همان نمایش معمولی حاصل می‌شود.

در نمایش معمول ماتریسیِ توابع خطی نسبت به پایهٔ متداول دیدیم که ترکیب توابع خطی با حاصل ضرب ماتریس‌ها متناظر است. این در نمایش ماتریسی نسبت به پایه‌های دلخواه نیز برقرار است که در گزارهٔ ۵ بدان پرداخته‌ایم.

۸ ۵ گزاره فرض کنید $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$، و $\mathcal{B}''$ به ترتیب پایه‌های مرتبی برای E، F، و G باشند و $f: E \longrightarrow F$ و $g: F \longrightarrow G$ نگاشت‌هایی خطی؛ در این صورت:

$$M^{B}_{B''}(g \circ f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \tag{۶}$$

برهان می‌نویسیم $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n)$ ، $\mathcal{B}' = (\mathrm{b}'_1, \ldots, \mathrm{b}'_m)$ و $\mathcal{B}'' = (\mathrm{b}''_1, \ldots, \mathrm{b}''_p)$. بنابراین:

$$f(\mathrm{b}_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} b'_k \tag{۷}$$

$$g(\mathrm{b}'_k) = \sum_{i=۱}^{p} a'_{ik}\mathrm{b}''_i \qquad (۸)$$

و در نتیجه $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = [a_{ij}]$ و $M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(g) = [a'_{ij}]$. از طرفی دیگر طبق (۷) و (۸):

$$\begin{aligned} g\Big(f(\mathrm{b}_j)\Big) &= g\Big(\sum_{k=۱}^{m} a_{kj}\mathrm{b}'_k\Big) \\ &= \sum_{k=۱}^{m} a_{kj} g(\mathrm{b}'_k) \\ &= \sum_{k=۱}^{m} a_{kj}\Big(\sum_{i=۱}^{p} a'_{ik}\mathrm{b}''_i\Big) \\ &= \sum_{i=۱}^{p}\Big(\sum_{k=۱}^{m} a'_{ik}a_{kj}\Big)\mathrm{b}''_i \end{aligned}$$

بنابراین، عنصر سطر i و ستون jی ماتریس $M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(g\circ f)$ عبارت است از $\sum_{k=۱}^{m} a'_{ik}a_{kj}$ که برابر عنصر سطر i و ستون jی ماتریس حاصل ضرب $M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(g)M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$ است.

■

به طورکلی، اگر $f_۱ : E_۱ \longrightarrow E_۲$، $f_۲ : E_۲ \longrightarrow E_۳$، ...، و $f_k : E_k \longrightarrow E_{k+۱}$ دنباله‌ای از نگاشت‌های خطی باشد و $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای E_i، با استفادهٔ مکرر از فرمول (۶) چنین نتیجه می‌شود:

$$M_{\mathcal{B}_{k+۱}}^{\mathcal{B}_۱}(f_k\circ\cdots\circ f_۱) = M_{\mathcal{B}_{k+۱}}^{\mathcal{B}_k}(f_k)\circ\cdots\circ M_{\mathcal{B}_۲}^{\mathcal{B}_۱}(f_۱) \qquad (۹)$$

طبق معمول، تابع همانی $E \longrightarrow E$ را با ۱_E نمایش می‌دهیم و ماتریس واحد $n\times n$، I_n، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_n = \begin{bmatrix} ۱ & & & \bigcirc \\ & ۱ & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

گزارهٔ زیر حاوی نکات اصلی نمایش ماتریسی توابع خطی $E \longrightarrow E$ است.

گزاره ۶

الف) اگر $\mathcal{B}$ هر پایهٔ مرتبی برای E باشد:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(۱_E) = I_n \qquad (۱۱)$$

ب) اگر $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دو پایهٔ مرتب برای E باشند، $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(۱_E)$ و $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(۱_E)$ وارون‌پذیرند و:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(۱_E) = \big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(۱_E)\big)^{-۱} \qquad (۱۲)$$

پ) اگر $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دو پایهٔ مرتب برای E باشند و $f: E \longrightarrow E$ نگاشتی خطی باشد، $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = A$ و $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = B$ ، آنگاه رابطهٔ زیر میان A و B برقرار است:

$$B = C^{-۱}AC \tag{۱۳}$$

که در اینجا

$$C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(۱_E) \tag{۱۴}$$

برهان فرض کنید $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_۱, \dots, \mathrm{b}_n)$. از آنجا که $۱_E(\mathrm{b}_j) = \mathrm{b}_j$ ، نمایش $۱_E(\mathrm{b}_j)$ برحسب b_iها با ضریب ۱ برای b_j و ضریب صفر برای دیگر b_iها ظاهر می‌شود و (الف) به اثبات می‌رسد. اگر در (۶)، $\mathcal{B}''$ را برابر $\mathcal{B}$ بگیریم و $f = g = ۱_E$، از (الف) چنین نتیجه می‌شود:

$$I_n = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(۱_E)M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(۱_E)$$

پس (ب) به دست می‌آید. بالاخره در (۹) با $k = ۳$، $\mathcal{B}_۳ = \mathcal{B}_۱ = \mathcal{B}'$، $\mathcal{B}_۴ = \mathcal{B}_۲ = \mathcal{B}$، و $f_۳ = f_۱ = ۱_E$ و $f_۲ = f$ داریم:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(۱_E)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(۱_E)$$

که، با توجه به (ب)، حکم (ج) است. ■

۸ ۷ مثال

الف) مثال ۱ در همین بخش را در نظر می‌گیریم. برای ویژه‌مقدار $\lambda_۱ = -۱$ در این مثال، ویژه‌راستای خط راست $x_۱ + ۲x_۲ = ۰$ به دست آمد. ویژه‌برداری را در این راستا در نظر می‌گیریم، مثلاً $\mathrm{b}_۱ = (۲, -۱)$. ویژه‌مقدار دیگر، $\lambda_۲ = ۵$، با ویژه‌راستای خط راست $x_۱ - ۴x_۲ = ۰$ است. روی این خط راست برداری چون $\mathrm{b}_۲ = (۴, ۱)$ را در نظر می‌گیریم. $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_۱, \mathrm{b}_۲)$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۲$ است و نسبت به این پایه:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

زیرا $f(\mathrm{b}_۱) = -\mathrm{b}_۱$ و $f(\mathrm{b}_۲) = ۵\mathrm{b}_۲$. توجه کنید که استفاده از این پایه ماتریس تابع خطی را به صورت سادهٔ قطری درآورده است. وانگهی، اگر پایهٔ متداول $\mathbb{R}^۲$ را با ϵ نمایش دهیم، ماتریس تعویض پایه، $C = M_{\epsilon}^{\mathcal{B}}(۱_{\mathbb{R}^۲})$، در (۱۴) به شکل زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

از خواننده می‌خواهیم برقراری (۱۳) را در اینجا تحقیق کند.

ب) فرض کنید $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_۱, \dots, \mathrm{b}_n)$ پایهٔ مرتبی برای $\mathbb{R}^n$ باشد و

$$\tau\colon \{۱, \dots, n\} \longrightarrow \{۱, \dots, n\}$$

ترانهشی باشد که در آن $\tau(i) = j$، $\tau(j) = i$، $i \neq j$، و، به ازای $k \neq i, j$، $\tau(k) = k$. پایه‌ای را که از جابه‌جایی b_i و b_j به دست می‌آید با $\mathcal{B}' = (\mathrm{b}'_۱, \dots, \mathrm{b}'_n)$ نمایش می‌دهیم. بدین‌ترتیب، به ازای $k \neq i, j$، $\mathrm{b}'_i = \mathrm{b}_j$، $\mathrm{b}'_j = \mathrm{b}_i$ ، و $\mathrm{b}'_k = \mathrm{b}_k$. درنتیجه، ماتریس $C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(۱_{\mathbb{R}^n})$ با جابه‌جا کردن ستون‌های iام و jام از I_n حاصل می‌شود. وانگهی، از آنجا که $\tau^{-۱} = \tau$، $C^{-۱} = C$. اگر $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی با ماتریس $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ باشد، ماتریس $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ برابر CAC است.

رابطهٔ این ماتریس را با A بررسی می‌کنیم. نخست، توجه کنید که AC با جابه‌جا کردن ستون‌های i و jی ماتریس A به دست می‌آید. قرار می‌دهیم $AC = A'$. نتیجهٔ ضرب ماتریس C در طرف چپ A' این است که سطرهای i و jی ماتریس A' تعویض می‌شوند. بدین‌ترتیب، CAC با جابه‌جا کردن ستون‌های i و j و نیز سطرهای i و j از A حاصل می‌شود. مثلاً، اگر $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ ماتریس نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ نسبت به یک پایه باشد، با تعویض ترتیب دو عضو پایه، نمایش ماتریسی نگاشت خطی به $\left[\begin{smallmatrix} d & c \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$ تبدیل می‌شود. هر جایگشت روی عناصر پایه ترکیب تعدادی متناهی ترانهش است؛ بنابراین، می‌توان با جابه‌جایی‌های متوالی اثر جایگشت بر نمایش ماتریسی را دنبال کرد.

پ) در مثال ۳ همین بخش، تنها ویژه‌مقدار $\lambda = ۲$ است با ویژه‌راستای محور $x_۲$. بردار $\mathrm{e}_۲ = (۰, ۱, ۰) = \mathrm{b}_۱$ را در این راستا در نظر می‌گیریم. حال اگر قرار دهیم $\mathrm{b}_۲ = \mathrm{e}_۱$ و $\mathrm{b}_۳ = \mathrm{e}_۳$، طبق آنچه در (ب) بالا آمد، ماتریس تابع خطی نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}$ برابر می‌شود با:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ت) در مورد مثال ۴ در همین بخش دو ویژه‌مقدار به دست آوردیم. ویژه‌راستا، به ازای $\lambda_۱ = -۱$، خط راست $\frac{x_۱}{۰} = \frac{x_۲}{۱} = \frac{x_۳}{۱}$ است که می‌توان در راستای آن ویژه‌بردار $\mathrm{b}_۱ = (۰, ۱, ۱)$ را در نظر گرفت. برای ویژه‌مقدار $\lambda = ۲$، محور $x_۱$ ویژه‌راستاست، پس می‌توان $\mathrm{b}_۲ = (۱, ۰, ۰)$ را ویژه‌برداری در این راستا دانست. برای بردار سوم پایه می‌توان از هر بردار $\mathbb{R}^۳$ که ترکیب خطی $\mathrm{b}_۱$ و $\mathrm{b}_۲$ نباشد استفاده کرد، مثلاً $\mathrm{b}_۳ = (۰, ۱, ۰)$. (چرا $\mathrm{b}_۳$ ترکیبی خطی از $\mathrm{b}_۱$ و $\mathrm{b}_۲$ نیست؟) حال $f(\mathrm{b}_۱) = -\mathrm{b}$، $f(\mathrm{b}_۲) = ۲\mathrm{b}_۲$، و

$$f(\mathrm{b}_۳) = f(\mathrm{e}_۲) = (۱, -۱, -۳) = -۳\mathrm{b}_۱ + \mathrm{b}_۲ + ۲\mathrm{b}_۳$$

بنابراین برای $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_۱, \mathrm{b}_۲, \mathrm{b}_۳)$، داریم:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

در اینجا یادآوری می‌کنیم که دترمینان یک نگاشت خطی $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}n$ به دو عامل بستگی

دارد. قدرمطلق دترمینان ضریبی است که حجم nبُعدیِ هر متوازی‌السطوح تحت اثر f در آن ضرب می‌شود و علامت دترمینان مثبت یا منفی است، بدین معنا که جهت nتاییِ مستقل خطی مرتبی (یعنی راستگردی یا چپگردی آن) حفظ یا معکوس شود. بدین‌ترتیب، هرچند مقدار دترمینان برحسب درایه‌های ماتریس مربوط تعریف می‌شود، به نظر می‌آید که این مفهوم هندسی باید مستقل از انتخاب پایه‌ای خاص برای نمایش ماتریس باشد. ■

درواقع، از رابطهٔ (۱۳)، با توجه به برابر بودن دترمینان حاصل ضرب ماتریس‌ها با حاصل ضرب دترمینان‌ها همچنین برابر بودن $\det\,(C^{-1})$ با $(\det\,C)^{-1}$ گزارهٔ زیر را نتیجه می‌گیریم.

۸ گزاره فرض کنید $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دو پایهٔ مرتب برای $\mathbb{R}^n$ باشند و $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد. دراین صورت، رابطهٔ

$$\det M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)=\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \tag{۱۵}$$

برقرار است.

یک نتیجهٔ مهم گزارهٔ بالا این است که معادلهٔ مشخصه به نمایش ماتریسی خاصی بستگی ندارد. فرض کنید $A=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ و $B=M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ دو نمایش ماتریسی نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ باشند. طبق (۱۳)، $B=C^{-1}AC$. حال:

$$\begin{aligned}\det\,(B-\lambda I_n)&=\det\left(C^{-1}AC-C^{-1}(\lambda I_n)C\right)\\&=\det\left(C^{-1}(A-\lambda I_n)C\right)=\det\,(A-\lambda I_n)\end{aligned}$$

چنانکه ادعا شد، نتیجه می‌گیریم ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، اعم از حقیقی یا مختلط، به نمایش ماتریسی خاص نگاشت خطی f وابسته نیستند.

تا پایان این فصل با بهره‌گیری از ابزاری که تاکنون در این بخش شکل گرفته است به بررسی دسته‌های خاصِ ماتریس‌ها و نگاشت‌های خطی می‌پردازیم. این نگاشت‌های خطی و ماتریس‌ها در فصل‌های بعد کاربردهای مهمی خواهند داشت.

تمرین

۱. نشان دهید ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ یک دوران با زاویهٔ α حول 0 در $\mathbb{R}^2$ عبارت‌اند از $\cos\alpha\pm i\sin\alpha$.

۲. در هر مورد، برای تابع خطی $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$، که با ماتریسِ داده‌شده نسبت به پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود، ویژه‌بردارها و ویژه‌راستاها را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix}\alpha&1\\0&\beta\end{bmatrix}$ که $\alpha\neq\beta$ اعداد حقیقیِ داده‌شده‌اند،

ب) $\begin{bmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{bmatrix}$ که α عدد حقیقی داده‌شده است،

پ) $\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&0\\-1&-1&-3\end{bmatrix}$،

ت) $\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$،

ث) $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$،

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$،

چ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$،

ح) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & -4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

۳. در هر مورد، نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ با ماتریسی نسبت به پایهٔ متداول داده شده است. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ را برای پایهٔ مرتبِ داده‌شده پیدا کنید.

الف) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

و

$$\mathcal{B} = \Big((\cos\beta, \sin\beta), (-\sin\beta, \cos\beta) \Big)$$

که $\beta \in \mathbb{R}$ داده شده است:

ب) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ با

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathcal{B} = \Big((1,1,1), (1,1,-2), (-1,1,0) \Big)$$

پ) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در تمرین ۲ (چ)

$$\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \cdots + \mathrm{e}_n)$$

ت) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ با

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathcal{B} = (\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_1)$$

۴. در هر مورد، نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ داده شده است. برای E و $f(E)$ پایه‌هایی اختیار کنید و ماتریس تحدید f به E را نسبت به این پایه‌ها بنویسید.

الف) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(\mathrm{x}) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{x}$ که $\mathrm{a} \neq 0$ عضوی داده‌شده از $\mathbb{R}^n$ است و $E = \ker f$.

ب) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(\mathrm{x}) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{x}$ که $\mathrm{a} \neq 0$ عضوی داده‌شده از $\mathbb{R}^3$ است و E مکمل قائم $\langle \mathrm{a} \rangle$ است.

پ) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ با ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ نسبت به پایهٔ متداول و E صفحهٔ $3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} - \mathrm{z} = 0$.

ت) به ازای $0 < k < n$، $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تصویر قائم روی k مؤلفهٔ اول و $E = \langle \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k \rangle$؛ در اینجا $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ است.

۵. نشان دهید اگر نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ دارای n ویژه‌مقدار حقیقی متمایز باشد، آنگاه f دارای دقیقاً n ویژه‌راستای متمایز است.

۶. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی است و $\lambda \in \mathbb{R}$ تنها ویژه‌مقدار آن است. نشان دهید f یا فقط یک ویژه‌راستا دارد یا بی‌نهایت ویژه‌راستای متمایز. در حالت دوم آیا هر خط گذرنده از ۰ ویژه‌راستاست؟

۷. مقصود از یک ماتریس $n \times n$ **بالا مثلثی**، ماتریسی چون $A = [a_{ij}]$ است که در آن، به ازای $i > j$، $a_{ij} = 0$. نشان دهید همهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس بالامثلثی حقیقی‌اند و آن‌ها را شناسایی کنید.

۸. فرض کنید نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ دارای رتبهٔ k است، یعنی $\dim\big(f(\mathbb{R}^n)\big) = k$، که در اینجا لزوماً $k \leq \min\{m, n\}$. نشان دهید پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای $\mathbb{R}^n$ و

پایه‌ای چون $\mathcal{B}'$ برای $\mathbb{R}^m$ وجود دارند به نحوی که

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} I_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

(راهنمایی: اگر رتبهٔ f برابر k باشد، هستهٔ f $(n-k)$بعدی است. زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید که با هستهٔ f فقط در ۰ اشتراک داشته باشد، پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ بگیرید که k عضو اول آن عضوهای این زیرفضا باشند و $n-k$ عضو باقیماندهٔ عضوهای $\ker f$.)

۹. برای هر ماتریس مربعی A، اثر A، که با $\operatorname{trace} A$ یا $\operatorname{tr} A$ نمایش داده می‌شود، مجموع درایه‌های قطر اصلی A است، $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. اگر $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ همهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه (اعم از حقیقی و مختلط) باشند، نشان دهید:

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$$

۱۰. نشان دهید شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن نگاشت خطی $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ این است که صفر ویژه‌مقداری برای آن نباشد.

۱۱. اگر $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دو پایه برای $\mathbb{R}^n$، نشان دهید $\operatorname{tr} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{tr} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$. پس $\operatorname{tr}(f)$، مستقل از انتخاب پایه، معنی دارد.

۱۲. فرض کنید C یک ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر باشد. نشان دهید پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای $\mathcal{R}^n$ وجود دارد که $M_{\epsilon}^{\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^n}) = C$؛ در اینجا ϵ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ است.

۱۳. E یک زیرفضای خطی kبعدی $\mathbb{R}^n$ و F یک زیرفضای خطی $(n-k)$بُعدیِ $\mathbb{R}^n$ است به طوری که $E \cap F = \{0\}$. نگاشت $p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (**افکنش روی** E **به موازات** F) به صورت زیر تعریف می‌شود. به ازای هر $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$، زیرفضای مستوی F' گذرنده از x و موازی و هم‌بعد F را در نظر می‌گیریم. چون $F \cap E$ یک نقطه است، $F' \cap E$ نیز یک تک‌نقطه است که آن را $p(\mathrm{x})$ می‌نامیم.

الف) نشان دهید p خطی است و پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که در آن $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)$ به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) معادلهٔ مشخصه و ویژه‌مقدارهای p را به دست آورید.

۱۴. فرض کنید λ ویژه‌مقداری برای $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است. نشان دهید $-\lambda$ ویژه‌مقداری برای $-f$ است و اگر k عددی طبیعی باشد، λ^k ویژه‌مقداری برای $f \circ \ldots \circ f$ (k بار ترکیب f با خودش) است. همچنین اگر f وارون‌پذیر باشد، نشان دهید λ^{-1} ویژه‌مقداری برای f^{-1} است (طبق تمرین ۱۰، اگر f وارون‌پذیر باشد، $\lambda \neq 0$).

۱۵. ماتریس A را **پادمتقارن** می‌نامیم در صورتی که $A^{\mathrm{T}} = -A$. با استفاده از تمرین ۱۴ نشان دهید اگر A پادمتقارن و $n \times n$ باشد که n فرد است، آنگاه $\det A = 0$.

۱۶. با ارجاع به تمرین‌های ۱۳ و ۱۴، نشان دهید نگاشت خطی $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ از نوع تمرین ۱۳، یعنی افکنش روی زیرفضایی خطی به موازات زیرفضایی دیگر، است اگر و فقط اگر $f \circ f = f$.

۱۷. فرض کنید $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی است. نشان دهید عددی طبیعی چون k وجود دارد که $f \circ \ldots \circ f$ (k بار ترکیب f با خودش) تابع ثابت صفر است اگر و فقط اگر همهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه صفر باشند.

۹۷ نگاشت‌های خطی خاص

در این بخش با بهره‌گیری از ابزار حاصل از بخش پیش دو دستهٔ خاص از نگاشت‌های خطی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یا ماتریس‌های $n \times n$ را بررسی می‌کنیم که در فصل‌های بعد کاربردهای مهمی خواهند داشت.

ماتریس‌های متقارن

ماتریس $n\times n$، $A=[a_{ij}]$، را **متقارن** می‌نامیم در صورتی که $A^{\mathrm{T}}=A$ ، یا معادل آن، $a_{ji}=a_{ij}$ (به ازای هر i و j). متقارن بودن ماتریس نگاشتی خطی $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ نسبت به پایهٔ متداول (یا، درواقع، هر پایهٔ یکامتعامد) تعبیر سودمند زیر را دارد.

۹۷ ۱ گزاره فرض کنید $\mathcal{B}$ پایهٔ یکامتعامدی برای $\mathbb{R}^n$ باشد و $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی. در این صورت، $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ متقارن است اگر و فقط اگر به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$:

$$f(\mathrm{u})\cdot\mathrm{v}=\mathrm{u}\cdot f(\mathrm{v}) \qquad (۱)$$

برهان نخست فرض کنید (۱) به ازای هر u و v برقرار باشد. قرار می‌دهیم $\mathrm{u}=\mathrm{e}_i$ و $\mathrm{v}=\mathrm{e}_j$. در نتیجه:

$$f(\mathrm{e}_i)\cdot\mathrm{e}_j=\mathrm{e}_i\cdot f(\mathrm{e}_j) \qquad (۲)$$

چون پایه یکامتعامد است، $\mathrm{e}_i\cdot f(\mathrm{e}_j)$ مؤلفهٔ iام $f(\mathrm{e}_j)$ نسبت به پایه است یعنی عنصر سطر i و ستون j. به همین ترتیب، $f(\mathrm{e}_i)\cdot\mathrm{e}_j$ مولفهٔ jام $f(\mathrm{e}_i)$ یعنی درایهٔ سطر j و ستون iئ ماتریس است، پس حکم نتیجه می‌شود.

برعکس، فرض کنید $A=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ متقارن باشد، یعنی $a_{ji}=a_{ij}$. طبق توضیح بالا، (۲) نتیجه می‌شود. حال می‌نویسیم $\mathrm{u}=\sum_{i=1}^{n}u_i\mathrm{e}_i$ و $v=\sum_{j=1}^{n}v_j\mathrm{e}_j$. پس

$$\begin{aligned}f(\mathrm{u})\cdot\mathrm{v}&=\left(f\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\mathrm{e}_i\right)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}v_j\mathrm{e}_j\right)\\&\left(\sum_{i=1}^{n}u_if(\mathrm{e}_i)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}v_j\mathrm{e}_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_iv_j\Big(f(\mathrm{e}_i)\cdot\mathrm{e}_j\Big)\end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$\mathrm{u}\cdot f(\mathrm{v})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_iv_j\Big(\mathrm{e}_i\cdot f(\mathrm{e}_j)\Big)$$

پس حکم از (۲) نتیجه می‌شود. ■

۹۷ ۲ نتیجه فرض کنید ماتریس نگاشت خطی $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ نسبت به پایهٔ یکامتعامدی متقارن باشد. اگر λ یک ویژه‌مقدار f با ویژه‌بردار u و μ یک ویژه‌مقدار دیگر، $\lambda\neq\mu$، با ویژه‌بردار v باشد، آنگاه $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}=0$. ■

برهان می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\lambda(\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}) &= (\lambda\mathrm{u})\cdot\mathrm{v}\\ &= f(\mathrm{u})\cdot\mathrm{v}\\ &= \mathrm{u}\cdot f(\mathrm{v})\\ &= \mathrm{u}\cdot(\mu\mathrm{v})\\ &= \mu(\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})\end{aligned}$$

چون $\lambda \neq \mu$، لزوماً $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v} = ۰$.

در قضیهٔ زیر مهم‌ترین حکم در مورد ماتریس‌های متقارن بیان شده است.

۳ قضیه فرض کنید ماتریس نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نسبت به پایهٔ یکامتعامدی متقارن است. دراین صورت، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ f حقیقی است و f دارای n ویژه‌راستای دو به دو بر هم عمود است.

توجه کنید که اگر n ویژه‌مقدار حقیقی متمایز برای f موجود باشد، وجود n ویژه‌راستای دو به دو متعامد از نتیجهٔ ۲ به دست می‌آید. یک نکتهٔ نهفتهٔ در این قضیه این است که حتی اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه متمایز نباشند، باز هم n ویژه‌راستای متمایز دو به دو عمود بر هم برای f موجود است. در زیر، اثبات این قضیه در حالت‌های $n = ۲$ و $n = ۳$ ارائه خواهد شد. در روش متداول اثبات در حالت کلی از جبر خطی مختلط استفاده می‌شود که در اینجا به آن نپرداختیم. اثبات سادهٔ دیگری برای این قضیه با استفاده از حساب دیفرانسیل چندمتغیره موجود است که در فصل ۱۰ خواهد آمد. نتیجهٔ مهمِ قضیهٔ بالا موارد استفادهٔ متعددی در ریاضیات و کاربردهای آن دارد که هم اینک بدان می‌پردازیم.

۴ نتیجه فرض کنید ماتریس نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نسبت به پایهٔ یکامتعامدی متقارن باشد. در این صورت، پایهٔ یکامتعامدی برای $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که ماتریس f نسبت به آن قطری است. n درایهٔ قطر اصلی این ماتریس n ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ fاند. ■

برهان طبق قضیهٔ ۳، n ویژه‌راستای دو به دو عمود بر هم برای f موجود است. بردارهای واحد $\{\mathrm{b}_۱, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ را روی این n راستا اختیار می‌کنیم. چون هر b_i ویژه‌بردار است، ویژه‌مقداری، مانند λ_i مربوط به b_i وجود دارد، که طبعاً یک ریشهٔ معادلهٔ مشخصه است. بدین‌ترتیب، به ازای عدد حقیقی λ_i داریم: $f(\mathrm{b}_i) = \lambda_i\mathrm{b}_i$. حال چون مجموعهٔ $\{\mathrm{b}_۱, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ مجموعه‌ای از عناصر ناصفر دو به دو بر هم عمود است، طبق گزارهٔ ۱۱ بخش ۳.۷ این مجموعه مستقل خطی است، بنابراین $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_۱, \ldots, \mathrm{b}_n)$ پایهٔ یکامتعامدی برای $\mathbb{R}^n$ است. ماتریس f نسبت به این پایه به شکل

$$\begin{bmatrix}\lambda_۱ & & \bigcirc\\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

است.

اکنون به اثبات قضیهٔ ۳ در حالت‌های $n = ۲$ و $n = ۳$ می‌پردازیم.

اثبات قضیهٔ ۳ در حالت $n = ۲$

فرض کنید ماتریس نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ با پایهٔ یکامتعامدی متقارن باشد. نشان می‌دهیم یکی و فقط یکی از دو وضعیت زیر برقرار است:

الف) f دارای دو ویژه‌مقدار متمایز حقیقی است و، در این صورت، f دارای دقیقاً دو ویژه‌راستاست. این دو راستا بر یکدیگر عمودند.

ب) معادلهٔ مشخصهٔ f دارای ریشهٔ مضاعف λ است که، در این صورت، $f = \lambda 1_{\mathbb{R}^۲}$ و هر زیرفضای خطی یک‌بعدیِ $\mathbb{R}^۲$ یک ویژه‌راستاست.

برای اثبات این ادعا، ماتریس متقارن f نسبت به پایهٔ یکامتعامدی را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

معادلهٔ مشخصه چنین است:

$$\lambda^۲ - (a_{۱۱} + a_{۲۲})\lambda + a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}^۲ = ۰$$

با مبیّنِ

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{۱۱} + a_{۲۲})^۲ - ۴(a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}^۲) \\ &= (a_{۱۱} - a_{۲۲})^۲ + ۴a_{۱۲}^۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

وقتی $\Delta > ۰$، دو ریشهٔ متمایز وجود دارند که ویژه‌راستاهای آن‌ها طبق نتیجهٔ ۲ بر هم عمودند. به‌علاوه طبق مثال ۲ در بخش ۸.۷، هیچ ویژه‌راستای دیگری وجود ندارد. وقتی $\Delta = ۰$، لزوماً $a_{۱۲} = ۰$ و $a_{۱۱} = a_{۲۲} = \lambda$. پس $A = \lambda I_۲$ و هر خط راست گذرنده از ۰ یک ویژه‌راستاست. هر دو خط بر هم عمود را می‌توان به صورت راستاهای پایهٔ یکامتعامد اختیار کرد.

اثبات قضیهٔ ۳ در حالت $n = ۳$

درواقع حکم کلی زیر را ثابت می‌کنیم.

۹۷ لم ۵ اگر این قضیه در حالت زوج‌بُعدیِ $n = ۲k$ برقرار باشد، قضیه برای حالت $n = ۲k + ۱$ نیز برقرار است.

برهان فرض کنید $f : \mathbb{R}^{۲k+۱} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲k+۱}$ نگاشتی خطی با ماتریس متقارن نسبت به پایهٔ یکامتعامدی باشد. معادلهٔ مشخصهٔ $\det\,(f - \lambda 1_{\mathbb{R}^{۲k+۱}}) = ۰$ معادله‌ای از درجهٔ فرد $(۲k + ۱)$ است، پس دارای دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی $\lambda_۱$ است. عضوی چون $\mathrm{u} \neq ۰$ را روی ویژه‌راستای مربوط به $\lambda_۱$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$f(\mathrm{u}) = \lambda_۱ \mathrm{u}$$

اگر H ابرصفحهٔ گذرنده از ۰ عمود بر u باشد، نشان می‌دهیم تحت اثر f، هر عضو H به عضوی

از H نگاشته می‌شود. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنید $\mathrm{v} \in H$، یعنی $\mathrm{v} \cdot \mathrm{u} = 0$. بنابر گزارهٔ ۱ همین بخش:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{v}) \cdot \mathrm{u} &= \mathrm{v} \cdot f(\mathrm{u}) \\ &= \mathrm{v} \cdot (\lambda_1 \mathrm{u}) \\ &= \lambda_1 (\mathrm{v} \cdot \mathrm{u}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس $f(\mathrm{v}) \in H$. بدین‌ترتیب، اگر دامنهٔ نگاشت خطی f را به زیرفضای خطی $2k$بُعدیِ H محدود کنیم نگاشتی خطی از H به دست می‌آید $g : H \longrightarrow H$. حال اگر H را به صورت نسخه‌ای از $\mathbb{R}^{2k}$ تصور کنیم، نگاشت خطی g از H به H، به ازای هر v و w در H، دارای ویژگی $g(\mathrm{v}) \cdot \mathrm{w} = \mathrm{v} \cdot g(\mathrm{w})$ است، پس ماتریس g نسبت به هر پایهٔ یکامتعامد در H متقارن است و بنابر برقرار بودنِ قضیهٔ ۳ در همین بخش برای فضای $2k$بُعدی همهٔ ویژه‌مقدارهای g حقیقی‌اند و $2k$ ویژه‌راستای دو به دو بر هم عمود برای g وجود دارد. این $2k$ ویژه‌راستا همراه با ویژه‌راستای ایجادشده توسط u، $(2k+1)$ ویژه‌راستای دو به دو بر هم عمود برای fاند.

بدین‌ترتیب، چون قضیه قبلاً در حالت $n = 2$ ثابت شد، صحت آن به ازای $n = 3$ نیز نتیجه می‌شود.

نگاشت‌های خطی متعامد

دستهٔ مهم دیگری از نگاشت‌های خطی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ که در آینده به کار خواهند آمد، «نگاشت‌های متعامد»ند. نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را **متعامد** می‌نامیم در صورتی که به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$،

$$f(\mathrm{u}) \cdot f(\mathrm{v}) = \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} \tag{۳}$$

از اینکه نگاشت متعامد ضرب داخلی را حفظ می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که نگاشت متعامد حافظ طول و زاویه است.

۹۷ گزاره ۶ فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت خطی متعامدی باشد. در این صورت:

الف) به ازای هر x و y در $\mathbb{R}^n$،

$$|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})| = |\mathrm{x} - \mathrm{y}| \tag{۴}$$

به‌خصوص به ازای هر $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(\mathrm{x})| = |\mathrm{x}| \tag{۵}$$

ب) به ازای هر x و y در $\mathbb{R}^n$:

$$\cos \measuredangle\big(f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y})\big) = \cos \measuredangle(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \tag{۶}$$

برهان

الف) چون f خطی است، $f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y}) = f(\mathrm{x}-\mathrm{y})$. بنابر (۳):

$$f(\mathrm{x}-\mathrm{y})\cdot f(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = (\mathrm{x}-\mathrm{y})\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})$$
$$|f(\mathrm{x}-\mathrm{y})|^{۲} = |\mathrm{x}-\mathrm{y}|^{۲}$$

و حکم با جذرگرفتن نتیجه می‌شود. (۵) با قرار دادن $\mathrm{y} = ۰$ از (۴) به دست می‌آید.

ب)

$$\cos\measuredangle\big(f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y})\big) = \frac{f(\mathrm{x})\cdot(\mathrm{y})}{|f(\mathrm{x})||f(\mathrm{y})|}$$

طبق (۳) صورت این کسر برابر $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$ است و طبق (الف) مخرج کسر برابر $|\mathrm{x}||\mathrm{y}|$. پس حکم نتیجه می‌شود.

■

درواقع، می‌توان نشان داد که اگر نگاشتی مانند $f\colon\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ حافظ طول باشد و $f(۰) = ۰$، آنگاه f لزوماً خطی و متعامد است (تمرین ۱۳ آخر بخش). در مورد (۶) توجه کنید که این حکم فقط دلالت بر حفظ کسینوس زاویه دارد؛ بنابراین، عوض شدن جهت زاویه را منع نمی‌کند. درواقع، در مثال‌هایی که بعداً خواهد آمد مواردی را خواهیم دید که نگاشت متعامد پایهٔ راستگردی را به پایهٔ چپگردی می‌نگارد.

۷ گزاره ۹ فرض کنید $f\colon\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد. شرط‌های زیر برای f معادل‌اند:

الف) f متعامد است.

ب) f حافظ طول است، یعنی به ازای هر $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$، $|f(\mathrm{x})| = |\mathrm{x}|$.

پ) به ازای هر پایهٔ یکامتعامد $(\mathrm{b}_۱,\dots,\mathrm{b}_n)$ برای $\mathbb{R}^n$، $(f(\mathrm{b}_۱),\dots,f(\mathrm{b}_n))$ نیز یک پایهٔ یکامتعامد برای $\mathbb{R}^n$ است.

ت) اگر A ماتریس f نسبت به یک $\mathrm{b}_۱$ و b_n، پایهٔ یکامتعامد باشد، A وارون‌پذیر است و $A^{-۱} = A^{\mathrm{T}}$.

برهان در رابطهٔ (۵) از گزارهٔ ۶ دیدیم که هر نگاشت متعامد حافظ طول است. این موضوع که عکس این مطلب نیز درست است از این نتیجه می‌شود که می‌توانیم حاصل ضرب داخلی را برحسب طول بنویسیم. با بسط دادن طرف راست $|\mathrm{x}+\mathrm{y}|^{۲} = (\mathrm{x}+\mathrm{y})\cdot(\mathrm{x}+\mathrm{y})$ نتیجه می‌شود:

$$|\mathrm{x}+\mathrm{y}|^{۲} = |\mathrm{x}|^{۲} + |\mathrm{y}|^{۲} + ۲\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$$

بنابراین، اتحاد زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{x}\cdot\mathrm{y} = \frac{۱}{۲}(|\mathrm{x}+\mathrm{y}|^{۲} - |\mathrm{x}|^{۲} - |\mathrm{y}|^{۲}) \qquad (۷)$$

بنابراین:

$$f(\mathrm{x})\cdot f(\mathrm{y}) = \frac{۱}{۲}\Big(|f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y})|^{۲} - |f(\mathrm{x})|^{۲} - |f(\mathrm{y})|^{۲}\Big)$$

و چون f خطی است، $f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y}) = f(\mathrm{x}+\mathrm{y})$. پس:

$$f(\mathrm{x})\cdot f(\mathrm{y}) = \frac{۱}{۲}\Big(|f(\mathrm{x}+\mathrm{y})|^{۲} - |f(\mathrm{x})|^{۲} - |f(\mathrm{y})|^{۲}\Big)$$

حال اگر f حافظ طول باشد، $|f(\mathrm{x})| = |\mathrm{x}|$، $|f(\mathrm{y})| = |\mathrm{y}|$ و $|f(\mathrm{x}+\mathrm{y})| = |\mathrm{x}+\mathrm{y}|$؛ پس طرف راست بالا برابر $\frac{۱}{۲}(|\mathrm{x}+\mathrm{y}|^{۲} - |\mathrm{x}|^{۲} - |\mathrm{y}|^{۲})$ است که این هم طبق (۷) برابر $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$ است. بدین‌ترتیب، (ب) حکم (الف) را نتیجه می‌دهد.

حال فرض کنید (الف) (یا معادل آن (ب)) برقرار باشد. اگر $(\mathrm{b}_۱,\ldots,\mathrm{b}_n)$ پایهٔ یکامتعامدی باشد، آنگاه، به ازای هر i، $|\mathrm{b}_i| = ۱$ و اگر $i \neq j$، $\mathrm{b}_i\cdot\mathrm{b}_j = ۰$. چون f ضرب داخلی و طول را حفظ می‌کند نتیجه می‌شود که، به ازای هر i، $|f(\mathrm{b}_i)| = ۱$ و، به ازای $i \neq j$، $f(\mathrm{b}_i)\cdot f(\mathrm{b}_j) = ۰$. بنابراین، $\{f(\mathrm{b}_۱),\ldots,f(\mathrm{b}_n)\}$ یک nتایی مستقل خطی و یکامتعامد است و پایهٔ یکامتعامدی برای $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهد.

حال اگر نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ پایهٔ یکامتعامدی را به پایه‌ای یکامتعامد بنگارد، نشان می‌دهیم f حافظ ضرب داخلی است، بنابراین، هر پایهٔ یکامتعامد را به پایه‌ای از این گونه می‌نگارد. فرض کنید $(\mathrm{b}_۱,\ldots,\mathrm{b}_n)$، $\big(f(\mathrm{b}_۱),\ldots,f(\mathrm{b}_n)\big)$ برای پایهٔ یکامتعامد نیز پایهٔ یکامتعامدی باشد. به ازای u و v در $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم: $\mathrm{u} = \sum_{i=۱}^n u_i\mathrm{b}_i$ و $\mathrm{v} = \sum_{j=۱}^n v_j\cdot\mathrm{b}_j$. چون f خطی است:

$$f(\mathrm{v}) = \sum_{j=۱}^{n} v_j f(\mathrm{b}_j),\ f(\mathrm{u}) = \sum_{i=۱}^{n} u_i f(\mathrm{b}_i)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{u})\cdot f(\mathrm{v}) &= \Big(\sum_{i=۱}^{n} u_i f(\mathrm{b}_i)\Big)\cdot\Big(\sum_{j=۱}^{n} v_j f(\mathrm{b}_j)\Big) \\ &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} u_i v_j\Big(f(\mathrm{b}_i)\cdot f(\mathrm{b}_j)\Big) \end{aligned}$$

چون $\big(f(\mathrm{b}_۱),\ldots,f(\mathrm{b}_n)\big)$ یکامتعامد است، داریم $f(\mathrm{b}_i)\cdot f(\mathrm{b}_j) = ۰$ اگر $i \neq j$ و $f(\mathrm{b}_i)\cdot f(\mathrm{b}_i) = ۱$. بنابراین:

$$f(\mathrm{u})\cdot f(\mathrm{v}) = \sum_{k=۱}^{n} u_k\cdot v_k = \mathrm{u}\cdot\mathrm{v}$$

بالاخره در مورد نمایش ماتریسی، فرض کنید $\mathcal{B} = (\mathrm{b}_۱,\ldots,\mathrm{b}_n)$ پایهٔ یکامتعامدی باشد و $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = A$. نشان می‌دهیم $A^{\mathrm{T}}\cdot A = I_n$ که ثابت می‌کند A وارون‌پذیر است و $A^{\mathrm{T}} = A^{-۱}$. ستون iامِ A از درایه‌های $f(\mathrm{b}_i)$ تشکیل شده است، پس سطر iامِ A^{T} که همان درایه‌های ستون

iام A را دارد نیز از درایه‌های $f(\mathrm{b}_i)$ تشکیل شده است. برای محاسبهٔ عنصر (i,j) از $A^{\mathrm{T}}A$ باید ضرب داخلی سطر iام A^{T} را با ستون jام A محاسبه کنیم. چون $(f(\mathrm{b}_۱),\dots,f(\mathrm{b}_n))$ نیز یکامتعامد است، نتیجه می‌شود که عنصر (i,j) از $A^{\mathrm{T}}A$ برابر δ_{ij} است، یعنی اگر $i=j$، برابر ۱ و اگر $i\neq j$، برابر ۰. بدین‌ترتیب، $A^{\mathrm{T}}A=I_n$. برعکس، اگر برای ماتریس یک تابع خطی f نسبت به پایهٔ یکامتعامد $(\mathrm{b}_۱,\dots,\mathrm{b}_n)$، $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)=A$، و رابطهٔ $A^{\mathrm{T}}A=I_n$ برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم که $f(\mathrm{b}_i)\cdot f(\mathrm{b}_j)=\delta_{ij}$. پس $(f(\mathrm{b}_۱),\dots,f(\mathrm{b}_n))$ پایه‌ای یکامتعامد است و (پ) از (ت) نتیجه می‌شود.

۹۷ ۸ نتیجه

اگر $f\colon \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ تابع خطی متعامدی باشد، $\det f=\pm ۱$.

برهان فرض کنید نسبت به پایهٔ یکامتعامد $\mathcal{B}$ برای $\mathbb{R}^n$، $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)=A$. چون $\det A^{\mathrm{T}}=\det A$، از $A^{\mathrm{T}}A=I_n$ نتیجه می‌شود که $(\det A)^۲=۱$، پس $\det A=\pm ۱$.

۹۷ ۹ مثال

الف) دوران حول ۰ در $\mathbb{R}^۲$ با زاویهٔ α را در نظر بگیرید که با ماتریس زیر نسبت به پایهٔ (یکامتعامد) متداول تعریف می‌شود:

$$R_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

در اینجا به‌سادگی دیده می‌شود که $R_\alpha^{\mathrm{T}}=R_\alpha^{-۱}$. پس تبدیل دوران یک نگاشت متعامد است. توجه کنید که در اینجا $\det R_\alpha=+۱$.

ب) در صفحهٔ (x,y)، تقارن نسبت به خط $y=x$ را، یعنی نگاشتی که (x,y) را به (y,x) می‌نگارد، در نظر بگیرید. این نگاشت با ماتریس زیر بیان می‌شود:

$$S=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

که $S^{\mathrm{T}}=S^{-۱}=S$ و متعامد است. در اینجا $\det S=-۱$.

پ) فرض کنید $\alpha_۱,\dots,\alpha_k$ اعداد حقیقی مفروضی باشند. نگاشت خطی $f\colon\mathbb{R}^{۲k+۱}\longrightarrow\mathbb{R}^{۲k+۱}$ را در نظر بگیرید که با ماتریس زیر نسبت به پایهٔ متداول داده شده است:

$$R=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ & & ۰\\ ۰ & \cos\alpha_۱ & -\sin\alpha_۱ & ۰ & \\ ۰ & \sin\alpha_۱ & \cos\alpha_۱ & & \\ & & ۰ & & \\ & & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k\\ ۰ & & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k\end{bmatrix}$$

توجه کنید که هر ستون، یعنی نمایش $f(\mathrm{e}_i)$ به ازای $i = ۱,\dots,۲k+۱$، به صورت عضو $\mathbb{R}^{۲k+۱}$ برداری واحد است و حاصل ضرب داخلی هر دو ستون صفر است. پس، طبق بند (پ) گزارهٔ ۷، این یک نگاشت متعامد است. عملکرد این نگاشت خطی را توصیف می‌کنیم که نمونه‌ای از یک «دوران» $\mathbb{R}^{۲k+۱}$ است. در اینجا هر نقطهٔ محور $x_۱$ ثابت می‌ماند، نقاط صفحهٔ $(x_۲, x_۳)$ به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha_۱$ حول ۰ در این صفحه دوران می‌کنند، نقاط صفحهٔ $(x_۴, x_۵)$ به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha_۲$ حول ۰ در همین صفحه گردش می‌کنند، و غیره. در $\mathbb{R}^۳$ داریم $k = ۱$ پس می‌توان این تبدیل را دوران حول محور $x_۱$ با زاویهٔ $\alpha_۱$ تلقی کرد زیرا نقطهٔ $(x_۱, x_۲, x_۳)$ به نقطهٔ $(x_۱, x_۲\cos\alpha_۱ - x_۳\sin\alpha_۱, x_۲\sin\alpha_۱ + x_۳\cos\alpha_۱)$ نگاشته می‌شود. در اینجا $\det R = ۱$. این مطلب را می‌توان مثلاً به صورت زیر مشاهده کرد. درواقع، R برابر حاصل ضرب k ماتریس $R_۱R_۲\dots R_k$ است که R_j ماتریسی است که در بلوک (۲×۲) jام روی قطر اصلی آن دوران صفحهٔ $x_{۲j}\, x_{۲j+۱}$ با زاویهٔ α_j نمایش داده شده است، دیگر درایه‌های قطر اصلی ۱ و دیگر درایه‌ها همه صفرند. حال به‌سادگی مشاهده می‌شود که $\det R_j = ۱$ پس $\det R = ۱$. ■

تا پایان این بخش همهٔ نگاشت‌های خطی متعامد در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ را مشخص می‌کنیم. قضایای هندسی چشمگیری، به‌خصوص در $\mathbb{R}^۳$، حاصل این کوشش خواهد بود.

۱۰ گزاره هر نگاشت خطی متعامد $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ به یکی از دو صورت زیر است:

الف) اگر $\det f = ۱$، f دوران حول ۰ است.

ب) اگر $\det f = -۱$، f تقارن (بازتاب) نسبت به خط راست گذرنده از ۰ است.

برهان اگر ماتریس f را نسبت به پایهٔ متداول، که یکامتعامد است، با $A = [a_{ij}]$ نمایش دهیم، هر ستون یک بردار به طول واحد است، پس:

$$a_{۱۱}^۲ + a_{۲۱}^۲ = ۱,\ a_{۱۲}^۲ + a_{۲۲}^۲ = ۱$$

بنابراین زاویه‌های α و β به نحوی وجود دارند که

$$a_{۱۱} = \cos\alpha, a_{۲۱} = \sin\alpha$$
$$a_{۱۲} = \cos\beta, a_{۲۲} = \sin\beta$$

چون دو ستون به عنوان بردار بر هم عمودند:

$$(\cos\alpha)(\cos\beta) + (\sin\alpha)(\sin\beta) = ۰$$
$$\cos(\alpha - \beta) = ۰$$
$$\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{۲}$$

پس A به یکی از دو شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \det A = ۱ \tag{۸}$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \det A = -۱ \qquad (۹)$$

مورد (۸) دوران زاویه α حول ۰ است. ماتریس (۹) را به صورت زیر می‌نویسیم:

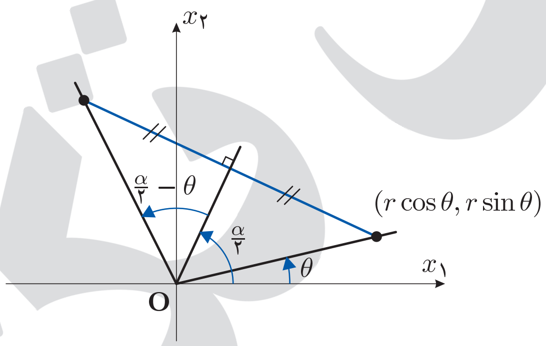
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

پس، در این حالت f ترکیب تقارن نسبت به محور x و دوران با زاویهٔ α حول ۰ است. به تعبیر دیگر، تبدیل (۹) برابر تقارن نسبت به خط راستی است که از ۰ می‌گذرد و با نیمهٔ مثبت محور x زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ می‌سازد. برای اثبات این مطلب، نقطه‌ای دلخواه در صفحه در نظر می‌گیریم و آن را به صورت $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ می‌نویسیم. با اثر دادن (۹) بر این نقطه:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha-\theta) \\ r\sin(\alpha-\theta) \end{bmatrix}$$

نقطهٔ $(r\cos(\alpha-\theta), r\sin(\alpha-\theta))$ دقیقاً قرینهٔ نقطهٔ $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ نسبت خطی است که با نیمهٔ مثبت محور x زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ می‌سازد زیرا میانگین زاویه‌های قطبی دو نقطه برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}[\theta + (\alpha - \theta)] = \frac{\alpha}{۲}$$



شکل ۲۳.۷

و دو نقطه در یک فاصله، r، از ۰ قرار دارند (شکل ۲۳.۷).

وضعیت مشابهی، با کمی اختلاف، در حالت سه‌بُعدی حکمفرماست که در زیر بدان می‌پردازیم.

۹۷ ۱۱ گزاره هر نگاشت خطی متعامد $f : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ به یکی از دو صورت زیر است:

(الف) اگر $\det f = ۱$، f دوران حول یک محورگذرنده از ۰ است.

(ب) اگر $\det f = -۱$، f ترکیب یک دوران به صورت فوق و یک تقارن (بازتاب) نسبت به صفحه‌ای گذرنده از ۰ است.

برهان معادلهٔ مشخصهٔ f از درجهٔ سه است پس حداقل یک ریشهٔ حقیقی λ دارد. برای ویژه‌بردار u مربوط به λ، $f(\mathrm{u}) = \lambda \mathrm{u}$. پس $|f(\mathrm{u})| = |\lambda||\mathrm{u}|$. ولی طبق بند (ب) گزارهٔ ۷، $|f(\mathrm{u})| = |\mathrm{u}|$. بنابراین، $|\lambda| = 1$، یا $\lambda = \pm 1$. ویژه‌راستای شامل u را با L نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم H صفحهٔ گذرنده از 0 عمود بر L است. ادعا می‌کنیم صفحهٔ H تحت اثر f به خودش نگاشته می‌شود. اگر v عضوی از H باشد، رابطهٔ $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = 0$ برقرار است، ولی f حافظ ضرب داخلی است، پس $f(\mathrm{u}) \cdot f(\mathrm{v}) = 0$. از طرف دیگر، چون $\lambda = \pm 1$، $f(\mathrm{u}) = \pm \mathrm{u}$. بنابراین، $\mathrm{u} \cdot f(\mathrm{v}) = 0$ که نشان می‌دهد $f(\mathrm{v}) \in H$. حال برای زیرفضای خطی H از $\mathbb{R}^3$، تحدید f به H که حافظ طول است نگاشت خطی متعامدی $g\colon H \longrightarrow H$ را تعریف می‌کند که دو نوع آن را در گزارهٔ قبل شناختیم. اکنون چهار حالت $\lambda = \pm 1$، $\det g = \pm 1$ را جداگانه بررسی می‌کنیم:

حالت اول ($\lambda = 1$ و $\det g = 1$). در این حالت، می‌دانیم g یک دوران صفحهٔ H حول 0 است. پایه‌ای یکامتعامد $(\mathrm{e}'_1, \mathrm{e}'_2)$ برای H در نظر می‌گیریم و بردار واحد e'_3 در راستای L را طوری اختیار می‌کنیم که سه‌تایی مرتب $(\mathrm{e}'_1, \mathrm{e}'_2, \mathrm{e}'_3)$ راستگرد باشد. اثر f روی e'_iها را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} f(\mathrm{e}'_1) = (\cos\alpha)\mathrm{e}'_1 + (\sin\alpha)\mathrm{e}'_2 + 0\mathrm{e}'_3 \\ f(\mathrm{e}'_2) = (-\sin\alpha)\mathrm{e}'_1 + (\cos\alpha)\mathrm{e}'_2 + 0\mathrm{e}'_3 \\ f(\mathrm{e}'_3) = 0\mathrm{e}'_1 + 0\mathrm{e}'_2 + 1\mathrm{e}'_3 \end{cases}$$

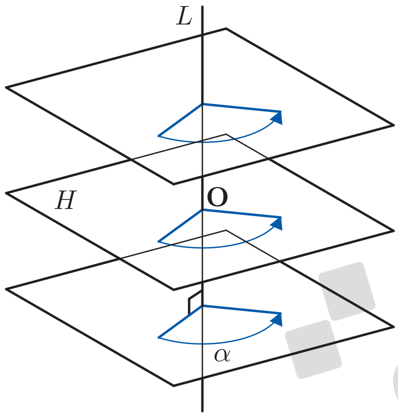
پس، ماتریس f نسبت به پایهٔ مرتب $(\mathrm{e}'_1, \mathrm{e}'_2, \mathrm{e}'_3)$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

توجه کنید که در اینجا $\det f = 1$. اکنون می‌توانیم به‌سادگی تحقیق کنیم که نگاشت f، درواقع، دوران با زاویهٔ α در $\mathbb{R}^3$ حول خط راست L است. چون f صفحهٔ H را به خودش می‌نگارد و نگاشت‌های خطی زیرفضاهای موازی را به زیرفضاهای موازی می‌نگارند، هر صفحهٔ عمود بر L به خودش نگاشته می‌شود. ادعا می‌کنیم اثر f روی هر یک از این صفحات دوران با زاویهٔ α است. اگر $P = y_1\mathrm{e}'_1 + y_2\mathrm{e}'_2 + y_3\mathrm{e}'_3$ یک نقطهٔ $\mathbb{R}^3$ باشد، با اثر دادن (۱۱) بر ستون $\langle \mathrm{y} \rangle$، $\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3)$، نتیجه می‌شود که

$$f(P) = \big((\cos\alpha)y_1 + (-\sin\alpha)y_2\big)\mathrm{e}'_1 + \big((\sin\alpha)y_1 + (\cos\alpha)y_2\big)\mathrm{e}'_2 + y_3\mathrm{e}'_3$$

اینکه مؤلفهٔ سوم همان مؤلفهٔ سوم P است تأیید این نکته است که P در صفحهٔ گذرنده از P و عمود بر L باقی می‌ماند. دو مؤلفهٔ اول که تصویر قائم روی Hاند نشان می‌دهند که صفحهٔ گذرنده از P عمود بر L تحت f به اندازهٔ α دوران می‌کند (شکل ۲۴.۷).



شکل ۲۴.۷

حالت دوم ($\lambda = ۱$ و $\det g = -۱$). همان نمادهای حالت اول را به کار می‌بریم. در اینجا اثر g روی صفحهٔ H تقارن نسبت به یک محور در صفحهٔ H است. بردار واحد $e'_۱$ را در راستای این محور و بردار واحد $e'_۲$ را نیز که بر $e'_۱$ عمود است در صفحهٔ H اختیار می‌کنیم. مانند حالت قبل، بردار واحد $e'_۳$ را در طول L طوری انتخاب می‌کنیم که سه‌تایی یکامتعامد $(e'_۱, e'_۲, e'_۳)$ راستگرد نیز باشد. بدین‌ترتیب:

$$\begin{cases} f(e'_۱) = ۱\, e'_۱ + ۰\, e'_۲ + ۰\, e'_۳ \\ f(e'_۲) = ۰\, e'_۱ - ۱\, e'_۲ + ۰\, e'_۳ \\ f(e'_۳) = ۰\, e'_۱ + ۰\, e'_۲ + ۱\, e'_۳ \end{cases}$$

بنابراین، ماتریس f نسبت به پایهٔ $(e'_۱, e'_۲, e'_۳)$ به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

در این حالت $\det f = -۱$. اگر مختصات نقاط $\mathbb{R}^۳$ نسبت به پایهٔ $(e'_۱, e'_۲, e'_۳)$ را با $(y_۱, y_۲, y_۳)$ نمایش دهیم، نقطهٔ $(y_۱, y_۲, y_۳)$ به $(y_۱, -y_۲, y_۳)$ نگاشته می‌شود. پس در این حالت، f تقارن نسبت به صفحهٔ $\langle e'_۱, e'_۳ \rangle$ است.

حالت سوم ($\lambda = -۱$ و $\det g = ۱$). در اینجا می‌توان استدلال را کاملاً مانند حالت اول به پیش برد با این تفاوت که چون $\lambda = -۱$، به جای ماتریس (۱۱)، ماتریس زیر با دترمینان -۱ حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & ۰ \\ \sin\alpha & \cos\alpha & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

این ماتریس، حاصل ضرب دو ماتریس به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & ۰ \\ \sin\alpha & \cos\alpha & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس، در این حالت، f ترکیب یک دوران حول محور L و به دنبال آن تقارن نسبت به صفحهٔ H عمود بر L است.

حالت چهارم ($\lambda = -۱$ و $\det g = -۱$). استدلالی مانند حالت دوم، ماتریس زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

اثر این تابع خطی دوران با زاویهٔ π حول محوری در صفحهٔ H است و در این حالت $\det f = ۱$.

بدین‌ترتیب، همهٔ حالات ممکن بررسی شد و گزاره به اثبات می‌رسد. ■

گزارهٔ بالا نتیجهٔ هندسی جالب توجهی دارد. در دو حالتی که نگاشت متعامد $f: \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ دارای دترمینان $+۱$ است (حالت‌های اول و چهارم بالا)، f یک دوران حول محوری گذرنده از ۰ است. برعکس، متذکر می‌شویم که هر دوران حول محوری گذرنده از ۰ در $\mathbb{R}^۳$ نگاشت خطی متعامدی با دترمینان $+۱$ است. مقصود ما از دوران حول محور در $\mathbb{R}^۳$ نگاشتی است که همهٔ نقاط یک خط راست (محور دوران) را ثابت نگاه می‌دارد و نقاط هر صفحهٔ عمود بر محور را به مقدار یکسان α حول نقطهٔ تقاطع محور و صفحه در صفحه دوران می‌دهد. اگر در صفحهٔ عمود بر محور گذرنده از ۰ دو بردار واحد بر هم عمود $e'_۱$ و $e'_۲$ اختیار کنیم و بردار واحد $e'_۳$ در راستای محور را طوری بگیریم که $(e'_۱, e'_۲, e'_۳)$ راستگرد باشد، نقطهٔ $y_۱e'_۱ + y_۲e'_۲ + y_۳e'_۳$ به نقطهٔ $(y_۱\cos\alpha - y_۲\sin\alpha)e'_۱ + (y_۱\sin\alpha + y_۲\cos\alpha)e'_۲ + y_۳e'_۳$ نگاشته می‌شود، پس f درواقع خطی است با ماتریسی به شکل (۱۱) نسبت به پایهٔ $(e'_۱, e'_۲, e'_۳)$. دترمینان این ماتریس $+۱$ است.

۹۷ ۱۲ نتیجه ترکیب هر دو دوران حول محورهای گذرنده از ۰ در $\mathbb{R}^۳$ یک دوران حول محوری گذرنده از ۰ است.

برهان ترکیب دو نگاشت خطی حافظ طول یک نگاشت خطی حافظ طول است. به‌علاوه، چون دترمینان ترکیب دو تابع خطی (متناظر با حاصل ضرب ماتریس‌ها نسبت به پایهٔ مشترک) برابر حاصل ضرب دترمینان‌هاست، اگر هر تابع خطی دترمینان $+۱$ داشته باشد، حاصل ضرب آن‌ها نیز دارای دترمینان $+۱$ است. بنابراین، با توجه به توضیحات قبل از این نتیجه حکم به اثبات می‌رسد. ■

نتیجهٔ بالا یک قضیهٔ نابدیهی هندسهٔ اقلیدسی در $\mathbb{R}^۳$ است. در اینجا بحث ما محدود به بعدهای ۲ و ۳ بود ولی به طورکلی می‌توان احکام زیر را برای نگاشت‌های خطی متعامد $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ثابت‌کرد:

الف) اگر $n = ۲k$ و $\det f = ۱$، k صفحهٔ گذرنده از ۰ و دو به دو قائم نسبت به هم در $\mathbb{R}^{۲k}$ موجودند به طوری که اثر f بر هر صفحه یک دوران در آن صفحه حول ۰ است. اثر f روی هر نقطهٔ دلخواه در $\mathbb{R}^{۲k}$ نتیجهٔ اثر f بر تصویر قائم آن نقطه روی kی صفحهٔ پیشگفته است.

ب) اگر $n = ۲k + ۱$ و $\det f = ۱$، یک خط راست گذرنده از ۰ (محور دوران) وجود دارد و k صفحهٔ عمود بر این محور و دو به دو قائم نسبت به یکدیگر که f هر نقطهٔ محور را ثابت نگاه می‌دارد و روی k صفحه مانند (الف) عمل می‌کند.

پ) اگر $\det f = -۱$، f را می‌توان به صورت ترکیب نگاشت متعامدی از نوع (الف) یا (ب) (بسته به زوج یا فرد بودن بُعد) و تقارن نسبت به یک ابرصفحه نوشت.

۹ تمرین

۱. برای توابعی خطی که نمایش ماتریسیِ داده‌شده را نسبت به پایهٔ متداول دارند ویژه‌مقدارها و ویژه‌راستاها را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$،

ب) $\begin{bmatrix} ۴۱ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۳۴ \end{bmatrix}$،

پ) $\begin{bmatrix} ۵ & -۸ & ۱۰ \\ -۸ & ۱۱ & ۲ \\ ۱۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$،

ت) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \alpha \\ ۰ & \beta & ۰ \\ \alpha & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ که α و β اعداد حقیقیِ داده‌شده‌اند.

ث) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$،

ج) $\begin{bmatrix} ۰ & & & ۱ \\ & & ۱ & \\ & \iddots & & \\ ۱ & & & ۰ \end{bmatrix}$ (ماتریس $n \times n$؛ دو حالت n فرد و n زوج را در نظر بگیرید).

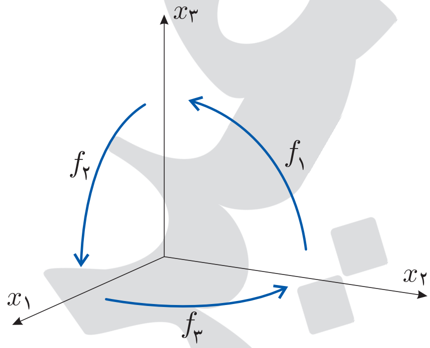
۲. تحقیق کنید که هر یک از ماتریس‌های ۳×۳ زیر متعامد است. در هر مورد که ماتریس یک دوران را نمایش می‌دهد محور دوران و زاویهٔ دوران را تعیین کنید و در هر مورد که تقارن نسبت به یک صفحه است، صفحهٔ تقارن را پیدا کنید:

الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، پ) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & -\frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$،

ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، ت) $\begin{bmatrix} -\frac{۷}{۹} & \frac{۴}{۹} & -\frac{۴}{۹} \\ \frac{۴}{۹} & -\frac{۱}{۹} & -\frac{۸}{۹} \\ \frac{۴}{۹} & \frac{۸}{۹} & \frac{۱}{۹} \end{bmatrix}$.

۳. در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$، همهٔ نگاشت‌های متعامدی را که ماتریس آن‌ها نسبت به پایهٔ متداول متقارن است مشخص کنید.

۴. در زیر، سه دوران $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$ در $\mathbb{R}^۳$ توصیف می‌شوند. ماتریس ترکیب $f_۳ \circ f_۲ \circ f_۱$ را نسبت به پایهٔ متداول بنویسید و توضیح دهید چرا یک دوران است. محور این دوران و زاویهٔ دوران را پیدا کنید. $f_۱$: دوران حول $x_۱$ که نیمهٔ مثبت محور $x_۲$ را به نیمهٔ مثبت محور $x_۳$ می‌نگارد؛ $f_۲$: دوران حول محور $x_۲$ که نیمهٔ مثبت محور $x_۳$ را به نیمهٔ مثبت محور $x_۱$ می‌نگارد؛ و $f_۳$: دوران حول محور $x_۳$ که نیمهٔ مثبت محور $x_۱$ را به نیمهٔ مثبت محور $x_۲$ می‌نگارد (شکل را در صفحهٔ بعد ببینید).



۵. یادآوری می‌کنیم که برای هر تابع خطی $\alpha\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، عضو یکتایی چون $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که در آن، به ازای هر $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$، $\alpha(\mathrm{x}) = \mathrm{a}\cdot\mathrm{x}$.

الف) فرض کنید $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد. نشان دهید نگاشت خطی یکتایی مانند $f^*\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$، $f(\mathrm{u})\cdot\mathrm{v} = \mathrm{u}\cdot f^*(\mathrm{v})$.

ب) اگر A و B به ترتیب ماتریس‌های f و f^* نسبت به پایه‌ای یکامتعامد برای $\mathbb{R}^n$ باشند، نشان دهید $B = A^{\mathrm{T}}$.

۶. فرض کنید A^1، …، A^n اعضای $\mathbb{R}^n$ باشند و P متوازی‌السطوحِ ایجادشده توسط A^1، …، A^n است. نشان دهید اگر $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی متعامد باشد، حجم nبعدیِ $f(P)$ برابر حجم nبعدیِ P است.

۷. **الف)** نشان دهید هر دوران در $\mathbb{R}^2$ حول ۰ ترکیب دو تقارن نسبت به خط‌های گذرنده از ۰ است.

ب) نشان دهید ترکیب هر تعداد زوج تقارن نسبت به خطوط گذرنده از ۰ یک دوران حول ۰ و ترکیب هر تعداد فرد یک تقارن است.

۸. **الف)** نشان دهید هر دوران حول محورگذرنده از ۰ در $\mathbb{R}^3$ ترکیب دو تقارن نسبت به صفحه‌های گذرنده از ۰ است.

ب) نشان دهید ترکیب هر تعداد زوج تقارن نسبت به صفحات گذرنده از ۰ در $\mathbb{R}^3$ یک دوران است.

۹. نگاشت خطی $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را یک **همدیسی** می‌نامیم در صورتی که f وارون‌پذیر و جهت‌نگهدار باشد (یعنی $\det f > 0$) و عددی چون $c > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$:

$$f(\mathrm{u})\cdot f(\mathrm{v}) = c(\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})$$

الف) نشان دهید هر همدیسی حافظ زاویه است یعنی به ازای هر $\mathrm{u} \neq 0$ و $\mathrm{v} \neq 0$ در $\mathbb{R}^n$:

$$\measuredangle\big(f(\mathrm{u}), f(\mathrm{v})\big) = \measuredangle(\mathrm{u}, \mathrm{v})$$

ب) نشان دهید هر همدیسی ترکیب یک نگاشت خطی متعامد و یک تجانس است. (راهنمایی: اگر f همدیسی بالا باشد، نگاشت $g = \frac{1}{\sqrt{c}}f$ را در نظر بگیرید.)

پ) نشان دهید نمایش ماتریسی هر همدیسی $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ نسبت به پایهٔ متداول به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

۱۰. نگاشت خطی $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ نسبت به پایهٔ متداول با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهید پایه‌ای یکامتعامد چون $\mathcal{B}$ برای $\mathbb{R}^4$ وجود دارد که

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱. (ادامه و تعمیم تمرین ۱۰.) فرض کنید E و E' دو زیرفضای دوبعدی قائم بر هم در $\mathbb{R}^4$ باشند و نگاشت خطی $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ به گونه‌ای باشد که اثر آن بر هر یک از E و E' یک تقارن نسبت به خطی گذرنده از ۰ در داخل آن صفحه است. نشان دهید که صفحه‌ای گذرنده از ۰، E_0، وجود دارد به طوری که تحت اثر f هر نقطهٔ E_0 ثابت می‌ماند و هر صفحهٔ قائم بر E_0 در $\mathbb{R}^4$ روی خودش به اندازهٔ π گردش می‌کند.

۱۲. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت حافظ طول است، یعنی $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ به ازای هر x و y در $\mathbb{R}^n$، و $f(۰) = ۰$. در این تمرین نشان می‌دهیم که f لزوماً خطی است، پس طبق گزارهٔ ۷ در بخش ۹ نگاشتی متعامد است.

الف) نشان دهید f حافظ ضرب داخلی است، یعنی به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$، $f(\mathrm{u}) \cdot f(\mathrm{v}) = \mathrm{u} \cdot \mathrm{v}$. (راهنمایی: داریم $|f(\mathrm{u}) - f(\mathrm{v})|^۲ = |\mathrm{u} - \mathrm{v}|^۲$، هر طرف را به صورت ضرب داخلی بنویسید و بسط دهید.)

ب) نشان دهید اگر $\mathrm{u} = \sum_{i=۱}^{n} u_i \mathrm{e}_i$، آنگاه

$$f(\mathrm{u}) = \sum_{i=۱}^{n} u_i f(\mathrm{e}_i)$$

پ) نتیجه بگیرید f خطی است.

۱۳. (با فرض حکم تمرین ۱۲.) فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت حافظ طول باشد، یعنی $|f(\mathrm{u}) - f(\mathrm{v})| = |\mathrm{u} - \mathrm{v}|$ به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$. نشان دهید انتقال یکتای T و نگاشت متعامد یکتای P وجود دارند که $f = T \circ P$. به‌خصوص نتیجه بگیرید که دوران حول هر خط راست در $\mathbb{R}^۳$ ترکیب یک دوران حول خطی گذرنده از ۰ و یک انتقال است. نشان دهید ترکیب دو دوران حول دو خط راست دلخواه در $\mathbb{R}^۳$ یا یک دوران حول محور است یا یک انتقال. در چه حالتی انتقال حادث می‌شود؟