باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

تلفن: ۰۲۱ ۶۰۰ ۵۲۱۷
دورنگار: ۰۲۱ ۶۰۰ ۵۱۱۷
صندوق پستی: ۹۴۱۵-۱۱۳۶۵، تهران
پست الکترونیکی: dept@math.sharif.ac.ir
http://mathsci.sharif.ac.ir/

تاریخ: ۸۰/۱۰/۳۰ شماره:
وقت: سه ساعت

ریاضی عمومی ۱ - گروه‌های ۱ تا ۸ (اشتراکی)

امتحان نهایی

سؤال ۱ دو ابرصفحهٔ $E_1: x_1+x_2-2x_3-x_4=0$ و $E_2: 3x_1-x_2+2x_3-2x_4=0$ را در R^4 در نظر بگیرید.

(الف) یک پایهٔ متعامد برای $E_1\cap E_2$ پیدا کنید.

(ب) یک زیرفضای خطی دوبعدی F_1 از E_1 و یک زیرفضای خطی دوبعدی F_2 از E_2 پیدا کنید که هر بردار F_1 بر هر بردار F_2 عمود باشد و بالعکس. جواب خود را توجیه کنید. (راهنمایی: توجه کنید که جهت عمود بر E_1 بر جهت عمود بر E_2 عمود است.)

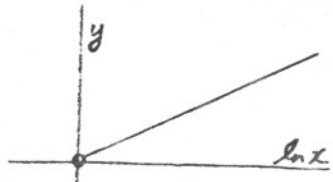
سؤال ۲ $p\ge 1$ یک عدد صحیح است و $a\neq 0$ داده شده است. برای h که $|h|$ نسبت به $|a|$ کوچک باشد تقریب زیر مرسوم است:

$$\frac{1}{a^p}-\frac{1}{(a+h)^p}\approx\frac{ph}{a^{p+1}}$$

(الف) مبنای این تقریب را توضیح دهید. (ب) فرمولی برای خطای تقریب ارائه کنید. برای $p=4$، $a=10$، و $0<h<\frac{1}{10}$، نشان دهید خطا از 10^{-7} کوچکتر است. (ج) برای $a>0$ داده شده و $|h|$ کوچک، تقریب فوق برای $h>0$ بهتر است یا برای $h<0$. توضیح دهید.

سؤال ۳ $a>1$ داده شده است. تابع $f(x)=xa^{\frac{1}{x}}$ برای $x\neq 0$ داده شده است.

(الف) مشتق‌های اول و دوم f را محاسبه کنید. (ب) رفتار تابع را وقتی $x\to 0^+$ و $x\to 0^-$ مشخص کنید. (ج) عدد b را طوری تعیین کنید که $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x-b)=0$. (د) نمودار تابع را رسم کنید.



سؤال ۴ تابع f، $y=f(x)$، به ازای $x>1$ تعریف شده است. نمودار y برحسب $\ln x$ در سمت راست نشان داده شده است که یک خط راست با ضریب زاویهٔ $\frac{1}{2}$ است. (الف) نمودار y را برحسب $\log_{10}x$، نمودار y را برحسب x، و نمودار $\ln y$ را برحسب $\ln x$ رسم کنید (توضیح مختصر دلیلتان کافی است). (ب) اگر بنویسیم $X=\ln x$ و $Y=\ln y$، رابطهٔ بین $\frac{dY}{dX}$ و $\frac{dy}{dx}$ در نقاط متناظر پیدا کنید.

سوال ۵ k یک عدد حقیقی داده شده است. دستگاه سه معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = yz \\ \dfrac{dy}{dt} = -zx \\ \dfrac{dz}{dt} = -k^2xy \end{cases}$$

(الف) نشان دهید هر یک از دو کمیت $I = x^2+y^2$ و $J = k^2x^2+z^2$ در طول جواب ثابت می‌ماند. (ب) برای $k=0$، مدارهای دستگاه را توصیف کنید. بالاخص جواب $\alpha(t)$ با شرط آغازی $\alpha(0)=(0,1,1)$ چیست؟ (ج) برای $k=1$ تحقیق کنید که جواب $\alpha(t)$ با شرط آغازی $\alpha(0)=(0,1,1)$ عبارت است از:

$$\alpha(t) = \left(\frac{\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t} \right)$$

(د) برای $0<k<1$ شکل مدارهای دستگاه را به طور هندسی تشریح کنید.

سوال ۶ فرض کنید $z=f(u,v)$ در معادله دیفرانسیل پاره‌ای $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = G(u,v)$ صدق می‌کند که در آن G تابعی داده شده است. اگر $u = e^x \cos y$ و $v = e^x \sin y$، معادله بالا را به صورت یک معادله دیفرانسیل برحسب x، y و مشتقات z نسبت به x و y درآورید.

سوال ۷ مجموعه S از نقاط (x,y,z) را در نظر بگیرید که در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x - xy^3 - e^z = 0 \\ x^4+y^4+z^4 = 1 \end{cases}$$

تحقیق کنید که $(1,0,0)$ در S است.

(الف) نشان دهید که بخشی از S که نزدیک $(1,0,0)$ است، می‌توان x و y را به عنوان تابع‌هایی مشتق‌پذیر نسبت به z نوشت. در این صورت $\dfrac{dx}{dz}$ و $\dfrac{dy}{dz}$ را در این نقطه حساب کنید. (ب) معادله خط مماس بر S در نقطه $(1,0,0)$ را به دست آورید.

سوال ۸ تابع $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x,y,z) = \dfrac{xy+z}{z^2+1}$ تعریف شده است.

(الف) کلیه نقاط بحرانی f را پیدا کنید و نوع آنها را بررسی کنید. (ب) اگر دامنه f به ناحیه $x^2+y^2+z^2 \le 1$ از $\mathbb{R}^3$ محدود شود، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع را، در صورت وجود، به دست آورید.

توزیع نمره: سوال ۱ (۱۲ نمره)، سوال ۲ (۱۳ نمره)، سوال ۳ (۱۴ نمره)، سوال ۴ (۱۲ نمره)،
سوال ۵ (۱۲ نمره)، سوال ۶ (۱۰ نمره)، سوال ۷ (۱۳ نمره)، سوال ۸ (۱۴ نمره).

جمع: ۱۰۰ نمره

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

شماره

پیوست

امتحان نهایی

ریاضی عمومی ۲ - گروه ویژه

وقت: چهار ساعت

سؤال ۱ ماتریس تابع خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ نسبت به پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^3$ متقارن است. نشان دهید ماتریس f نسبت به هر پایهٔ راست‌هنجار برای $\mathbb{R}^3$ متقارن است. آیا این حکم برای پایه‌های غیر راست‌هنجار نیز برقرار است؟ در صورتی که جواب مثبت است حکم را اثبات کنید در غیر اینصورت مثال خلاف ارائه کنید.

سؤال ۲ روی مجموعهٔ $W=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ در $\mathbb{R}^2$ تابع φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(u,v)=\varphi(x,y)=\left(\tfrac{1}{2}(x^2-y^2),\ xy\right)$$

نشان دهید φ تابعی یک به یک روی W است و تعویض مختصاتی از W به تصویر آن تحت φ تعریف می‌کند. فرض کنید $f:W\to\mathbb{R}$ تابعی دارای مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته است و قرار دهید $g(u,v)=f(\varphi^{-1}(u,v))$. رابطهٔ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$ را به رابطه‌ای در مورد g و مشتقات آن نسبت به u و v تبدیل کنید.

سؤال ۳ سطح بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ای P روی این سطح بیضی‌گون در ثُمن اول (یعنی ناحیهٔ $x>0$ ، $y>0$ ، $z>0$) پیدا کنید که حجم هرم پدید آمده از ثمن اول بین صفحهٔ مماس بر بیضی‌گون در P و سه صفحهٔ مختصاتی حداقل ممکن باشد.

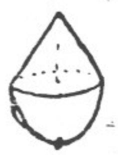
سؤال ۴ $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتقات پاره‌ای پیوسته است و $M=\{(x,y)\mid g(x,y)=c\}$ یک خم تراز منظم (یعنی فاقد نقاط بحرانی) g است. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ نیز مشتق‌پذیر با مشتقات پاره‌ای پیوسته است. در فضای سه‌بعدی (x,y,z) روی M استوانه‌ای قائم بنا کنید و اشتراک آن با نمودار f را A بنامید. نشان دهید برای هر نقطهٔ p روی A، قطعه‌ای از A حول p وجود دارد که بتوان این قطعه را به صورت خم منظم نسبت به x یا y پارامتریزه کرد.

سؤال ۵ انتگرال زیر برحسب مختصات استوانه‌ای داده شده است. این انتگرال را به صورت انتگرال (یا مجموع انتگرال‌هایی) به شکل $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ بنویسید. عبارت $f(x,y,z)$ و نیز حدود انتگرال (یا انتگرال‌ها) را بدست آورید:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}}^{+\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}} r^3\,dz\,dr\,d\theta$$

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی



سوال ۶ فرفره‌ای مانند شکل مرکب از یک نیمکره توپر به شعاع R در پایین و یک مخروط با ارتفاع R در بالا طوری روی زمین قرار گرفته است که نقطه تماس آن قطب نیمکره می‌باشد. اگر این فرفره از ماده‌ای با چگالی یکنواخت ساخته شده باشد، فاصله مرکز جرم آن را از زمین محاسبه کنید.

سوال ۷ نشان دهید حجم n-بعدی حجره زیر برابر است با $\frac{1}{n!}$:

$$\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1\ge 0,\dots,x_n\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i\le 1\}$$

سوال ۸ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ یک تابع با مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته است و S یک مجموعه باز منتظم (یعنی مانند نقاط داخلی) آن که یک خم بسته ساده در صفحه است. نشان دهید نقطه‌ای p در درون خم S وجود دارد که در آن

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\neq 0$$

سوال ۹ میدان برداری $\vec{F}$ در $\mathbb{R}^3$ به صورت $\vec{F}(x,y,z)=(-2yz,\ x^2-y^2,\ xy-z)$ داده شده است. رویه M عبارت است از بخشی از نمودار $z=xy$ که بالای مربع $0\le x\le 1$ ، $0\le y\le 1$ قرار دارد. برای ∂M یعنی مرز M، جهتی اختیار کنید. (الف) $\int_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ را مستقیماً به عنوان یک انتگرال روی خم محاسبه کنید. (ب) همین انتگرال را با استفاده از قضیه استوکس محاسبه کنید.

سوال ۱۰ n یک عدد صحیح مثبت داده شده است. نشان دهید دیورژانس میدان زیر صفر است ولی این میدان برابر curl هیچ میدانی نیست:

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n})^{\frac{3}{2n}}},\ \frac{y}{(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n})^{\frac{3}{2n}}},\ \frac{z}{(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n})^{\frac{3}{2n}}}\right)$$

(قلمرو $\vec{F}$: $\mathbb{R}^3$ منهای مبدأ)

توزیع نمره: سوال ۱ : ۱۰ نمره، سوال ۲ : ۸ نمره، سوال ۳ : ۷ نمره، سوال ۴ : ۵ نمره، سوال ۵ : ۲۰ نمره، سوال ۶ : ۲۰ نمره، سوال ۷ : ۱۲ نمره، سوال ۸ : ۱۵ نمره، سوال ۹ : ۲۵ نمره، سوال ۱۰ : ۱۸ نمره. جمع کل : ۱۴۰ نمره

برای تقسیم وقت خود، به توزیع نمره در بالا توجه کنید

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده علوم ریاضی

تاریخ: ۸۱/۴/۴

امتحان پایان ترم ـ ریاضی عمومی ۲ (گروههای ۲۰−۱۱)

وقت: ۳ ساعت

۱) مطلوب است محاسبه $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$ که R ناحیه محصور بین $y=0$ و $xy=4$ و $x^2-y^2=1$ و $x^2-y^2=9$ است. (۲ نمره)

۲) حجم قسمتی از داخل استوانه $x^2+y^2=2x$ که درون کره $x^2+y^2+z^2=4$ قرار دارد را بیابید.(۲ نمره)

۳) کار میدان برداری $F(x,y)=(2x^2(2x^3-y^3+1),\,2y^2(x^3+2y^3-1))$ را روی ربع دایره $x^2+y^2=1, x>0, y>0$ حساب کنید.(راهنمایی : از قضیه گرین استفاده کنید.)(۲ نمره)

۴) میدان $F(x,y)=\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{y-x}{x^2+y^2}\right)$ روی $D=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ مفروض است.

الف) اگر C خمی ساده و بسته حول مبدأ باشد که از مبدأ نمی‌گذرد ، مقدار $\oint_C F.dr$ را بیابید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟(۱/۵ نمره)

ب) اگر C خمی هموار داخل D از نقطه $(1,-1)$ به $(-1,-1)$ باشد، کلیه مقادیر $\int_C F.dr$ را بیابید.(۲ نمره)

۵) میدان برداری $F(x,y,z)=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ روی دامنه $U=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ مفروض است.

الف) نشان دهید $divF=0$ ولی میدان G روی U موجود نمی‌باشد که $curlG=F$.(۱/۵ نمره)

ب) اگر S رویه‌ای هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد که از مبدأ نمی‌گذرد، شار برونسو از S را بیابید.(۲ نمره)

۶) کره $x^2+y^2+z^2=6$ و سهموی $z=x^2+y^2$ را در نظر می‌گیریم. سهموی از کره قطعه‌ای را جدا می‌کند که آنرا S_1 می‌نامیم و قسمتی از سهموی که داخل کره قرار می‌گیرد را S_2 می‌نامیم.

الف) حجم محصور بین S_1 و S_2 و مساحت رویه‌های S_1 و S_2 را پیدا کنید.(۲/۵ نمره)

ب) مقدار $\iint xdydz+ydzdx-2zdxdy$ را روی رویه‌های S_1 و S_2 حساب کنید.(۱/۵ نمره)

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۲

۰۱۶–۲۲ (گروه‌های ۱ تا ۱۲)

نیمسال دوم ۸۴–۸۳

مدّت امتحان: ۳ ساعت

سه‌شنبه ۸۴/۳/۲۴

سؤال ۱. در بین مکعب مستطیل‌هایی که اضلاع آنها موازی محورهای مختصات است و نیز در بیضی‌گون به معادلهٔ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}} = ۱$ محاط هستند، طول اضلاع مکعب مستطیلی که بیشترین حجم را دارد محاسبه کنید.

سؤال ۲. فرض کنید A ناحیه‌ای باشد که بین خطوط $y = x$، $y = ۱ - x$، $y = ۲ - x$، و منحنی $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ محصور است. انتگرال $\int\int_A \frac{e^{x^{۲}}}{e^{y^{۲}}}\, dxdy$ را محاسبه کنید.

سؤال ۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته و C خمی ساده، بسته، و قطعه به قطعه هموار در $\mathbb{R}^{۲} \setminus \{(۰, ۰)\}$ باشد. انتگرال $\int_C f(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}})x\, dx + f(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}})y\, dy$ را محاسبه کنید.

سؤال ۴. فرض کنید میدان برداری $F : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}^{۳}$ به صورت $F(x, y, z) = y^{۲} \cos xz\, \vec{i} + x^{۳} e^{yz}\, \vec{j} - e^{-xyz}\, \vec{k}$ تعریف شده است. همچنین فرض کنید S قسمتی از بیضی‌گون به معادلهٔ $\frac{x^{۲}}{۲۰} + \frac{y^{۲}}{۲۰} + \frac{(z-۴)^{۲}}{۴۰} = ۱$ باشد که بالای صفحهٔ xy قرار دارد و جهتِ قائمِ یکه بر آن رو به خارج است. انتگرال $\int\int_S \mathrm{curl}F \,.\, dS$ را محاسبه کنید.

سؤال ۵. فرض کنید میدان برداری $F : \mathbb{R}^{۳} \setminus \{(۰, ۰, ۰)\} \to \mathbb{R}^{۳}$ به صورت $F(X) = \frac{X}{|X|^{۳}}$ تعریف شده است. همچنین فرض کنید S رویه به معادلهٔ $|x| + |y| + |z| = ۱$ باشد که جهتِ قائمِ یکه بر آن رو به خارج است. انتگرال $\int\int_S F \,.\, dS$ را محاسبه کنید.

توزیع نمره: هر سؤال ۴ نمره دارد.

مجموع: ۲۰ نمره.

تاریخ ۸۴/۳/۲۴

شماره ....

پیوست ....

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

سؤال ۱: فرض کنید یکی از مکعب مستطیل های محاط در بیضی گون داده شده را انتخاب کنیم. رأسی از مکعب انتخاب شده را که تمام مؤلفه هایش مثبت است، (x,y,z) می نامیم. بنابر تقارن طول اضلاع این مکعب مستطیل برابر با $2x$، $2y$ و $2z$ می شود و لذا حجم آن برابر با $8xyz$. پس مدل سازی مسأله به این صورت است که می خواهیم $x>0$، $y>0$ و $z>0$ را طوری پیدا کنیم که تابع $f(x,y,z)=8xyz$ با قید $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ماکزیمم شود. در اینجا شرایط قضیهٔ ضرایب لاگرانژ برقرار است و لذا اگر (x,y,z) کاندیدی باشد که ماکزیمم f با قید داده شده را به دست دهد، بایستی به ازای $\lambda\in\mathbb{R}$ ای داشته باشیم $(8yz,8xz,8xy)=\lambda\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$ یا $4yz=\lambda\frac{x}{a^2}$، $4xz=\lambda\frac{y}{b^2}$، $4xy=\lambda\frac{z}{c^2}$، که همراه با قید $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ جواب $x=\frac{a}{\sqrt3}$، $y=\frac{b}{\sqrt3}$ و $z=\frac{c}{\sqrt3}$ را به دست می دهد که f را ماکزیمم می کند. پس مکعب با اضلاع $\frac{2a}{\sqrt3}$، $\frac{2b}{\sqrt3}$ و $\frac{2c}{\sqrt3}$ بیشترین حجم را بین مکعب های داده شده دارد. □

سؤال ۲: فرض کنید درون A را با A° نمایش دهیم. تابع $g:A^\circ\to\mathbb{R}^2$ را به صورت $(u,v)=g(x,y)=(x+y,x-y)$ تعریف کنید. در این صورت g، A° را به درون $B=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 1\le u\le 2,\ 0\le v\le\frac1u\}$ که آنرا با B° نمایش می دهیم می نگارد. توجه می کنیم که B° باز و کراندار است و $g^{-1}:B^\circ\to\mathbb{R}^2$ تابعی یک به یک و از ردهٔ C^1. از طرفی برای هر $(u,v)\in B^\circ$، $g^{-1}(u,v):=(x,y)$، بنابر قضیهٔ تابع وارون داریم:

$$\det Dg^{-1}(u,v)=\frac{1}{\det Dg(x,y)}=\frac{1}{\det\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}}=\frac{-1}{2}\neq0.$$

چون $g^{-1}(B^\circ)=A^\circ$ و نیز مرز A° و B° با اندازهٔ صفر است لذا بنابر قضیهٔ تغییر متغیر می توانیم بنویسیم:

$$\text{انتگرال مطلوب}=\iint_{A^\circ}e^{(x+y)(x-y)}\,dx\,dy=\frac12\iint_{B^\circ}e^{uv}\,du\,dv=\frac12\iint_{B}e^{uv}\,du\,dv$$

$$=\frac12\int_1^2\left(\int_0^{\frac1u}e^{uv}\,dv\right)du=\frac{e-1}{2}\int_1^2\frac1u\,du=\frac12(e-1)\ln 2.$$ □

سؤال ۳: توجه می کنیم که برای هر $(x,y)\neq(0,0)$ از $\mathbb{R}^2$،

$$\frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})\,y}{\partial x}=\frac{xy\,f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})\,x}{\partial y}.$$

در نتیجه اگر C مبدأ را در بر نداشته باشد، حاصل انتگرال مطلوب بنابر قضیهٔ گرین برابر با صفر است. پس فرض می کنیم C مبدأ را در بر دارد و جهت آنرا نیز خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت در نظر می گیریم. C_1 را دایره ای به مرکز مبدأ و مثلاً به شعاع r در نظر می گیریم طوری که داخل C باشد و هم جهت با C. در این صورت بنابر صورت تعمیم یافتهٔ قضیهٔ گرین داریم

$$\text{انتگرال مطلوب}=\int_{C_1}f(\sqrt{x^2+y^2})\,x\,dx+f(\sqrt{x^2+y^2})\,y\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\big(f(r)(r\cos\theta)(-r\sin\theta)+f(r)(r\sin\theta)(r\cos\theta)\big)\,d\theta=0.$$

در نتیجه حاصل انتگرال مطلوب، مستقل از اینکه C مبدأ را در بر داشته باشد یا نداشته باشد و مستقل از جهت آن برابر با صفر است. □

سؤال ۴: بیضی گون داده شده صفحهٔ xy را در دایرهٔ C به معادلهٔ $x^2+y^2=12$ و $z=0$ قطع می کند، که اگر جهت آنرا خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت در نظر بگیریم دارای پارامتری به صورت $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$، $\gamma(t)=(\sqrt{12}\cos t,\sqrt{12}\sin t,0)$ است. اکنون بنابر قضیهٔ استوکس داریم:

$$\text{انتگرال مطلوب}=\int_C F\cdot d\gamma=\int_0^{2\pi}\langle F(\gamma(t))\mid\gamma'(t)\rangle\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\langle(12\sin^2t,\,12\sqrt{12}\cos^3t,\,-1)\mid(-\sqrt{12}\sin t,\,\sqrt{12}\cos t,\,0)\rangle\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}(-12\sqrt{12}\sin^3t+144\cos^4t)\,dt=108\pi.$$ □

سؤال ۵: S_1 را کره ای به مرکز مبدأ و مثلاً به شعاع r در نظر بگیرید با جهت قائم یکه بر آن رو به خارج است، و S_1 درون S قرار می گیرد. اگر A ناحیهٔ بین S و S_1 باشد، بنابر قضیهٔ دیورژانس و با توجه به اینکه $\operatorname{div}F=0$ می توانیم بنویسیم:

$$\iint_S F\cdot dS-\iint_{S_1}F\cdot dS=\iiint_A \operatorname{div}F\,dV=0$$

در نتیجه داریم:

$$\text{انتگرال مطلوب}=\iint_{S_1}F\cdot dS=\iint_{S_1}\left\langle\frac{X}{r^3}\,\Big|\,\frac{X}{r}\right\rangle dS=\frac{1}{r^4}\iint_{S_1}\langle X|X\rangle\,dS$$

$$=\frac{r^2}{r^4}\iint_{S_1}dS=\frac{1}{r^2}(4\pi r^2)=4\pi.$$ □

پایان ترم ریاضی عمومی ۲ ---- گروه‌های فرهادی ---- تعداد سوال: ۸
وقت: ۳ ساعت ---------- تاریخ: ۱۳۸۴/۳/۲۴

---

۱) [۵ نمره] نشان دهید که میدان برداری

$$F = \frac{۲x}{z}\,\mathbf{i} + \frac{۲y}{z}\,\mathbf{j} - \frac{x^۲ + y^۲}{z^۲}\,\mathbf{k}$$

تعریف شده برای $z \neq ۰$، کنسرواتیو است. سپس تابع حقیقی f را بیابید که $\nabla f = F$. جواب حدسی قابل قبول نیست.

---

۲) [۵ نمره] مطلوب است شار $\int\int F \cdot n\, dS$ بطرف بالا برای میدان $F = ۲x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ بر سطحی که توسط

$$\mathbf{r} = \langle u^۲ v,\, uv^۲,\, v^۳ \rangle, \qquad (۰ \leq u \leq ۱,\ ۰ \leq v \leq ۱)$$

پارامتری شده باشد.

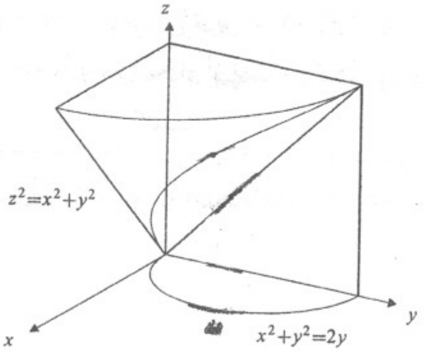
---

۳) [۵ نمره] مطلوب است محاسبه

$$\int_۰^۲ \int_۰^{\sqrt{۱-(x-۱)^۲}} \frac{x+y}{x^۲+y^۲}\, dy\, dx$$

---

۴) [۵ نمره] مطلوب است مساحت آن قسمت از استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲y$ که در بیرون از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ واقع است.



۵) [۸ نمره] ناحیه مشخص شده با دو رابطه

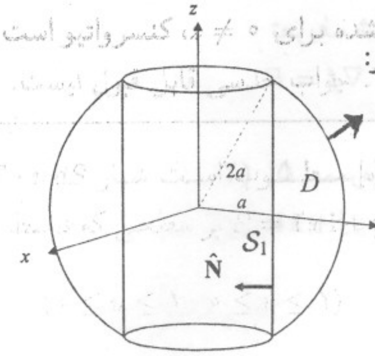
$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + z^۲ & \leq & ۴a^۲ \\ x^۲ + y^۲ & \geq & a^۲ \end{cases}$$

را با D نشان دهید. آن تکه از سطح که روی سیلندر $x^۲ + y^۲ = a^۲$ واقع است را $S_۱$ و کل سطح را S می‌نامیم. برای میدان

$$F = \langle x + yz \, , \, y - xz \, , \, z - e^x \sin y \rangle$$

مطلوب است شار بطرف بیرون از D بر روی هر یک از دو سطح زیر:

الف) بر روی سطح $S_۱$، ب) بر روی سطح S.



توجه: S سطح کل ناحیه D است و
$S_۱$ آن قسمتی است که روی استوانه قرار دارد.

---

٦) [٦ نمره] فرض کنید C خم حاصل از تقاطع استوانه $(x-۱)^۲ + ۴y^۲ = ۱۶$ و صفحه $۲x + y + z = ۳$ باشد. این خم را بگونه‌ای پارامتری کنید که تصویر آن روی صفحه xy در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند. حال برای $F = \langle z^۲ + y^۲ + \sin(x^۲) \, , \, ۲xy + z \, , \, xz + ۲yz \rangle$ مطلوب است $\int_C F \cdot dr$

---

۷) [۵ نمره] فرض کنید که بر تمامی قرص $x^۲ + y^۲ < ۱$ داشته باشیم $\nabla f(x,y) = ۰$. ثابت کنید که بر سراسر قرص داریم $f(x,y) = C$.

---

۸) [۵ نمره] تابع $f(x,y,z) = x^۲y + yz + z^۲$ را در نظر بگیرید. یک مورچه بر روی صفحه $x + y + z = ۱$ در جهت بیشترین نرخ افزایش در f در حال حرکت است. جهت حرکت مورچه را وقتی که او از نقطه $(۱, -۱, ۱)$ می‌گذرد تعیین کنید.

وزن امتحانات: میان ترم اول: ۲۰ ٪، میان ترم دوم: ۲۵٪، پایان ترم: ۵۵٪

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف- دانشکده علوم ریاضی — تاریخ: ۸۳/۲/۱۷

امتحان میان ترم دوم ـ ریاضی عمومی ۲ — وقت: ۳ ساعت

(فقط برای گروههای دکتر تابش، دکتر رنجبر و دکتر محمودیان)

- بارم: مسأله ۳: ۱۰ نمره، بقیه مسائل هر کدام ۸ نمره، جمع نمرات ۵۰ نمره

۱) فرض کنید $\begin{cases} x = e^s \cos t \\ y = e^s \sin t \end{cases}$. اگر z تابعی از x و y (با مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته) باشد، نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2)(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$$

۲) تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = (2x^3 - 3x^2)(e^{-y} + e^{-y^2}) + e^{-y^2}$ داده شده است. تمام نقاطی را که در آنها f به ماکسیمم یا مینیمم موضعی می‌رسد بیابید و مشخص کنید که کدام یک از آنها ماکسیمم یا مینیمم مطلق است.

۳) الف) انتگرال مقابل را محاسبه کنید: $I = \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dydx$

ب) با فرض $0 < a < b$ و $0 < c < d$، مساحت ناحیه زیر را محاسبه کنید:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ a \leq \frac{x^3}{y^2} \leq b \quad , \quad c \leq \frac{y^3}{x^2} \leq d\}$$

۴) نشان دهید دستگاه زیر هر یک از متغیرهای x و y و z را به عنوان تابعی از متغیرهای s و t در نزدیکی نقطهٔ P به مختصات $(s,t,x,y,z) = (1,1,1,1,1)$ تعیین می‌کند و مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}\Big|_{(s,t)=(1,1)}$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} xyz + sx + ty = 3 \\ xy^2 - sz - t^2 = -1 \\ x^3 z + 2y - st = 2 \end{cases}$$

ادامه سؤالات در پشت صفحه

۵) تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته مفروض است. اگر برای هر (x, y) با شرط $x^2 + y^2 = 2$ داشته باشیم $f(x, y) = 0$ ، نشان دهید

$$\int\int_D f_{12}(x, y)dA = 0$$

که در آن $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1 \ , \ -1 \leq y \leq 1\}$.

۶) فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$، n عدد حقیقی باشند. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ ثابت کنید:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2)}$$