

تمرین ۸-۱

۱. در هر مورد طول خم داده شده را محاسبه کنید

(الف) طول خم $y = x^2$ برای $0 \leq y \leq 1$

(ب) طول خم $y = x^2$ برای $0 \leq x \leq 1$

(ج) طول خم $y = \ln x$ برای $1 \leq x \leq e$

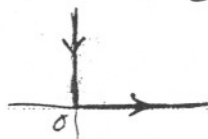
(د) (در مختصات قطبی) دایره $r = k\theta$ برای $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(ه) (در مختصات قطبی) دایره $r = 1 + \cos\theta$ برای $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(و) جغ زاده $x = a(t - \sin t)$ ، $y = a(1 - \cos t)$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ (طول قوس جغ زاده در $0 \leq t \leq 2\pi$ را بیابید)

۲. برای هر $n \geq 1$ دایره است. هر n بار مستقیم یا منتهی n (م) می‌رسد

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: لا نهال زنده که لغیر آن اقیانوس نیه‌های مثبت محورهای x و y باشد (شکل)



۳. برای هر یک از جملات زیر پاسخ صحیح طول ارائه کنید:

(الف) دایره به شعاع $R > 0$ در مرکز (x_0, y_0) پیوسته شده یک بار کامل در جهت مثبت می‌گردد.

(ب) دایره (تمرین ۸ه) پیوسته شده یک بار کامل در جهت مثبت می‌گردد.

(ج) جغ زاده (تمرین ۸و)، یک کمان کامل پیوسته شده از چپ به راست.

۴. خم پارابولی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

ثانویه این خم هموار است که دقیقاً یک بار خودش را قطع می‌کند. تصور کنید آن را رسم کنید.

۵. برای معنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $0 < b < a$ ، نسبت $\frac{c}{a}$ (c فاصله کانون از مبدأ مختصات)

را خروج از کره معنی می‌نامند. نشان دهید معنی برابر است با $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$ (۴a).

۶. خم پروانه در مختصات قطبی به صورت $r^2 = \cos 2\theta$ داده شده است. نشان دهید محیط

یک پره پروانه برابر است با $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. (سعی کنید این انتگرال را محاسبه کنید) .

۷. (برون جیغ زار) دو دایره به شعاع r و R (در نظر بگیرید ، $0 < r \leq R$) که دایره شعاع

R ثابت است و دایره شعاع r با سرعت زاویه‌ای ثابت روی دایره شعاع R می‌غلتد

فرض کنید در آغاز مرکز دایره شعاع R مبدأ مختصات است و مرکز دایره شعاع r در $(R, 0)$

قرار دارد و نقطه تماس آنها در $(R, 0)$ را P بنامید . وقتی دایره شعاع r روی دایره بزرگتر

می‌غلتد ، نقطه P مسیر را طی می‌کند که برون جیغ زار خوانده می‌شود . معادله پارابولی برای

برون جیغ زار پیدا کنید . برای $r = R$ معادله برون جیغ زار در مختصات قطبی بنویسید و شکل

آن را رسم کنید .

۸. (درین صفحه زاد) برای $0 < r < R$ ، شایه γ در این مار دایره مساحت r در درون دایره مساحت R

قرار دارد در آنجا حرکت می‌کند. در نقطه $(R-r, 0)$ است. مدار که با سرعت γ هم حاصل از حرکت

نقطه P را که درین صفحه زاد نام دارد می‌کنند. برای $r = \frac{1}{2}R$ هم حاصل از شایه می‌کنند. برای

$r = \frac{1}{4}R$ هم حاصل اختیار نام دارد. طول اختیار را از مدار حرکت تا این مار که نقطه P به

درصفت آغازین باز می‌گردد محاسبه می‌کنند. شان دهی مدار را از مدار در مختصات دکارتی به شکل

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ است و تقریباً آن را رسم کنند}$$

۹. هم $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ گره دکارت خوانده می‌شود. با قراردادن $t = \frac{y}{x}$ ، این هم را حسب

بازتر t توصیف می‌کنند. هم را در صفحه xy رسم کنند و شان دهی که نسبت به خط

$$\text{راست است } x + y + 1 = 0 \text{ جانب است}$$

۱۰. هم $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. برای نقطه درونی $t_0 \in I$ ، ثابت کنند

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} = 1$$

این مطلب، حد $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ را نتیجه می‌گیرید

۱۱. حکایات الف)، ب)، ج)، د) و (ه) گزاره ۸-۱-۷ را ثابت کنند.

۱۲. (هم ماتریسی) فرض کنید $F(t)$ یک ماتریس $m \times n$ است که به ترتیب آن $F_{ij}(t)$ نامهای t

است. در این $t \in I$ و I یک بازه ای واقع است. F یک فهم ماتریسی $n \times n$ خواهد بود. اگر

برای F تابع مشتق $F'(t)$ باشد، F را مشتق می نامیم و مشتق آن $F'(t)$ را

ماتریس می گیریم که سلف (زودنا) آن $F'(t)$ است. اگر $A(t)$ و $B(t)$ (فهم ماتریسی $n \times n$)

مشتق باشند، نشان دهیم $(A+B)'(t) = A'(t) + B'(t)$ و $(A \cdot B)'(t) = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$. اگر $A(t)$

یک فهم ماتریسی $n \times n$ مشتق و $B(t)$ یک فهم ماتریسی $n \times p$ مشتق باشد، نشان دهیم

$(A \cdot B)'(t) = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$ و $(A \cdot B)'(t) = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$.

۱۳. (استق در زمان) فرض کنیم $A(t)$ یک فهم ماتریسی $n \times n$ مشتق است که برای $t \in I$

I یک بازه، ترانسپوز است. نشان دهیم تابع $D: I \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت

$D(t) = \det(A(t))$ ترانسپوز می شود مشتق است و $D'(t) = \sum_{j=1}^n \det(D_j(t))$ که در این

$D_j(t)$ در زمان ماتریس است که ستون j ام ستون $A(t)$ و سایر ستونها آن همان

ستونهای $A(t)$ است.

۱۴. فرض کنیم $A(t)$ یک فهم ماتریسی مشتق است که برای t ، $A(t)$ دارد و $A(t)$

قرار می دهیم $\bar{A}(t) = A^{-1}(t)$. نشان دهیم $\bar{A}'(t) = -\bar{A}(t) A'(t) \bar{A}(t)$ و $(\bar{A}^{-1})'(t)$ برابر

است با $-\bar{A}'(t) A'(t) \bar{A}(t)$.

۱۴. (قضیه گریز*) E و E' در بیضی هم‌کانون هستند که E در درون ناحیه محصور است.

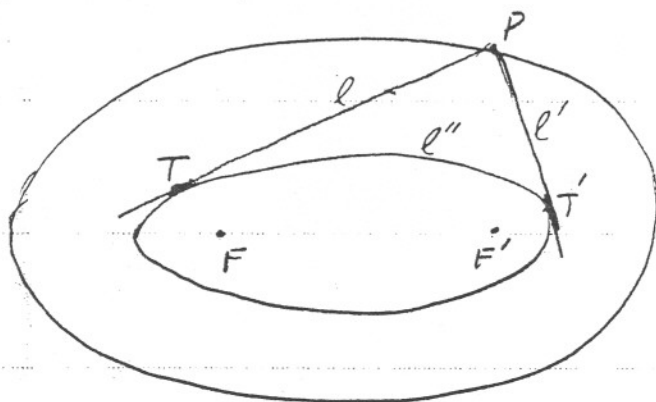
توسط E قرار دارد. از نقطه P روی E دو خط E' رسم می‌کنیم. نقاط T و T' همانیم.

طول پاره PT را به l ، طول پاره PT' را به l' و

طول کمان E' محصور بین PT و PT' را به l'' نمایش می‌دهیم (محل). ثابت

کنیم $l + l' - l''$ مستقل از P است، یعنی وقتی P روی E حرکت کند، کمیت

$l + l' - l''$ ثابت می‌ماند. (راهبانی، المان ۱۵ استفاده کنید.)



۱۵. فرض کنید α و β در R^n باشند و با ترتیب اولی و دوم به ترتیب s_1

و s_2 نمایش دهیم. اگر P_1 نقطه دلخواهی روی α و P_2 نقطه دلخواهی روی β باشد

فاصله P_1 از P_2 را به l ، ندادیم یعنی پاره خط صبرانه $\vec{P_1 P_2}$ و $(+)$ را به θ دزدادیم

سؤا ۱-۸
۹۵

بین $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ (۱) لا را به θ نمایش می دهیم ثابت کنید

$$d\ell = (\cos \theta_2) d\theta_2 - (\cos \theta_1) d\theta_1$$

تمرین ۱-۲

۱. فرض کنید I یک بازه در $\mathbb{R}$ است و $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دارای مشتق مرتبه n در I باشد.

تمرین ۱ را برای f از مرتبه n - مرتبه یک همواره در مورد مشتق f برایش کردن و اثبات آن x در نقطه $(x, f(x))$ بر حسب x

$$\text{برابر است با } \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{n}{2}}}$$

۲. عملی در صفحه نسبت به محقات قطبی به صورت $r = f(\theta)$ داده شده است که در آن f تابعی

دارای مشتق است. شق حاصل در r نسبت به θ را به r' و r'' نشان می‌دهیم. نشان

دهید که در هر نقطه که $r^2 + r'^2 \neq 0$ و r از آن هم را به صورت κ پارامتر θ و اثبات آن از دستور

زیر بدست می‌آید:

$$\kappa = \frac{r r'' - r' r'' + r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۳. برای هر یک از اجزای زیر انتخابی را محاسبه کنید. در صورت نیاز می‌توانید از نتایج تمرینهای ۱ و ۲ استفاده کنید.

(الف) منحنی $y = cx^2$

(ب) منحنی

(ج) $r = a + b \cos \theta$ که در آن $a > 0$ و $b > 0$ داده شده‌اند. نقاطی که در آن انحنا متغیر نیست، آنگاه

مشتق کنید

(د) پر دانه $r = \sqrt{2} \cos 2\theta$ برای $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$

(ه) چرخ زاد $x = a(t - \sin t)$ ، $y = a(1 - \cos t)$ ، که در آن $a > 0$ داده شده است.

(ب) نمودار $y = \cosh x$

(و) خم پارابول $x = t^2 - 1$ ، $y = t^3 - t$

۴. اثر تعریف پارامتر صفت نگار دصت برگردان را بر اتحاد یک خم هموار در بار شقیدر توصیف کنید.

۵. فرض کنید $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم هموار در بار شقیدر است و $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک نگاشت

خطی معادله $\lambda = T \circ \gamma$ را در نظر بگیرید و ارباط اتحادی λ و γ را توصیف کنید. بالاخص

اثر تقارن نسبت به σ تقارن نسبت به یک خط بر اتحادی است؟

۶. فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تجانس باضرب $m > 0$ نسبت به نقطه p در $\mathbb{R}^2$ است.

اگر $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم هموار در بار شقیدر باشد و $\lambda = T \circ \gamma$ ، رابط اتحادی λ و

اتحادی λ برای $t \in I$ چیست؟

کرن ۷ مفید

۸. فرض کنید $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم هموار در بار شقیدر است با اتحادی K . برای $t \in I$ دایره اتحادی

دایره به شعاع $\frac{1}{K(t)}$ مماس بر خم در نقطه $\gamma(t)$ است که مماس آن همبست با مماس λ است در هر آن

در است N یا $-N$. قرار گرفته است نسبت به اینکه $K(t) > 0$ یا $K(t) < 0$. در حالتی که $K = 0$ ، دایره به

یک خط است سبیل می شود در هر آن در σ است. نشان دهید محضات (X, Y)

در زیر دایره انحنای از دستور زیر بدست می آید:

$$X = x - \frac{y}{\kappa s}, \quad Y = y + \frac{x}{\kappa s}$$

اگر خم لا رص باشد پاره‌هایش سه‌بابت، با استفاده از تئرمینال‌شان دهی که:

$$X = -R\dot{y}, \quad Y = R\dot{x}$$

که در اینجا نماد نقطه روی هر حرف به معنای مشتق‌گیری نسبت به پارامتر طول قوس لا است.

۷. فرض کنید $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک قوس هموار دوبار مستقیم‌پذیر است. از نماد نقطه روی هر مشتق برای

مشتق‌گیری نسبت به پارامتر طول استفاده می‌کنیم. توجه کنید که به سبب هموار بودن قوس، در هر نقطه

است کلمه کمی از $\dot{x} \neq 0$ یا $\dot{y} \neq 0$ برقرار است. نشان دهی:

$$\kappa = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}} = - \frac{\ddot{x}}{\dot{y}}$$

بر جا که قوس هموار و صاف باشد.

۹. (نشان بده ۸) فرض کنید $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک قوس هموار دوبار مستقیم‌پذیر است. برای مشتق‌پذیری استیوین (سمت چپ)

است. بنحویه متشکل از مرکزهای دایره‌های انحنای در نقاط بصری لا ما گسترده قوس لا می‌باشد.

فرض کنید ۸ گسترده قوس لا ما به سمت راست یک قوس پارابولیک مستقیم‌پذیر استیوین (سمت چپ) می‌باشد.

(الف) نشان دهی غلظت هموار در بصری لا در نقطه $(x, y) = (4)$ لا برگسترده قوس لا در نقطه مشاط (x, y)

تمرینهای ۱۰، ۱۱ و ۱۲ براساس تمرینهای ۸ و ۹ هسته.

۱۰. الف) هم گسترده سهمی $y = \frac{1}{4}x^2$ را پیدا کنید و آن را رسم کنید.

ب) نشان دهید هم گسترده سهمی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $0 < b < a$ ، هم با مداره

$$(ax)^2 + (by)^2 = (a^2 - b^2)^2$$

است. این هم را رسم کنید.

۱۱. الف) نشان دهید هم گسترده جیغ زار (تمرین ۵۳) یک جیغ زار است که از

انتقال جیغ زار اولیه به دست می آید. (هم را در یک شکل رسم کنید).

ب) نشان دهید هم گسترده دوار $r = 1 + \cos \theta$ مشابه با آن بالای آن $\frac{1}{4}$ است. هم

را در یک شکل رسم کنید.

۱۲. معقد از گسترده یک هم داده شده α ، همی است که گسترده آن α باشد.

گسترده α برای دایره داده $x^2 + y^2 = 1$ پیدا کنید.

تمرین ۸-۲

۱. اگر γ یک انحنای دایره‌ای در $\mathbb{R}^3$ باشد، آیا γ در $\mathbb{R}^3$ صاف است؟
 ۲. فرض کنید $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم فرنی باشد. اگر γ در $\mathbb{R}^3$ صاف باشد، آیا γ یک خط مستقیم است؟
 ۳. فرض کنید $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم فرنی باشد، $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک نگاشت خطی معکوس باشد که $T = -I$ باشد. آیا γ در $\mathbb{R}^3$ صاف است؟
 ۴. فرض کنید $k \neq 0$ یک عدد حقیقی داده شده است. نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت $f(x) = kx$ تعریف می‌کنیم. اگر $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم فرنی باشد، آیا $f \circ \gamma$ نیز یک خم فرنی است و کج فرنی $f \circ \gamma$ را در نقاط مساطر قرار می‌دهد؟
 ۵. برای یک انحنای دایره‌ای γ در $\mathbb{R}^3$ ، آیا γ در $\mathbb{R}^3$ صاف است؟
- (الف) $\gamma(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ ، $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
- (ب) $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ ، $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
- (ج) $\gamma(\theta) = ((1 + 2\cos \theta)\cos \theta, (1 + 2\cos \theta)\sin \theta, \frac{2}{3}\sin^3 \theta)$ ، $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

رارسم کنی.

۶. فرض کنی تقریض فرنی $\mathbb{R}^3 \rightarrow I: \gamma$ روی یک کوه سطح R قرار دارد.
(الف) ثابت کنی تا تم لول فم رتساب بر در به داخل کوه ات به کنی. (راضی از ظاهر به
داخلی مناسب شوق بگیره.)

(ب) برای این فم تان رهیه $K \geq \frac{1}{K}$.

۷. (اندل مترین ۶) فرض کنی تقریض فرنی $\mathbb{R}^3 \rightarrow I: \gamma$ روی یک کوه سطح R قرار دارد.
(الف) اگر اختلاف فم ثابت باشد تان رهیه تا تم دم، B ، همراه بر سطح کوه است.
(ب) تان رهیه اگر B همراه بر سطح کوه است، تا صفاست.
(ج) از لاف رب، نیجه بگیره اگر اختلاف فم لا ثابت باشد تقریض لا غری از یک
داره است.

۸. فرض کنی I یک بازه در $\mathbb{R}$ است، $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دوبار مشتق پذیر
که $f(x) > 0$ برای $x \in I$ ، نمودار f را در فضای سه بعدی حول محور I
یک در حال دوران می دهیم تا یک رویه دایره پدید آید (در بخش ۳ از فصل ۴ هم صم دایره
را بر سه کردیم). رار به $x \in I$ ثابت فم لا $\alpha(t) = (x, f(x)\cos t, f(x)\sin t)$ را یک دایره رویه دایره

برای هر θ ثابت، خم $\beta(t) = (t, f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta)$ را یک لنف النهار روی $\mathbb{R}^3$ می‌نامیم.

(الف) نشان دهید برای یک خم فزنی است، اینجا دما آن را حساب کنید و کنج فزنی را

به دست آورید. نشان دهید قائم‌الزاویه مدار $(x, f(x)\cos t, f(x)\sin t)$ بر سطح روی عمود است

اگر $f'(x) = 0$ (توجه: برای θ در نقطه P از روی β در $\mathbb{R}^3$ عمود بر سطح روی)

در نظر بگیرید اگر این بردار بر β موازی باشد، در لنف النهار β را از P عمود باشد.

(ب) اینجا لنف النهار را حساب کنید. نشان دهید اینجا لنف النهار در نقطه

$(t, f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta)$ موازی است اگر $f''(t) = 0$ ، در غیر این صورت شرط فزنی بر آن

برای خم برقرار است. وقتی $f''(t) \neq 0$ دما را حساب کنید.

(ج) در هر نقطه لنف النهار که شرط فزنی برقرار باشد نشان دهید قائم‌الزاویه لنف النهار

بر سطح روی $\mathbb{R}^3$ عمود است. اگر $t \in I$ و $f'(t) = 0$ ، رابطه بین کنج ها که فزنی

مدار لنف النهار از نقطه $\beta(t, f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta)$ را استخراج کنید.