

فصل ۷

۱.۷ فضای حقیقی n -بعدی

ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسی «عدد» و «قضا» بنا شده است. علوم حساب و جبر از عدد نشأت می‌گیرند و هندسه، به مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضا است. بسیاری اوقات می‌توان دو رویکرد متمایز ریاضی، یکی جبری - عددی، و دیگری هندسی، یک پدیده معین داشت. در رویکرد جبری یک چارچوب نمادین ارائه می‌شود که اغلب برای حل مسائل دیگری نیز قابل استفاده است و گاهی نیز منجر به فراهم ساختن یک الگوریتم یا دستورالعمل زنجیره‌ای برای حل مسئله مورد نظر می‌شود. در رویکرد هندسی، که به نظر می‌آید ریشه در نیروی باصره انسان دارد، سعی بر این است که جمیع روابط موجود بین اجزاء پدیده مورد بررسی یکجا جمع گردند، خصوصیات برجسته شناسایی شوند، و حل مسئله از روی این مشاهدات «دیده شود». به ذکر دو مثال ابتدایی می‌پردازیم:

مثال ۱.۱.۷ می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع شوند یک مجذور

کامل است. درواقع:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

یک روش جبری-عددی برای اثبات این ادعا، استقراست. حکم به‌ازای $n = 1$ صحیح است. فرض می‌کنیم (۱) به‌ازای n برقرار باشد و نشان می‌دهیم به‌ازای $(n + 1)$ نیز برقرار است:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

و حکم به‌اثبات می‌رسد.

رویکرد هندسی به همین حکم در شکل ۱ بدون توضیح لفظی دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به‌صورت لایه‌هایی متوالیاً از گوشه چپ افزوده می‌شوند و همواره یک مربع پدید می‌آید.

شکل ۱-۷

■

مثال ۲.۱.۷ می‌خواهیم در مورد تعداد جوابهای حقیقی دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases} \quad (1)$$

نخست مساله را از دیدگاه جبری مطالعه می‌کنیم. با جایگزینی از معادله اول در معادله

دوم نتیجه می‌شود که $x^2 + y^2 = 1$. با نوشتن

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$1 = 9 - 2xy$$

نتیجه می‌شود که $xy = 4$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 4 \end{cases}$$

نتیجه اینکه x و y باید ریشه‌های معادله درجه دوم $t^2 - 3t + 4 = 0$ باشند. ولی برای

این معادله $\Delta < 0$ ، و ریشه حقیقی وجود ندارد.

حال همین مساله را از طریق هندسی بررسی می‌کنیم. دستگاه (۱) را می‌توان به

صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \quad (2)$$

رابطه اول معادله یک خط راست است که محورهای x و y را در نقاط $(3, 0)$ و $(0, 3)$

قطع می‌کند. رابطه دوم معادله یک دایره به مرکز $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ و شعاع $\frac{3}{2}$ است. پس

جواب این دستگاه متناظر با یک نقطه تلاقی خط و دایره داده شده است. اگر فاصله مرکز

دایره یعنی $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ از خط داده شده، بزرگتر از شعاع دایره یعنی $\frac{3}{2}$ باشد، هیچ

نقطه تلاقی وجود ندارد. فاصله مرکز از خط $x + y = 3$ به سادگی محاسبه می‌شود و برابر

$2\sqrt{2}$ است. با توجه به اینکه $\frac{3}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$ ، نتیجه می‌گیریم که (۲)، و معادل آن (۱)، جواب ندارد. (شکل ۲).

شکل ۲-۷

توجه کنید که هر چند در راه حل هندسی نیز محاسبات جبری صورت گرفت، لیکن انتخاب این عملیات خاص از دانش هندسی ما درباره خط راست و دایره نشأت می‌گرفت. برای اشکال نامأنوس، تحلیل جبری اجتناب‌ناپذیر است ولی هر جا که بتوان از دید هندسی استفاده کرد، معمولاً بینش یا تعبیر روشنگری در مورد مسأله حاصل می‌شود.

نکته مهم دیگر در مورد مسأله بالا اینکه، تعداد متغیرهای مسأله در آن ۲ است که بررسی هندسی آن را در صفحه xy ممکن می‌سازد. برای مسائل سه متغیری نیز می‌توان از تجسم هندسی بهره جست. اما در بسیاری مسائل ریاضی و کاربردی، تعداد متغیرهای مربوط بیش از ۳ است که ظاهراً مانعی چاره‌ناپذیر در برابر ارائه دیدگاه هندسی است زیرا انسان به عنوان موجود سه‌بعدی هیچ‌گونه ادراک مستقیمی از ابعاد بالاتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما در این فصل فراهم آوردن نوعی هندسه n بعدی است که در آن n به اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان یک زبان ریاضی مناسب برای تعمیم شهود هندسی به ابعاد بالاتر از ۲ و ۳ تلقی کرد که همانند نیروی باصره در سوق دادن تفکر ریاضی به یافتن روش مناسب برای حل مسائل کارساز است. در اینجا هیچ‌گونه ادعایی مبنی بر «وجود» فیزیکی فضای n بعدی مطرح نیست، بلکه یک نظام دقیق ریاضی مطرح خواهد شد که بستر مناسبی برای نوعی تجسم و شهود، هر چند مجازی و نمادین، در ابعاد

بالاتر از ۳ است.



راهنمای ما برای ساختن فضای n بعدی، ارتباط جبر و هندسه در هندسه تحلیلی است. دیده‌ایم که اولین ارتباط جبر و هندسه از نسبت دادن یک عدد به پاره خط‌ها آغاز می‌شود، یعنی نسبت طول پاره خط به طول پاره خطی که به عنوان واحد انتخاب شده است. بدین ترتیب تناظری یک به یک میان نقاط یک خط راست با مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، ایجاد می‌شود. در هندسه تحلیلی، نقاط یک صفحه با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^2$ ، و نقاط فضا با سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^3$ ، مدرج می‌شوند. تا اینجا جبر و هندسه مستقل از یکدیگر در ذهن ما وجود دارند و هندسه تحلیلی یک پل ارتباطی بین آن دو است. به ازای $n \geq 4$ ، n تایی‌های مرتب اعداد حقیقی معنی دارند ولی هندسه‌ای فراتر از فضای عادی سه بعدی نمی‌شناسیم. با الهام گرفتن از ارتباط فوق به ازای $n \leq 3$ ، مفاهیم هندسی را برای $\mathbb{R}^n$ ، یعنی مجموعه n تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب، نوعی هندسه در $\mathbb{R}^n$ بنا می‌شود.

با این مقدمه، $\mathbb{R}^n$ ، مجموعه n تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی اشیاء ریاضی $x_i \in \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n)$ را در نظر می‌گیریم و هر چنین x را یک نقطه $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم. نخست یک عمل جمع در $\mathbb{R}^n$ مشابه جمع بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌کنیم. برای $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad (3)$$

(۱.۱.۷) خواص جمع

(۱.۱.۱.۷) خاصیت تعویض پذیری (جابجایی): $x + y = y + x$.

(۲.۱.۱.۷) خاصیت شرکت‌پذیری: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(۳.۱.۱.۷) عنصر بی‌اثر: n تایی $(\circ, \dots, \circ) = \underline{\circ}$ (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x + \underline{\circ} = \underline{\circ} + x = x$$

(۴.۱.۱.۷) عنصر قرینه: برای n تایی داده شده $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، n تایی « $-x$ » که

به صورت $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ تعریف می‌شود (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x + (-x) = (-x) + x = \underline{\circ}$$

خواص فوق همه به سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند.

تعریف جمع n تایی‌ها و خواص بالا عیناً از حالت دوبعدی و سه‌بعدی برگرفته شده‌اند.

اگر به نقاط $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$ در $\mathbb{R}^3$ ، بردارهای ساطع از $\circ$ به این نقاط را منسوب کنیم، $x + y$ مفهوم مجموع برداری معمول را دارد یعنی رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی که سه رأس دیگر آن نقاط $\circ$ ، x و y هستند.

شکل ۳-۷

برای بردارها در صفحه و فضای سه‌بعدی، حاصل ضرب یک عدد حقیقی در بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ نیز تعریف کرد. برای نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ و عدد حقیقی $x \in \mathbb{R}$ ، نقطه rx به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$rx = (rx_1, \dots, rx_n) \quad (۴)$$

یعنی همه مؤلفه‌های x در r ضرب می‌شوند. تعبیر این عمل در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم. اگر بردار واصل از o را در نظر بگیریم، rx برداری در همان راستاست که اگر r مثبت باشد همجهت با x و اگر r منفی باشد در جهت مخالف است.

شکل ۴-۷

خواص ابتدایی زیر در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع برقرار است. همه این احکام نتیجهٔ سراسر تعریف هستند:

(۲.۱.۷) خواص ضرب در اعداد

(۱.۲.۱.۷) به ازای هر نقطه x ، $1x = x$.

(۲.۲.۱.۷) اگر s, r اعدادی حقیقی باشند و x یک نقطه، $(rs)x = r(sx)$.

(۳.۲.۱.۷) اگر s, r اعدادی حقیقی باشند و x یک نقطه، $(r + s)x = (rx) + (sx)$.

(۴.۲.۱.۷) اگر r عددی حقیقی باشد و x, y دو نقطه، $r(x + y) = (rx) + (ry)$.

با این تعاریف، اکنون آماده هستیم بعضی مفاهیم هندسه را در $\mathbb{R}^n$ پیاده کنیم. ساده‌ترین مفهوم هندسی پس از نقطه، «خط راست» است. برای تعریف خط راست در هندسهٔ تحلیلی دوبعدی و سه‌بعدی راه‌های گوناگون هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوان صرفاً با مفاهیم جمع نقاط و ضرب آنها در یک عدد حقیقی آن را بیان کرد. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ در نظر گرفت.

فرض کنید a و A دو نقطه در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشند به طوری که $A \neq a$. حال a را به صورت یک نقطه و A را به صورت یک بردار (سایط از مبدأ) تصور کنید. چون $A \neq a$ ،

فرض شده است مضارب حقیقی A یک راستا تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از a می‌گذرد و موازی این راستا است. شرط لازم و کافی برای اینکه یک نقطه روی این خط باشد این است که بتوان آن را به صورت $a + tA$ ، به‌ازای عدد حقیقی مناسب t ، نوشت (شکل ۵).

شکل ۵-۷

در توصیف نقاط این خط به شکل $a + tA$ ، فقط دو عمل ذکر شده، ضرب در عدد حقیقی و جمع، به‌کار رفته است پس می‌توان آن را مبنای تعریف خط راست در $\mathbb{R}^n$ قرار داد.

تعریف ۳.۱.۷ فرض کنید $a, A \in \mathbb{R}^n$ ، $A \neq 0$ ، داده شده باشند. در این صورت، مجموعه زیر یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ خوانده می‌شود:

$$a + \langle A \rangle = \{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

$a + \langle A \rangle$ را با توجه به مقدمه بالا اصطلاحاً خط راست گذرنده از a به موازات A نیز می‌نامیم هر چند که هنوز مفهوم «موازی» تعریف نشده است. بدین ترتیب هر نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ از مجموعه بالا باید به شکل زیر باشد:

$$x = a + tA$$

$$(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + t(A_1, \dots, A_n)$$

$$= (a_1 + tA_1, \dots, a_n + tA_n)$$

پس برای a و A داده شده، خط راست $a + \langle A \rangle$ متشکل از نقاط $x = (x_1, \dots, x_n)$

به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tA_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \quad (۶)$$

که در اینجا t همه مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (۶) را نمایش پارامتری خط راست $a + \langle A \rangle$ نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به مفهوم تعریف شده، همان‌طور که انتظار می‌رود، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطه $a + \langle A \rangle$ ، به شکل $a + tA$ ، یعنی متناظر با t است، و این t منحصر به فرد است زیرا اگر $a + t'A = a + tA$ ، با جمع کردن « $-a$ » با دو طرف نتیجه می‌شود که $tA = t'A$ و $(t - t')A = 0$. حال چون $A \neq 0$ فرض شده است، لزوماً $t - t' = 0$ یا $t = t'$.

مثال (محورهای مختصات). n تایی‌های $e_1, \dots, e_n$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

بدین ترتیب e_i آن n تایی است که مؤلفه i ام آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. حال

$$0 + \langle A \rangle = \{(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) | t \in \mathbb{R}\}$$

یک خط راست است که محور مختصاتی i ام یا محور x_i خوانده می‌شود. تعداد محورهای

مختصات در $\mathbb{R}^n$ برابر n است.

اگر $l = a + \langle A \rangle$ یک خط راست باشد، خط راست $0 + \langle A \rangle$ را انتقال

یافته l به مبدا می‌نامیم و با نمادهای $\langle A \rangle$ یا l^0 نیز نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب

$$l^0 = \langle A \rangle = 0 + \langle A \rangle = \{tA | t \in \mathbb{R}\}$$

گزاره ۴.۱.۷ اگر l یک خط راست باشد و $P, Q \in l$ ، آنگاه $Q - P \in l^\circ$. به عکس اگر $R \in l^\circ$ ، نقاط

$$P \text{ و } Q \text{ روی } l \text{ وجود دارند که } R = Q - P.$$

برهان. نخست، اگر $l = a + \langle A \rangle$ و $P, Q \in l$ ، به ازای اعداد حقیقی مناسب s و t

داریم

$$P = a + sA$$

$$Q = a + tA$$

پس $Q - P = (t - s)A \in l^\circ$. به عکس، فرض کنید $R = rA$ که r یک عدد حقیقی

است. در این صورت با قرار دادن $P = a$ و $Q = a + rA$ داریم $R = Q - P$. ■

گزاره ۵.۱.۷ اگر $l = a + \langle A \rangle$ یک خط راست باشد، $b \in l$ و $B \in l^\circ$ ، آنگاه

$$b + \langle B \rangle = a + \langle A \rangle$$

برهان. طبق فرض در مورد B و b ، $B = t \circ A$ به ازای عدد حقیقی مناسب $t \circ \neq 0$ ، و

$b = a + t \setminus A$ به ازای عدد حقیقی مناسب $t \setminus$. پس اگر $b + sB$ نقطه دلخواهی روی خط

$\langle b, B \rangle$ باشد

$$b + sB = (a + t \setminus A) + s(t \circ A)$$

$$= a + (t \setminus + st \circ)A$$

بنابراین، $b + sB \in l$ و چون این یک نقطه دلخواه خط $b + \langle B \rangle$ بود،

$b + \langle B \rangle \subset a + \langle A \rangle$. به عکس، اگر $a + tA$ نقطه دلخواهی از l باشد، می خواهیم

$a + tA$ را به صورت $a + (t \setminus + st \circ)A = b + sB$ بنویسیم. برای این کار، معادله

$tA = st_1 + t_0$ را نسبت به s حل می‌کنیم که چون $t_0 \neq 0$ ، امکان‌پذیر است، پس

$$a+ < A > \subset b+ < B > \quad \blacksquare$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

دو گزاره بالا نمونه‌هایی از احکامی هستند که در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ با اتکاء به شهود بصری

طبیعی به‌نظر می‌رسند ولی چون در $\mathbb{R}^n$ دلخواه، فعلاً مبنای شهودی برای این باورها

نداریم. باید آنها را ثابت کنیم. گزاره زیر را که بیان‌کننده یکی از اساسی‌ترین برداشت‌های ما

از خط راست در فضای عادی است در $\mathbb{R}^n$ به اثبات می‌رسانیم.

گزاره ۶.۱.۷ اگر P و Q دو نقطه متمایز در $\mathbb{R}^n$ باشند، یک و تنها یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که

شامل P و Q است.

برهان. قرار دهید $R = Q - P$. چون P و Q متمایز فرض شده‌اند، $R \neq 0$. در این صورت

خط راست $P + < R >$ متشکل از نقاط به شکل $P + t(Q - P)$ ، $t \in \mathbb{R}$ ، شامل P و

Q است زیرا به‌ازای $t = 0$ نقطه P و به‌ازای $t = 1$ نقطه Q به‌دست می‌آید. حال فرض کنید

$l_1 = a+ < A >$ و $l_2 = b+ < B >$ دو خط راست شامل P و Q باشند. طبق گزاره

۴.۱.۷، $R \in l_1^\circ$ و $R \in l_2^\circ$. بنابراین طبق گزاره ۵.۱.۷، $P + < R > = Q + < A >$ و

$P + < R > = b+ < B >$ ، پس $P + < R > = a+ < A >$ و یگانگی خط راست

شامل P و Q به اثبات می‌رسد. ■

دو خط راست l_1 ، l_2 را موازی می‌نامیم در صورتی که نقطه مشترک نداشته باشند و

انتقال یافته آنها به مبدأ یکی باشد، $l_1^\circ = l_2^\circ$. بنابراین هر خط l که از 0 نگذرد، موازی l°

است. توازی دو خط l_1 و l_2 را به $l_1 \parallel l_2$ نمایش می‌دهیم.

نمایش دیگری برای خطوط راست، نمایش متقارن است که به صورت زیر به‌دست

می‌آید. اگر هر یک از روابط (۶) را نسبت به t حل کرده نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل

می‌شود:

$$\frac{x_1 - a_1}{A_1} = \frac{x_2 - a_2}{A_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{A_n}. \quad (۷)$$

از آنجا که فرض شده است $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ، همه A_i ها نمی‌توانند صفر باشند. صفر بودن بعضی A_i ها در (۷) به منزله تقسیم بر صفر نیست، بلکه اگر به (۶) نگاه کنیم می‌بینیم که $A_i = 0$ به معنی این است که x_i ثابت و همواره برابر a_i است. مثال. فرض کنید $A_1 \neq 0$ و $A_2 = \dots = A_n = 0$. در این صورت

$$\mathbf{A} = (A_1, 0, \dots, 0)$$

یعنی $\mathbf{A}$ متعلق به محور x_1 است. نتیجه اینکه خط راست $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$ یا موازی محور x_1 است یا خود آن است. به همین ترتیب اگر $A_j \neq 0$ و سایر A_j ها صفر باشند، خط $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$ موازی محور x_j یا منطبق بر آن خواهد بود.

شاید ابتدایی‌ترین مفهوم هندسه پس از «نقطه» و «خط راست»، مفهوم «صفحه» یا «سطح تخت» باشد. در اینجا می‌خواهیم برداشت خود از صفحه در فضای سه‌بعدی را به صفحه در $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهیم. برای این کار روشی مشابه به آنچه برای تعریف خط (راست) در $\mathbb{R}^n$ به‌کار بردیم در پیش می‌گیریم. فرض کنید A, B دو n تایی ناهمراستا باشند یعنی هیچ‌یک مضرب حقیقی دیگری نباشد. نخست مجموعه نقاط به شکل $sA + tB$ را در نظر می‌گیریم. تصور شهودی ما از این مجموعه، صفحه گذرنده از مبدأ و شامل نقاط A و B است. توجه کنید که به‌ازای $s = t = 0$ ، مبدأ به‌دست می‌آید، به‌ازای $s = 1, t = 0$ ، نقطه A و به‌ازای $s = 0, t = 1$ ، نقطه B . حال اگر نقطه‌ای چون a در نظر بگیریم و همه نقاط این مجموعه را به اندازه a انتقال دهیم «صفحه گذرنده از a به موازات A و B » حاصل

شکل ۶-۷

می شود (شکل ۶).

بدین ترتیب تعریف می کنیم

$$a + \langle A, B \rangle = \{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad (۸)$$

این مجموعه را صفحه گذرنده از a به موازات A و B می نامیم.

مثال ۷.۱.۷ (صفحات مختصاتی). در بین $\{1, \dots, n\}$ به تعداد $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ زوج اندیس

 $\{i, j\}$ ، $i \neq j$ وجود دارد. به ازای هر چنین مجموعه

$$\{se_i + te_j \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

یک صفحه مختصاتی در $\mathbb{R}^n$ است.

اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد، $E = a + \langle A, B \rangle$ ، E° یا انتقال یافته E به

مبدأ را به صورت

$$E^\circ = 0 + \langle A, B \rangle$$

تعریف می کنیم. اغلب به جای $0 + \langle A, B \rangle$ می نویسیم $\langle A, B \rangle$. اگر E_1 و E_2

هر یک خط یا صفحه باشد، E_1 و E_2 را موازی می نامیم و می نویسیم $E_1 \parallel E_2$ به شرط

اینکه اشتراک E_1 و E_2 تهی باشد و به علاوه

$$E_2 \subset E_1 \text{ یا } E_1 \subset E_2$$

مثال ۸.۱.۷ اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد و $E \neq \emptyset$. نشان می‌دهیم $E^\circ \parallel E$. باید نشان دهیم E° و E

نقطه مشترک ندارند. فرض کنید $E = a + \langle A, B \rangle$ ، پس $E^\circ = \langle A, B \rangle$. اگر نقطه

مشترکی وجود داشته باشد، مثلاً P ، آنگاه $P = a + s_1 A + t_1 B$ به ازای s_1 و t_1 مناسب،

و نیز $P = s_2 A + t_2 B$ به ازای s_2 و t_2 مناسب؛ پس $a + s_1 A + t_1 B = s_2 A + t_2 B$

یا

$$a = (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B \quad (9)$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\underline{0} = (s_1 - s_2)A + (t_2 - t_1)B + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B$$

$$= a + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B$$

یعنی $0 \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۹.۱.۷ اگر $E = a + \langle A, B \rangle$ یک صفحه باشد، $b \notin E$ ، و $L = b + \langle B \rangle$ ، آنگاه خط L با

صفحه E موازی است زیرا اولاً $E^\circ = \langle A, B \rangle \subset \langle A, B \rangle = L^\circ$ ، و ثانیاً نشان می‌دهیم L

و E نقطه مشترک ندارند. فرض کنید P یک نقطه مشترک باشد، پس $P = b + tB$ و نیز

$$P = a + s_1 A + t_1 B$$

$$b + tB = a + s_1 A + t_1 B$$

$$b = a + s_1 A + (t_1 - t)B$$

یعنی $b \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۱۰.۱.۷ در $\mathbb{R}^3$ ، اگر دو صفحه نقطه مشترک نداشته باشند، لزوماً موازی‌اند. این وضعیت در $\mathbb{R}^n$

به ازای $n \geq 4$ ، لزوماً برقرار نیست، یعنی دو صفحه فاقد نقطه مشترک ممکن است موازی نباشند! این مشابه وضعیت دو خط راست در $\mathbb{R}^3$ است که ممکن است نقطه مشترک نداشته باشند ولی موازی نیز نباشند. مثال زیر را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید:

$$E_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad E_2 = \langle e_4 + \langle e_1, e_3 \rangle \rangle$$

E_1 متشکل از نقاط به شکل $(s, t, \circ, \circ)$ است و E_2 متشکل از نقاط به صورت $(s', \circ, t', 1)$. بدیهی است که E_1 و E_2 نقطه مشترک ندارند زیرا که مؤلفه چهارم هر عنصر E_1 صفر است و مؤلفه چهارم هر عنصر E_2 برابر ۱ می باشد. حال اگر E_1 و E_2 را به مبدأ منتقل کنیم، داریم

$$E_1^\circ = E_1 = \{(s, t, \circ, \circ) | s, t \in \mathbb{R}\}, \quad E_2^\circ = \{(s', \circ, t', \circ) | s', t' \in \mathbb{R}\}$$

که نه E_1° زیرمجموعه E_2° است و نه به عکس، پس E_1 و E_2 در تعریف توازی صدق نمی کنند. دو صفحه در $\mathbb{R}^n$ ، $n \geq 4$ ، را که نه نقطه مشترک داشته باشند و نه موازی باشند، دو صفحه متنافر می نامیم. ■

در اینجا می توان گزاره هایی مشابه گزاره های (۴.۱.۷)، (۵.۱.۷)، و (۶.۱.۷) را در مورد صفحه ثابت کرد. احکام مشابه به صورت زیر هستند:

گزاره ۱۱.۱.۷ اگر E یک صفحه باشد، $P, Q \in E$ ، آنگاه $Q - P \in E^\circ$. به عکس، اگر $R \in E^\circ$ ،

نقاط P و Q در E یافت می شوند که $R = Q - P$.

گزاره ۱۲.۱.۷ اگر $E = a + \langle A, B \rangle$ یک صفحه باشد، $b \in E$ و C و D دو عنصر ناهمراستای E° باشند، آنگاه

$$b + \langle C, D \rangle = a + \langle A, B \rangle$$

گزاره ۱۳.۱.۷ فرض کنید P, Q ، و R سه نقطه متمایز در $\mathbb{R}^n$ هستند که روی یک خط قرار ندارند. در

این صورت یک و تنها یک صفحه E در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل هر سه نقطه است.

اثبات این سه گزاره را به عنوان تمرین‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ آخر بخش به خواننده واگذار

کرده‌ایم. گزاره‌های کلی‌تری را در بخش ۲.۷ بررسی خواهیم کرد. با اتکا به برداشت شهودی

که از مفاهیم خط راست و صفحه داریم، حکم زیر را در فضای عادی $\mathbb{R}^3$ بدیهی تلقی

می‌کنیم ولی در $\mathbb{R}^n$ این حکم باید با استفاده از با تعاریف دقیقی که از خط و صفحه داریم

ثابت شود:

گزاره ۱۴.۱.۷ اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد و P و Q دو نقطه متمایز در E باشند، آنگاه خط گذرنده از

P و Q به تمامی در E قرار دارد.

برهان. فرض کنید $E = \{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. پس به‌ازای اعداد حقیقی مناسب

s_1, t_1, s_2, t_2 می‌توان نوشت:

$$P = a + s_1 A + t_1 B, \quad Q = a + s_2 A + t_2 B$$

چون P و Q متمایز هستند، خط راست منحصر به فردی چون l از P و Q می‌گذرد،

$R = Q - P \in l^\circ$ ، و هر نقطه S روی l را می‌توان به صورت $S = P + tR$ نوشت که

$t \in \mathbb{R}$ بنابراین

$$S = (a + s_1 A + t_1 B) + t \left((s_2 - s_1) A + (t_2 - t_1) B \right)$$

$$= a + (s_1 + ts_2 - ts_1) A + (t_1 + tt_2 - tt_1) B$$

پس S به E تعلق دارد.

تمرین ۱.۷

۱. برای هر یک از دو حکم زیر یک اثبات هندسی ارائه کنید:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \quad (\text{الف})$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (\text{ب})$$

۲. در مورد تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر به صورت جبری و به صورت هندسی

بحث کنید:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

۳. نشان دهید دستگاه معادلات زیر، بسته به مقدار پارامتر ثابت P ، یا بینهایت جواب

(x, y, z) دارد، یا یک جواب و یا هیچ جواب:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = p \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

۴. وضعیت نسبی (تقاطع، تنافر، توازی یا انطباق) زوج‌های زیر از خط‌های راست را

تعیین کنید:

$$\text{الف) در } \mathbb{R}^3: \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ و } \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$$

$$\text{ب) در } \mathbb{R}^4: \frac{x_1-2}{6} = \frac{x_2-3}{4} = \frac{x_3+1}{2} = \frac{x_4}{-2}$$

$$\frac{x_1-5}{3} = \frac{x_2-5}{2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4+1}{-1}$$

$$\text{ج) در } \mathbb{R}^4: \frac{x_1}{-2} = \frac{x_2+1}{0} = \frac{x_3-1}{1} = \frac{x_4}{-2}$$

$$\frac{x_1 + 2}{6} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 - 1}{-1} = \frac{x_4 - 2}{2}$$

۵. وضعیت نسبی (تقاطع، تنافر، توازی یا انطباق) زوج‌های زیر از صفحه‌ها را تعیین کنید:

الف) در $\mathbb{R}^4$: $\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle$ و $\langle e_2 - e_4, e_1, e_3 \rangle$ و $(0, 1, -1, 2)$

ب) در $\mathbb{R}^4$: $\langle e_1 + e_2 - e_3, e_4 \rangle$ و $(-1, 1, 2, 1)$

$(0, 1, 2, -1)$ و $\langle e_1 + e_2, e_3 + e_4 \rangle$

ج) در $\mathbb{R}^4$: $\langle e_1 + e_3, e_2 + e_3 - e_4 \rangle$ و $(1, 1, -1, 2)$

$\langle 2e_1 - e_2 + e_3 + e_4, e_3 + e_4 \rangle$

د) در $\mathbb{R}^5$: $\langle -e_1 + e_2, e_3 - 2e_4 + 3e_5 \rangle$ و $(1, 1, 1, -1, 1)$

$(0, 1, 0, -1, 2)$ و $\langle e_1 + 3e_2 - e_4, e_3 + e_5 \rangle$

۶. در هر مورد تعیین کنید خط و صفحه داده شده موازی هستند یا نیستند:

الف) در $\mathbb{R}^4$: خط راست $\langle e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 \rangle$ و صفحه $(1, 0, 2, -1)$

$\langle 2e_1 + e_2, e_3 - e_4 \rangle$

ب) در $\mathbb{R}^5$: خط راست $\langle (-1, 0, 1, -1) \rangle$ و صفحه

$(2, 3, 0, -1, -1)$ و $\langle e_1 + 2e_2 - e_3, e_2 - e_4 + e_5 \rangle$

۷. الف) نشان دهید هر صفحه موازی با صفحه $\langle e_1 - e_2, e_3 + e_4 \rangle$ در $\mathbb{R}^4$ یا با صفحه

$\langle e_1, e_2 \rangle$ متنافر است یا آن را در یک خط راست قطع می‌کند.

ب) نشان دهید هر صفحه موازی با $\langle e_1 + 2e_3, e_2 - e_4 \rangle$ در $\mathbb{R}^4$ صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ را

در یک نقطه قطع می‌کند.

۸. دو خط راست زیر را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3 + 1}{-1}, \quad \frac{x_1 + 1}{A} = \frac{x_2 + 2}{B} = \frac{x_3}{C}$$

الف) آیا می‌توان (A, B, C) را طوری تعیین کرد که دو خط فوق منطبق بر هم باشند؟

ب) نشان دهید مجموعه انتخاب‌های (A, B, C) که به‌ازای آن دو خط فوق موازی‌اند یک خط راست گذرنده از $(0, 0, 0)$ در فضای سه‌بعدی (A, B, C) تشکیل می‌دهند که از آن $(0, 0, 0)$ حذف شده است.

ج) برای چه انتخاب‌هایی از (A, B, C) دو خط فوق متقاطع‌اند؟ نشان دهید مجموعه این انتخاب‌ها یک صفحه گذرنده از $(0, 0, 0)$ در فضای سه‌بعدی (A, B, C) تشکیل می‌دهند که از آن $(0, 0, 0)$ حذف شده است.

۹. دو خط زیر را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید:

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3}{-1}, \quad \frac{x_1 - a}{0} = \frac{x_2 - b}{2} = \frac{x_3 - c}{1}$$

نشان دهید مجموعه مقادیری از (a, b, c) که به‌ازای آنها دو خط اشتراک ناتهی دارند یک صفحه در فضای سه‌بعدی (a, b, c) تشکیل می‌دهند.

۱۰. گزاره ۷.۱.۷ را ثابت کنید.

۱۱. گزاره ۸.۱.۷ را ثابت کنید.

۱۲. گزاره ۹.۱.۷ را ثابت کنید.

۱۳. اگر L یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ باشد و P یک نقطه خارج از L ، نشان دهید یک و تنها یک خط راست L' گذرنده از P وجود دارد که موازی L است.

۱۴. در $\mathbb{R}^4$ ، خط راست $\langle e_3 \rangle$ و صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ یکدیگر را در تک نقطه $^\circ$ قطع می‌کنند.

الف) نشان دهید خطوط موازی $\langle e_3 \rangle$ در $\mathbb{R}^4$ وجود دارند که با صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ اشتراک تهی دارند.

ب) صفحه‌های $\langle e_3, e_4 \rangle$ و $\langle e_1, e_2 \rangle$ در $\mathbb{R}^4$ یکدیگر را در تک نقطه $^\circ$ قطع می‌کنند. آیا صفحه‌ای موازی $\langle e_3, e_4 \rangle$ در $\mathbb{R}^4$ وجود دارد که با صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ اشتراک تهی داشته باشد؟

ج) صفحات $\langle e_3, e_4 \rangle$ و $\langle e_1, e_2 \rangle$ را به عنوان صفحاتی در $\mathbb{R}^5$ در نظر بگیرید. آیا صفحه‌ای موازی $\langle e_3, e_4 \rangle$ در $\mathbb{R}^5$ وجود دارد که با صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ اشتراک تهی داشته باشد؟

۲.۷ زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$

در بخش ۱.۷ مفهومی از نقطه، خط و صفحه در $\mathbb{R}^n$ را بررسی کردیم. هر n تایی $a = (a_1, \dots, a_n)$ یک نقطه $\mathbb{R}^n$ نامیده شد. با این فرض که n تایی A ، $^\circ = (^\circ, \dots, ^\circ)$ نباشد، مجموعه نقاطی را که می‌توان به صورت $a + tA$ نوشت، $t \in \mathbb{R}$ ، یک خط راست خواندیم، و با این شرط که A و B دو n تایی باشند که هیچ یک مضربی حقیقی از دیگری نباشد (به بیان دیگر، $^\circ$ ، A و B روی یک امتداد نباشند)، مجموعه نقاط به شکل $a + sA + tB$ که s و t اعداد حقیقی دلخواه‌اند، یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ نامیدیم. بدین ترتیب «نقطه» یک تک‌عضوی $\mathbb{R}^n$ است، «خط» با مجموعه اعداد حقیقی در تناظر است و «صفحه» با زوجهای مرتب اعداد حقیقی در تناظر می‌باشد. اصطلاح‌های «زیرفضای مستوی صفر بُعدی»، «زیرفضای مستوی یک بُعدی»، و «زیرفضای مستوی دو بُعدی» نیز، به ترتیب برای نقطه، خط، و صفحه به کار می‌روند. در این بخش «زیرفضای مستوی» و «بُعد» به طور دقیق تعریف خواهند شد، ولی مقدماً و به طور شهودی، کلمه مستوی برای زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$

به کار می رود که مسطح و دارای امتداد نامحدود باشد و «بعد» تعداد متغیرهای حقیقی پیوسته لازم برای توصیف همه نقاط مجموعه است. در توصیف خط و صفحه، به ترتیب یک متغیر t و دو متغیر (s, t) برای مدرج کردن نقاط لازم بود، از این رو خط بُعدی، و صفحه، دوبعدی، تلقی می شود. هدف ما در این بخش ارائه تعریفی کلی برای یک زیرفضای مستوی k بُعدی از $\mathbb{R}^n$ و بررسی خواص آن است که در اینجا k و n اعداد صحیح نامنفی هستند و $k \leq n$. زیرمجموعه نا تهی E از $\mathbb{R}^n$ را یک زیرفضای مستوی می نامیم در صورتی که هرگاه P و Q دو نقطه متمایز E باشند، خط راست گذرنده از P و Q به تمامی در E باشد. به این ترتیب هر تک عنصری یا نقطه $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای مستوی است زیرا شامل دو نقطه متمایز نیست (که خط گذرنده از آن دو، تماماً در مجموعه نباشد). هر خط راست l یک زیرفضای مستوی است زیرا اگر P و Q دو نقطه متمایز l باشند، بنا بر گزاره ۶.۱.۷، l خط راست شامل P و Q است و $l \subset E$. اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد و P و Q دو نقطه متمایز E ، طبق گزاره ۱۰.۱.۷، خط گذرنده از P و Q به تمامی در E قرار دارد. البته خود $\mathbb{R}^n$ زیرمجموعه مستوی $\mathbb{R}^n$ است. در این بخش همه زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$ را به صورتی مشخص خواهیم کرد. به این منظور ساده تر خواهد بود که نخست نوع خاصی از زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$ را بررسی کنیم. یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ را زیرفضای خطی می نامیم چنانچه ° عنصری از آن باشد. بدین ترتیب یک تک نقطه ای $\{x\}$ در صورتی زیرفضای خطی است که ° $x = 0$. یک خط راست یا یک صفحه در صورتی زیرفضای خطی هستند که از ° بگذرند. زیرفضاهای خطی $\mathbb{R}^n$ را می توان با یک ویژگی جبری ساده مشخص کرد:

گزاره ۱۰.۲.۷ زیرمجموعه نا تهی E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است اگر و تنها اگر واجد دو شرط زیر باشد:

الف) هرگاه $x \in E$ و $r \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $rx \in E$.

(ب) هرگاه $x, y \in E$ ، آنگاه $x + y \in E$.

برهان. برای (الف)، اگر $x = 0$ آنگاه به‌ازای هر $r \in \mathbb{R}$ ، $rx = 0$ ، پس $rx \in E$. اگر $x \neq 0$ و x دو نقطه متمایزند و خط گذرنده از این دو نقطه دقیقاً متشکل از نقاط به شکل rx ، $r \in \mathbb{R}$ است؛ پس $rx \in E$ برای (ب)، اگر x و y متمایز نباشند، $y = x$ و $x + y = 2x$ ، پس طبق (الف)، $x + y \in E$. اگر x و y متمایز باشند، خط گذرنده از x و y به‌تمامی در E است. این خط از همه نقاط به شکل $x + t(y - x)$ ، $t \in \mathbb{R}$ تشکیل شده است. به‌خصوص به‌ازای $t = \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}(x + y) = x + \frac{1}{2}(y - x)$ ، $t = \frac{1}{2}$ روی این خط است. پس بنابر (الف)، $x + y = 2\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \in E$ متعلق به E است.

به‌عکس، فرض کنید ویژگی‌های (الف) و (ب) برای زیرمجموعه ناتهی E برقرارند و P و Q دو نقطه متمایز E هستند. باید نشان دهیم خط گذرنده از P و Q به‌تمامی در E قرار دارد. هر نقطه روی این خط نمایشی به صورت $P + t(Q - P)$ دارد که برابر است با $(1 - t)P + tQ$. چون $P, Q \in E$ ، طبق (الف)، $(1 - t)P \in E$ و $tQ \in E$ ، پس طبق (ب) مجموع آنها نیز در E است.

■

ارتباط ساده‌ای بین زیرفضاهای خطی و زیرفضاهای مستوی به مفهوم عام وجود دارد. در بخش قبلی، این ارتباط به صورت انتقال موازی به 0 متجلی شد. به‌طور کلی، اگر $v \in \mathbb{R}^n$ ، مقصود از انتقال توسط v ، تابع $\tau_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ است که با $\tau_v(x) = v + x$ تعریف می‌شود. اگر S یک زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$ باشد، مقصود از $v + S$ یا $\tau_v(S)$ مجموعه $\{v + s | s \in S\}$ است.

گزاره ۲.۲.۷ ویژگی مستوی بودن تحت انتقال حفظ می‌شود. به بیان دیگر، اگر E یک زیرمجموعه ناتهی

$\mathbb{R}^n$ باشد و v عضو دلخواهی از $\mathbb{R}^n$ ، E یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر $v + E$ یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشد.

برهان. نکته اصلی این است که اگر l یک خط راست باشد، $v + l = \{x + v | x \in l\}$ نیز یک خط راست است، و به عکس. اگر l یک خط راست باشد، $a \in \mathbb{R}^n$ و $A \in \mathbb{R}^n$ ، $0 \neq A$ وجود دارند که

$$l = \{a + tA | t \in \mathbb{R}\}$$

بنابراین

$$v + l = \{(a + v) + tA | t \in \mathbb{R}\}$$

یعنی $v + l$ خط گذرنده از $a + v$ به موازات A است. به عکس، چون انتقال توسط $-v$ تابع وارون انتقال توسط v است، اگر مجموعه $v + l$ یک خط راست باشد، l نیز یک خط راست است.

حال با توجه به نکته بالا، اگر P و Q دو نقطه متمایز $v + E$ باشند، $P' = P - v$ و $Q' = Q - v$ دو نقطه متمایز E هستند و خط گذرنده از P' و Q' تحت انتقال τ_v به خط گذرنده از P و Q منتقل می شود. بنابراین اگر E مستوی باشد، چون خط گذرنده از P' و Q' به تمامی در E است، انتقال یافته آن به تمامی در انتقال یافته E است. عکس حکم نیز از اینکه τ_{-v} وارون τ_v است نتیجه می شود.

■

اکنون اگر E یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشد و $v \in E$ ، انتقال یافته E به 0 ، E° ،

به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} E^\circ &= -v + E \\ &= \{-v + x \mid x \in E\} \end{aligned}$$

E° یک زیرفضای خطی است چون طبق گزاره ۲.۲.۷ یک زیرفضای مستوی است و به علاوه $0 = v - v \in E^\circ$. ضمناً توجه کنید که اگر به جای $v \in E$ ، هر عضو دیگر $w \in E$ در نظر گرفته شود، همین E° به دست می آید. موقتاً $\{x - w \mid x \in E\}$ را به E' نمایش می دهیم. E° و E هر دو زیرفضای خطی هستند. چون $v \in E$ ، $v - w \in E'$ و $w - v = (-1)(v - w) \in E'$ نیز عضو E' است. پس برای هر $x \in E$

$$x - v = (x - w) + (w - v)$$

و چون E' یک زیرفضای خطی است، طبق گزاره ۱.۲.۷ (ب)، $x - v \in E'$. بنابراین $E^\circ \subset E'$. همین طور ثابت می شود که $E' \subset E^\circ$ ، پس $E' = E^\circ$.

بدین ترتیب، همه زیرفضاهای مستوی را می توان از انتقال زیرفضاهای خطی به دست آورد. بنابراین، چنانچه تصویر دقیقی از زیرفضاهای خطی به دست آوریم، توصیف کاملی نیز از زیرفضاهای مستوی حاصل می شود. در باقیمانده این بخش می کوشیم شناخت کامل تری از زیرفضاهای خطی به دست آوریم.

در مورد خطوط راست گذرنده از 0 دیدیم که هر چنین مجموعه ای از مضربهای حقیقی یک عنصر ناصفر A از $\mathbb{R}^n$ تشکیل شده است. این مجموعه را به A نمایش دادیم:

$$A \neq \underline{0}, \langle A \rangle = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$$

برای هر صفحه گذرنده از مبدأ، دو عضو A_1 و A_2 از $\mathbb{R}^n$ وجود دارند که هیچ یک مضربی

حقیقی از دیگری نیست و صفحه گذرنده از مبدأ به شکل زیر است:

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \{t_1 A_1 + t_2 A_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

ضمناً توجه کنید از اینکه A_1 و A_2 هیچ یک مضرب حقیقی دیگری نیست، نتیجه می‌شود $A_1 \neq 0$ و $A_2 \neq 0$ زیرا مثلاً اگر $A_1 = 0$ ، آنگاه $A_1 = 0 \cdot A_2$ ، یعنی A_1 مضربی حقیقی از A_2 است. در فضای سه‌بعدی معمول هندسه، اگر سه بردار A_1, A_2, A_3 ساطع از 0 طوری باشند که امتدادهای آنها در یک صفحه قرار نگیرند، هر بردار در $\mathbb{R}^3$ را می‌توان در امتداد این سه بردار تجزیه کرد، یعنی به صورت $t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3$ نوشت. بنابراین به نظر می‌رسد اگر A_1, A_2, A_3 سه عضو $\mathbb{R}^n$ باشند به نحوی که خطوط راست گذرنده از 0 و این سه نقطه در یک صفحه قرار نگیرند، مجموعه

$$\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = \{t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3 \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$

کاندیدای مناسبی برای «زیرفضای خطی سه‌بعدی» باشد. به‌طور کلی نشان خواهیم داد که هر زیرفضای خطی k بعدی E از $\mathbb{R}^n$ ، $k \geq 1$ ، به شکل زیر است:

$$\langle A_1, \dots, A_k \rangle = \{t_1 A_1 + \dots + t_n A_n \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\}$$

است که در آن شرط مناسبی روی $A_1, \dots, A_k$ در نظر گرفته می‌شود. این «شرط مناسب» باید به‌گونه‌ای باشد که در حالت $k = 1$ تبدیل به $A_1 \neq 0$ شود، در حالت $k = 2$ تبدیل به اینکه A_1 و A_2 هم‌راستا نباشند، و در حالت $k = 3$ به این تبدیل شود که سه بردار A_1, A_2, A_3 در یک صفحه قرار نگیرند. در ادامه بحث از اصطلاح سودمند «ترکیب خطی» استفاده می‌کنیم. اگر $A_1, \dots, A_k$ عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند، مقصود از یک ترکیب خطی $A_1, \dots, A_k$ عضوی به شکل $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ است که در آن اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۳.۲.۷ فرض کنید $A_1, \dots, A_k$ عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند. مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ را مستقل خطی

می‌نامیم در صورتی که هیچ ترکیب خطی $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ صفر نباشد مگر اینکه همه t_i ها صفر باشند.

اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی نباشد، آن را وابسته خطی می‌نامیم. نفی تعریف استقلال خطی این است که ضرایب حقیقی $t_1, \dots, t_k$ که همگی صفر نیستند موجود باشند به طوری که $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = 0$.

چند مثال ۴.۲.۷ (۱.۴.۲.۷) به ازای $k = 1$ ، مجموعه تک عنصری $\{A\}$ وابسته خطی است اگر عدد

حقیقی ناصفر t موجود باشد که $tA = 0$. این غیرممکن است مگر اینکه $A = 0$. پس شرط لازم و کافی برای استقلال خطی $\{A\}$ این است که $A \neq 0$.

(۲.۴.۲.۷) به ازای $k = 2$ ، وابستگی خطی $\{A, B\}$ معادل این است که $t_1 A + t_2 B = 0$

و دست کم یکی از t_1 و t_2 صفر نباشد. مثلاً اگر $t_1 \neq 0$ ، می‌توان نوشت $A = \left(-\frac{t_2}{t_1}\right) B$ ،

یعنی A ضربی حقیقی از B است، به همین ترتیب اگر $t_2 \neq 0$ ، B ضربی حقیقی از A

است. پس استقلال خطی $\{A, B\}$ بدین معنی است که هیچ یک از A و B ضربی حقیقی

از دیگری نیست. بدین ترتیب شرطی را که روی $\{A, B\}$ برای تعریف صفحه $a + \langle A, B \rangle$

قائل شدیم می‌توان به این صورت نوشت که $\{A, B\}$ مستقل خطی باشد.

(۳.۴.۲.۷) اگر در مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ یک یا چند تا از A_i ها n تایی $(0, \dots, 0) = 0$

باشد، مجموعه وابسته خطی است زیرا مثلاً اگر $t_i A_j = 0$ ها را به صورت زیر در نظر

می‌گیریم

$$t_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

و در این صورت $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = 0$ بدون اینکه همه t_i ها صفر باشند.

(۴.۴.۲.۷) یادآوری می‌کنیم که n تایی e_j در $\mathbb{R}^n$ به صورت $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

تعریف می‌شود که در آن عدد ۱ در مکان j ام n تایی قرار دارد. نشان می‌دهیم مجموعه

$\{e_1, \dots, e_n\}$ در $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است. توجه کنید که

$$t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = (t_1, \dots, t_n)$$

پس اگر $t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = 0$ نتیجه می‌شود که به ازای هر i ، $t_i = 0$ ؛ یعنی همه

ضرایب لزوماً صفر هستند.

گزاره ۵.۲.۷ فرض کنید $A_1, \dots, A_k$ عناصری از $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت شرطی لازم و کافی برای

اینکه $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی باشد این است که:

الف) اگر $k = 1$ ، $A_1 = 0$ ؛

ب) اگر $k > 1$ ، یکی از A_i ها را بتوان به صورت ترکیبی خطی از سایر A_i ها نوشت.

برهان. اگر الف) برقرار باشد، طبق مثال ۳.۴.۲.۷، $\{A_1\}$ وابسته خطی است. اگر ب)

برقرار باشد، مثلاً A_j ترکیبی خطی از سایر A_i ها باشد، با انتقال A_j

به طرف دیگر تساوی داریم $-A_j + \sum_{i \neq j} t_i A_i = 0$ و همه ضرایب صفر نیستند (مثلاً

ضریب A_j)، پس مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی است.

به عکس فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی است. اگر $k = 1$ ، طبق مثال

۱.۴.۲.۷، نتیجه الف) به دست می‌آید. اگر $k > 1$ و $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = 0$ بدون

اینکه همه ضرایب صفر باشند، مثلاً $t_j \neq 0$ ، در این صورت با انتقال $t_j A_j$ به طرف دیگر

تساوی و تقسیم کردن دو طرف بر $(-t_j)$ می‌بینیم که A_j ترکیبی خطی از سایر A_i ها

می‌شود.

حکم ساده زیر را برای ارجاع‌های بعدی به صورت گزاره می‌آوریم

گزاره ۶.۲.۷ فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ زیرمجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد.

الف) اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعه ناتهی آن نیز مستقل خطی است.

ب) اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی باشد، هر مجموعه $\{A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, A_l\}$ شامل آن نیز وابسته خطی است.

برهان. الف) اگر زیرمجموعه‌ای از $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی باشد، ترکیبی خطی از اعضای آن زیرمجموعه صفر می‌شود بدون آنکه همه ضرایب صفر باشند. اگر سایر A_i ها را با ضریب صفر به این ترکیب خطی بیفزاییم. ترکیبی خطی از $A_1, \dots, A_k$ صفر می‌شود بدون آنکه همه ضرایب صفر باشند، که خلاف استقلال خطی $\{A_1, \dots, A_t\}$ است.

ب) اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی باشد داریم $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = 0$ بدون آنکه همه t_i صفر باشند. بنابراین $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \dots + 0 \cdot A_l = 0$ بدون آنکه همه t_i صفر باشند، پس $\{A_1, \dots, A_l\}$ نیز وابسته خطی است.

حال فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است. مجموعه

$$\langle A_1, \dots, A_k \rangle = \{t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

یعنی مجموعه همه ترکیبهای خطی $A_1, \dots, A_k$ ، یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است زیرا واجد شرطهای الف) و ب) گزاره ۱.۲.۷ است. هدف ما این است که نشان دهیم اگر $E \neq \{0\}$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، لزوماً زیرمجموعه مستقل خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ از عناصر

E وجود دارد که $E = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$. حربه اصلی ما برای اثبات این مطلب و چند حکم اساسی دیگر در مورد زیرفضاهای خطی قضیه زیر است که به سبب فرایندی که در اثبات آن مورد استفاده قرار می‌گیرد به «قضیه مبادله» معروف شده است.

قضیه مبادله ۷.۲.۷ فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است، $E = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ و $B_1, \dots, B_l$ عضوهایی از E هستند به طوری که $\{B_1, \dots, B_l\}$ مستقل خطی است. در این صورت $l \leq k$.

برهان. فرض کنید $l > k$. نشان می‌دهیم این فرض منجر به تناقض می‌شود. چون $B_1 \in E$ می‌توان نوشت:

$$B_1 = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad (۱)$$

دست کم یکی از t_i ها باید ناصفر باشد چه در غیر این صورت $B_1 = 0$ و مجموعه $\{B_1, \dots, B_l\}$ نمی‌تواند مستقل خطی باشد (طبق مثال ۳.۴.۲.۷). مثلاً فرض می‌کنیم $t_1 \neq 0$ (در صورت لزوم اندیس‌ها را تعویض می‌کنیم به طوری که ضریب با اندیس ۱ ناصفر باشد). پس با مبادله یا تعویض جای B_1 و $t_1 A_1$ در دو طرف (۱):

$$\begin{aligned} -t_1 A_1 &= -B_1 + t_2 A_2 + \dots + t_k A_k \\ A_1 &= \left(\frac{1}{t_1}\right) B_1 - \frac{t_2}{t_1} A_2 - \dots - \frac{t_k}{t_1} A_k \end{aligned} \quad (۲)$$

از (۲) نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی $A_1, \dots, A_k$ ، یعنی هر عضو E ، ترکیبی خطی از $\{B_1, A_2, \dots, A_k\}$ است. پس برای عنصر $B_2 \in E$ می‌توان نوشت

$$B_2 = s_1 B_1 + s_2 A_2 + \dots + s_k A_k \quad (۳)$$

در اینجا همه $s_2, \dots, s_k$ نمی‌توانند صفر باشند، چون در این صورت $B_2 = s_1 B_1$ و مجموعه $\{B_1, B_2\}$ وابسته خطی می‌شود، و طبق ۶.۲.۷ (ب)، مجموعه $\{B_1, \dots, B_l\}$

نیز وابسته خطی می‌شود که خلاف فرض قضیه است. پس دست‌کم یکی از $s_2, \dots, s_k$ صفر نیست که مجدداً با تعویض اندیسها در صورت لزوم، فرض می‌کنیم $s_2 \neq 0$. با جابه‌جا کردن B_2 و $s_2 A_2$ در (۳) می‌نویسیم:

$$-s_2 A_2 = s_1 B_1 - B_2 + s_3 A_3 + \dots + s_k A_k$$

$$A_2 = \left(-\frac{s_1}{s_2}\right) B_1 + \left(\frac{1}{s_2}\right) B_2 - \frac{s_3}{s_2} A_3 - \dots - \frac{s_k}{s_2} A_k \quad (4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر ترکیب خطی $B_1, A_2, \dots, A_k$ (در نتیجه هر ترکیب خطی $A_1, A_2, \dots, A_k$) ترکیبی خطی از $\{B_1, B_2, A_3, \dots, A_k\}$ است. با ادامه همین فرایند، A_i ها را، یک‌به‌یک، با B_i ها مبادله می‌کنیم. از آنجا که $l > k$ فرض شده است این فرایند با تعویض B_k متوقف می‌شود و به این نتیجه می‌رسیم که هر ترکیب خطی $A_1, \dots, A_k$ ، یعنی هر عضو E ترکیبی خطی از $B_1, \dots, B_k$ است. بدین ترتیب B_{k+1} باید ترکیبی خطی از $B_1, \dots, B_k$ باشد که این خلاف فرض استقلال خطی $\{B_1, \dots, B_l\}$ است. این تناقض نشان می‌دهد که پس از k گام مبادله یا قبل از آن، همه B_i ها باید مبادله شوند، یعنی $l \leq k$.

■

حال به توصیف نتایجی از این قضیه می‌پردازیم:

نتیجه ۸.۲.۷ فرض کنید $E \neq \{0\}$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت مجموعه مستقل

خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ از عناصر E وجود دارد، $1 \leq k \leq n$ ، که $E = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$. برهان. چون $\{0\} \neq E$ ، عنصری ناصفر مانند A_1 و در E موجود است. اگر $\langle A_1 \rangle = E$ ، حکم ثابت می‌شود، وگرنه عضوی چون A_2 از E وجود دارد که $A_2 \notin \langle A_1 \rangle$. توجه کنید که $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است زیرا از یک طرف $A_2 \notin \langle A_1 \rangle$ یعنی A_2 مضربی از A_1

نیست و از طرف دیگر اگر $A_1 = cA_2$ به ازای عدد حقیقی c ، یا $c = 0$ که در این صورت $A_1 = 0$ و این خلاف فرض است، و یا $c \neq 0$ ، $A_2 = c^{-1} \cdot A_1$ ، که خلاف $A_2 \notin \langle A_1 \rangle$ است. حال اگر $\langle A_1, A_2 \rangle = E$ ، حکم به اثبات رسیده است، وگرنه عضوی چون A_3 از E هست که $A_3 \notin \langle A_1, A_2 \rangle$. به طور کلی اگر این فرایند ادامه داده شود به طوری که مجموعه مستقل خطی $\{A_1, \dots, A_j\}$ از عناصر E در دست باشد و $\langle A_1, \dots, A_j \rangle$ همه E نباشد، عنصری مانند A_{j+1} از E یافت می شود که $A_{j+1} \notin \langle A_1, \dots, A_j \rangle$. در این صورت ادعا می کنیم که $\{A_1, \dots, A_j, A_{j+1}\}$ مستقل خطی است. فرض کنید

$$c_1 A_1 + \dots + c_j A_j + c_{j+1} A_{j+1} = 0$$

حال $c_{j+1} \neq 0$ غیرممکن است زیرا در این صورت می توان با انتقال $c_{j+1} A_{j+1}$ به طرف دیگر تساوی و تقسیم کردن بر $(-c_{j+1})$ ، A_{j+1} را به عنوان عضوی از $\langle A_1, \dots, A_j \rangle$ نمایش داد. پس $c_{j+1} = 0$ و از استقلال خطی $\{A_1, \dots, A_j, A_{j+1}\}$ نتیجه می شود که $c_1 = \dots = c_j = 0$. بنابراین همه c_i ها صفر هستند و استقلال خطی $\{A_1, \dots, A_{j+1}\}$ به اثبات می رسد. بدین ترتیب تا زمانی که $\langle A_1, \dots, A_j \rangle$ برابر E نشود می توان افزودن عناصر جدید از E به مجموعه مستقل خطی را ادامه داد. ولی توجه کنید که $\mathbb{R}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ (مثال ۴.۴.۲.۷) و همه A_i ها عنصر $\mathbb{R}^n$ هستند، پس بنابر قضیه مبادله، این فرایند نمی تواند بیش از n گام ادامه یابد. بنابراین عدد طبیعی k وجود دارد، که $k \leq n$ ، $\langle A_1, \dots, A_k \rangle = E$.

■

نتیجه مهم بالا شناسایی موردنظر زیرفضاهای خطی $\mathbb{R}^n$ را تکمیل می کند: هر زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ به جز $\{0\}$ به شکل $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ است که در آن

$1 \leq k \leq n$. عدد k را بُعد E می‌نامیم. سؤالی که بلافاصله مطرح می‌شود این است که آیا عدد k یک ویژگی ذاتی و هندسی زیرفضای خطی E است یا به روشی که برای یافتن زیرمجموعه مستقل $\{A_1, \dots, A_k\}$ به کار می‌گیریم وابسته است؟ نتیجه زیر نشان می‌دهد که «بُعد» واقعاً یک خاصیت ذاتی زیر فضا است:

نتیجه ۹.۲.۷ فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ و $\{B_1, \dots, B_l\}$ دو زیرمجموعه مستقل خطی از عناصر

$$\mathbb{R}^n \text{ باشند که } \langle A_1, \dots, A_k \rangle = \langle B_1, \dots, B_l \rangle. \text{ در این صورت، } l = k.$$

برهان. قرار می‌دهیم $E = \langle A_1, \dots, A_k \rangle = \langle B_1, \dots, B_l \rangle$. طبق قضیه مبادله داریم $l \leq k$ و نیز $k \leq l$ پس $l = k$.

■

نتیجه ۱۰.۲.۷ فرض کنید E یک زیرفضای خطی k -بُعدی $\mathbb{R}^n$ است و $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک

زیرمجموعه مستقل خطی از عناصر E . در این صورت $E = \langle B_1, \dots, B_k \rangle$.

برهان. چون هر B_i عضو E است، داریم $\langle B_1, \dots, B_k \rangle \subset E$. اگر $\subset$ تساوی نباشد، عضوی چون B_{k+1} در E وجود دارد که در $\langle B_1, \dots, B_k \rangle$ نیست. در این صورت ادعا می‌کنیم $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}\}$ مستقل خطی است. فرض کنید برای اعداد حقیقی $t_1, \dots, t_{k+1}$ رابطه $t_1 B_1 + \dots + t_k B_k + t_{k+1} B_{k+1} = 0$ برقرار است. اگر $t_{k+1} \neq 0$ ، می‌توان با انتقال $t_{k+1} B_{k+1}$ به طرف راست رابطه و تقسیم کردن بر $(-t_{k+1})$ ، B_{k+1} را به صورت عضوی از $\langle B_1, \dots, B_k \rangle$ نوشت که این خلاف انتخاب B_{k+1} است. پس $t_{k+1} = 0$ و در نتیجه $t_1 B_1 + \dots + t_k B_k = 0$ ولی $\{B_1, \dots, B_k\}$ مستقل خطی فرض شده است، پس $t_1 = \dots = t_k = 0$ ، یعنی همه t_i ها صفر هستند و در نتیجه $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}\}$ مستقل خطی است. ولی این در تناقض با حکم قضیه مبادله

است، پس لزوماً $\langle B_1, \dots, B_k \rangle = E$.

■

نتایج ثابت شده در بالا را می‌توان بدین صورت جمع‌بندی کرد: اگر E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، عددی صحیح چون k ، $0 \leq k \leq n$ ، به نام بُعد E ، یا $\dim E$ ، به نسبت داده می‌شود. اگر $k = 0$ ، لزوماً $E = \{0\}$ و اگر $k > 0$ ، زیرمجموعه‌ای مستقل خطی مانند $\{A_1, \dots, A_k\}$ از عناصر E وجود دارد که $E = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$. به عکس اگر $\{B_1, \dots, B_l\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از عناصر E باشد، آنگاه $E = \langle B_1, \dots, B_l \rangle$ اگر و تنها اگر $l = k$. هر زیرمجموعه مستقل خطی k عضوی از یک زیرفضای خطی k بُعدی E از $\mathbb{R}^n$ را یک پایه برای E می‌نامیم. اگر $\{a_1, \dots, a_k\}$ یک پایه برای E باشد و x عضوی از E ، می‌توان نوشت

$$x = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad (5)$$

که در اینجا $t_1, \dots, t_k$ اعداد حقیقی مناسبی هستند. از گزاره زیر نتیجه می‌شود که در نمایش فوق، ضرایب $t_1, \dots, t_k$ به طور منحصر به فرد تعیین می‌شوند. مجموعه $\{e_1, \dots, e_n\}$ به پایه متداول $\mathbb{R}^n$ معروف است.

گزاره ۱۱.۲.۷ فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی از $\mathbb{R}^n$ باشد و

$$s_1 A_1 + \dots + s_k A_k = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad (6)$$

که در اینجا s_i ها و t_i ها اعدادی حقیقی هستند. در این صورت، $s_1 = t_1, s_2 = t_2, \dots$

$$s_k = t_k$$

برهان. با انتقال همه جملات به یک طرف رابطه (۶):

$$(t_1 - s_1)A_1 + \cdots + (t_k - s_k)A_k = \underline{0}$$

چون $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است، همه ضرایب باید صفر باشند و حکم نتیجه می‌شود.

■

بدین ترتیب، هرگاه پایه‌ای برای زیرفضای خطی k بعدی E در نظر بگیریم، هر عضو E نمایشی یگانه به صورت ترکیب خطی اعضای پایه دارد. کل $\mathbb{R}^n$ زیرفضای خطی n بعدی خود $\mathbb{R}^n$ است زیرا $\mathbb{R}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ و در مثال ۴.۴.۲.۷ دیدیم که $\{e_1, \dots, e_n\}$ مستقل خطی است.

شکل ۷-۷

در واقع $\mathbb{R}^n$ تنها زیرفضای خطی n بعدی $\mathbb{R}^n$ است زیرا که برای هر زیرفضای خطی n بعدی E از $\mathbb{R}^n$ ، $E = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ که $\{A_1, \dots, A_n\}$ مستقل خطی است. پس

$$\mathbb{R}^n = \langle A_1, \dots, A_n \rangle, \quad \text{طبق ۱۰.۲.۷.}$$

نمایش عناصر E به صورت ترکیب خطی عناصر پایه تعبیر مائوسی در فضاهای آشنای هندسی $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ دارد. در شکل ۱ پایه متشکل از مجموعه دو عضوی مستقل خطی $\{A_1, A_2\}$ را برای $\mathbb{R}^2$ در نظر گرفته‌ایم. برای نمایش A به صورت $t_1 A_1 + t_2 A_2$

از A به موازات محورهای دو بردار A_1 و A_2 خطوطی رسم می‌کنیم تا دو محور را در مضربهای $t_1 A_1$ از A_1 و $t_2 A_2$ از A_2 قطع کنند. بنابر تعریف جمع برداری داریم $A = t_1 A_1 + t_2 A_2$. به همین ترتیب در شکل ۲، سه تایی مستقل خطی $\{A_1, A_2, A_3\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است. اگر از A صفحات به موازات صفحات $\langle A_2, A_3 \rangle$ ، $\langle A_1, A_3 \rangle$ و $\langle A_1, A_2 \rangle$ رسم کنیم، این صفحات به ترتیب محورهای $\langle A_1 \rangle$ ، $\langle A_2 \rangle$ و $\langle A_3 \rangle$ را در نقاطی چون $t_1 A_1$ ، $t_2 A_2$ و $t_3 A_3$ قطع می‌کنند و $A = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3$.

شکل ۷-۸

به طور کلی اگر $x = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ نمایش x نسبت به پایه $\{A_1, \dots, A_k\}$ برای E باشد، t_i را مؤلفه i ام x نسبت به پایه $\{A_1, \dots, A_k\}$ می‌نامیم. با توجه به یگانگی نمایش، مؤلفه i -ام بی‌ابهام تعریف می‌شود. ضمناً در تمرین آخر بخش از خواننده خواسته شده است که حکم زیر را ثابت کند: اگر E یک زیرفضای خطی باشد و $\{A_1, \dots, A_k\}$ زیرمجموعه‌ای از E که هر نقطه E نمایش یگانه‌ای به صورت ترکیب خطی $A_1, \dots, A_k$ داشته باشد، آنگاه $\{A_1, \dots, A_k\}$ لزوماً مستقل خطی و یک پایه برای E است.

چند مثال ۱۲.۲.۷ (۱.۱۲.۲.۷) نشان می‌دهیم مجموعه $\{A_1, A_2, A_3\}$ که در آن $A_1 = (1, 1, 0)$ ، $A_2 = (0, 0, 2)$ و $A_3 = (-1, 1, 1)$ ، مستقل خطی است، پس یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ پدید می‌آورد. فرض کنید $t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3 = 0$. می‌خواهیم نشان دهیم

$$t_1 = t_2 = t_3 = 0$$

$$t_1(1, 1, 0) + t_2(0, 0, 2) + t_3(-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(t_1 - t_3, t_1 + t_3, 2t_2 + t_3) = (0, 0, 0)$$

از مقایسه مؤلفه‌های اول داریم $t_1 = t_3$ و از مقایسه مؤلفه‌های دوم، $t_1 = -t_3$. بنابراین، $t_1 = t_3 = 0$. از مقایسه مؤلفه‌های سوم داریم $2t_2 + t_3 = 0$ و چون $t_3 = 0$ ، نتیجه می‌شود که $t_2 = 0$. بنابراین، هر سه ضریب باید صفر باشند و استقلال خطی ثابت می‌شود. (۲.۱۲.۲.۷) فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای خطی k بُعدی E از $\mathbb{R}^n$ است و $c_1, \dots, c_k$ اعداد حقیقی مفروضی هستند که همه ناصفرند. قرار می‌دهیم $B_i = c_i A_i$ و نشان می‌دهیم $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک پایه برای E است. با توجه به تعداد اعضای $\{B_1, \dots, B_k\}$ ، طبق ۱۰.۲.۷ کافی است نشان دهیم $\{B_1, \dots, B_k\}$ مستقل خطی است. فرض کنید

$$t_1 B_1 + \dots + t_k B_k = \underline{0}$$

در این صورت

$$(t_1 c_1) A_1 + \dots + (t_k c_k) A_k = \underline{0}$$

ولی $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است، پس $t_i c_i = 0$ به‌ازای هر $i = 1, \dots, k$ ولی طبق فرض، $c_i \neq 0$ پس $t_i = 0$ به‌ازای هر $i = 1, \dots, k$ و حکم به اثبات می‌رسد. (۳.۱۲.۲.۷) فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای خطی k بُعدی E از $\mathbb{R}^n$ است. مجموعه $\{B_1, \dots, B_k\}$ را به صورت $B_i = A_1 + \dots + A_i$ تعریف می‌کنیم،

یعنی

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_1 + A_2 \\ \vdots \\ B_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم $\{B_1, \dots, B_k\}$ مستقل خطی است، پس پایه‌ای برای E تشکیل می‌دهد.

فرض کنید

$$t_1 B_1 + \cdots + t_k B_k = \underline{0}$$

در این صورت

$$(t_1 + \cdots + t_k)A_1 + (t_2 + \cdots + t_k)A_2 + \cdots + t_k A_k = \underline{0}$$

چون $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} t_1 + \cdots + t_k = 0 \\ t_2 + \cdots + t_k = 0 \\ \vdots \\ t_k = 0 \end{cases}$$

طبق آخرین تساوی، $t_k = 0$. اگر این مقدار را در تساوی ماقبل آخر، یعنی $t_{k-1} + t_k = 0$,

قرار دهیم نتیجه می‌شود $t_{k-1} = 0$. با ادامه جایگزینی در تساوی‌ها، از پایین به بالا، نتیجه

می‌شود که همه t_i ها صفر هستند، پس $\{B_1, \dots, B_k\}$ مستقل خطی است.

(۴.۱۲.۲.۷) تعمیم سودمندی از مثال بالا به این شرح است. فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$

پایه‌ای برای زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ است و $A'_1 \in \langle A_1 \rangle$, $A'_1 = 0$ و به طور کلی،

به ازای $i = 2, \dots, k$, $A'_i \in \langle A_1, \dots, A_{i-1} \rangle$. به ازای $i = 1, \dots, k$ قرار می‌دهیم

$B_i = A_i + A'_i$. نشان می‌دهیم $\{B_1, \dots, B_k\}$ مستقل خطی است، پس پایه‌ای برای

E تشکیل می‌دهد. فرض کنید

$$t_1 B_1 + \dots + t_k B_k = 0 \quad (7)$$

پس اگر بنویسیم

$$A'_i = c_{i1} A_1 + \dots + c_{i,i-1} A_{i-1}$$

با جایگزینی در (۷) نتیجه می‌شود

$$t_1 A_1 + t_2 (A_2 + c_{21} A_1) + \dots + t_k (A_k + c_{k1} A_1 + \dots + c_{k,k-1} A_{k-1}) = 0$$

$$(t_1 + t_2 c_{21} + \dots + t_k c_{k1}) A_1 + \dots + (t_{k-1} + t_k c_{k,k-1}) A_{k-1} + t_k A_k = 0$$

چون $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 c_{21} + \dots + t_k c_{k1} = 0 \\ \vdots \\ t_{k-1} + t_k c_{k,k-1} = 0 \\ t_k = 0 \end{cases}$$

از آخرین رابطه داریم $t_k = 0$. با جایگزینی در رابطه ماقبل آخر نتیجه می‌شود که

$t_{k-1} = 0$ و به همین ترتیب با ادامه جایگزینی نتایج از پایین به بالا می‌بینیم که همه t_i ها

صفر هستند، پس $\{B_1, \dots, B_k\}$ مستقل خطی است. این مثال در آینده کاربردهایی خواهد داشت.

در بحث آغاز این بخش دیدیم که زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ از انتقال یک زیرفضای خطی حاصل می‌شود. پس شناخت کارسازی را که در مورد زیرفضاهای خطی کسب کرده‌ایم می‌توانیم به راحتی در مورد زیرفضاهای مستوی به‌کارگیریم. هر زیرفضای مستوی E را می‌توان به شکل

$$a + E^\circ = \{a + x \mid x \in E^\circ\}$$

نوشت که در آن E° یک زیرفضای خطی (انتقال یافته E به $^\circ$) است و a یک عضو E . همچنان که در آغاز بخش پس از تعریف انتقال به $^\circ$ دیدیم اگر b هر عضو E باشد، $(-b) + E$ همواره برابر E° است. به عبارت دیگر، به ازای هر دو عضو a و b از E ، $a + E^\circ = b + E^\circ$. بدین ترتیب، به ازای هر دو پایه $\{A_1, \dots, A_k\}$ و $\{B_1, \dots, B_k\}$ از E° و هر دو عضو a و b از E تساوی زیر برقرار است:

$$a + \langle A_1, \dots, A_k \rangle = b + \langle B_1, \dots, B_k \rangle \quad (\wedge)$$

و هر دو طرف نمایشی از E است.

بعد یک زیرفضای مستوی E را برابر بعد انتقال یافته آن به مبداء، یعنی E° ، تعریف می‌کنیم. اگر E و F دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند، E و F را موازی می‌نامیم و می‌نویسیم $E \parallel F$ در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\text{الف) } E \cap F = \phi;$$

ب) اگر E° و F° انتقال یافته‌های E و F به $^\circ$ باشند، داشته باشیم $E^\circ \subset F^\circ$ یا $F^\circ \subset E^\circ$.

در حالتی که E و F بعد برابر داشته باشند شرط (ب) را می‌توان به صورت $E^\circ = F^\circ$ نوشت. اگر شرط (الف) برای E و F برقرار باشد ولی (ب) برقرار نباشد دو زیرفضای مستوی را متناظر می‌نامیم. بدین ترتیب اگر اشتراک دو زیرفضای مستوی تهی نباشد، این دو زیرفضا یا موازی‌اند و یا متناظر.

مثال ۱۳.۲.۷ وضعیت نسبی خط راست L زیرفضای مستوی سه‌بعدی E را که در $\mathbb{R}^5$ به صورت زیر تعریف شده‌اند بررسی می‌کنیم:

$$L: \frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3 - 4}{0} = \frac{x_4 - 1}{1} = \frac{x_5 + 2}{-1}$$

$$E: e_3 + \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$$

هر عضو E به شکل $e_3 + t_1 e_1 + t_2 e_4 + t_5 e_5$ یعنی $(t_1, 0, 1, t_2, t_5)$ است. در مورد L ، مؤلفه سوم همه نقاط آن مقدار ثابت $x_3 = 4$ است، پس L و E نقطه مشترک ندارند. اگر L و e را به $^\circ$ انتقال دهیم L° و E° به صورت زیر به دست می‌آیند

$$L^\circ: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_5}{-1}$$

$$E^\circ: \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$$

چون E° سه‌بعدی و L° یک‌بعدی است، قطعاً $L^\circ \not\subset E^\circ$. از طرف دیگر نقطه $(1, 2, 0, 1, -1)$ روی L° قرار دارد ولی عضو E° نیست زیرا مؤلفه دوم همه نقاط E° باید صفر باشد، پس $L^\circ \not\subset E^\circ$. نتیجه اینکه L و E نمی‌توانند موازی باشند و متناظرند.



مثال ۱۴.۲.۷ وضعیت نسبی دو صفحه زیر را در $\mathbb{R}^4$ بررسی می‌کنیم

$$E_1: \langle e_1 - e_2, e_3 + e_4 \rangle$$

$$E_2: \langle (1, 0, 2, -1), (e_1, e_4) \rangle$$

نقاط E_1 به شکل $s(e_1 - e_2) + t(e_3 + e_4)$ یعنی $(s, -s, t, t)$ هستند، و نقاط E_2 به صورت

$$(1, 0, 2, -1) + u(1, 0, 0, 0) + v(0, 0, 0, 1) = (1 + u, 0, 2, -1 + v)$$

که در اینجا s, t, u و همه مقادیر حقیقی را می‌گیرند. برای اینکه نقطه مشترکی وجود داشته باشد باید:

$$\begin{cases} s = 1 + u \\ -s = 0 \\ t = 2 \\ t = -1 + v \end{cases}$$

نقطه $(0, 0, 2, 2)$ تنها جواب این دستگاه است؛ پس دو صفحه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

توجه کنید که در مثال ۲ی بالا دو صفحه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، ولی این وضعیت در فضای سه‌بعدی برای دو صفحه امکان‌پذیر نیست. در فضای سه‌بعدی دو صفحه یا موازی‌اند و یا یکدیگر را در یک خط راست قطع می‌کنند. به‌طور کلی، اگر E و F دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ با بعدهای k و l باشند، هر چه n بزرگتر باشد امکانات بیشتری

برای نحوه قرار گرفتن E و F نسبت به هم وجود دارد. این موضوع را در آینده به طور کامل

بررسی می‌کنیم. در حال حاضر به گزاره ساده زیر اکتفا می‌کنیم. ■

گزاره ۱۵.۲.۷ اگر E و F دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند، اشتراک آنها چنانچه تهی نباشد یک زیرفضای

مستوی $\mathbb{R}^n$ است. اگر E و F دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند، $E \cap F$ نیز یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است.

برهان. فرض کنید $E \cap F$ تهی نیست. اگر P و Q دو نقطه متمایز $E \cap F$ باشند، باید نشان دهیم خط راست گذرنده از P و Q به تمامی $E \cap F$ قرار دارد. از آنجا که $P, Q \in E$ و $P, Q \in F$ ، و E و F زیرفضاهای مستوی هستند، خط گذرنده از P و Q به تمامی E و به تمامی F قرار می‌گیرد. پس این خط به تمامی $E \cap F$ قرار دارد. از طرف دیگر، اگر $o \in E$ و $o \in F$ ، آنگاه $o \in E \cap F$ ؛ پس اشتراک دو زیرفضای خطی، علاوه بر اینکه یک زیرفضای مستوی است، شامل o نیز هست، بنابراین یک زیرفضای خطی است. ■

تمرین ۲.۷

۱. در هر مورد تحقیق کنید که مجموعه داده شده مستقل خطی است یا وابسته خطی:

الف) مجموعه $\{(1, -1, 2), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ در $\mathbb{R}^3$

ب) مجموعه $\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ در $\mathbb{R}^4$

ج) مجموعه $\{(0, 3, 1, 1), (2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 2)\}$ در $\mathbb{R}^4$

د) مجموعه $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1\}$ در $\mathbb{R}^n$ (دو

حالت زوج و فرد را برای n در نظر بگیرید.)

۲. فرض کنید $\{v_1, \dots, v_k\}$ ، $k \geq 3$ ، مجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ ، $n \geq k$ ، است با

ویژگی‌های زیر:

الف) $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ و $\{v_2, \dots, v_k\}$ هر یک وابسته خطی است.

ب) $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ مستقل خطی است.

نشان دهید هر زیرمجموعه $(k-1)$ -تایی از $\{v_1, \dots, v_k\}$ وابسته خطی است.

۳. وضعیت نسبی (تقاطع، توازی، متناظر یا انطباق) زیرفضاهای داده شده را تعیین کنید:

الف) در $\mathbb{R}^4$: خط راست $\frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3 + 1}{-2} = \frac{x_4 - 1}{0}$ و زیرفضای خطی $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

ب) در $\mathbb{R}^5$: خط راست $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 + 1}{0} = \frac{x_4 - 2}{-1} = \frac{x_5 + 2}{2}$ و زیرفضای خطی $\langle e_2, e_2 - e_3, e_2 + e_4 \rangle$

ج) صفحه $\langle (0, 2, 0, 2, 1), (1, 1, 2, 2, 2) \rangle$ و زیرفضای مستوی

$\langle (-1, -1, 0, 2, 1) + \langle (1, 0, 0, -1, 0), (0, 1, 2, -1, -1), (2, 2, 0, 0, 1) \rangle$

۴. برای هر یک از موارد زیر مثالی در $\mathbb{R}^5$ بیاورید:

الف) یک زیرفضای سه‌بعدی و یک زیرفضای دوبعدی که اشتراک آنها یک خط راست است.

ب) یک زیرفضای سه‌بعدی و یک زیرفضای دوبعدی متناظر.

ج) یک خط راست و یک زیرفضای چهاربعدی موازی.

۵. اگر L و E به ترتیب یک خط راست و یک زیرفضای $(n-1)$ -بعدی از $\mathbb{R}^n$ باشند،

$n \geq 2$ ، ثابت کنید L و E نمی‌توانند متناظر باشند، یعنی اگر اشتراک L و E تهی

باشد، آنگاه $L \parallel E$.

۶. فرض کنید E یک زیرفضای خطی k -بعدی $\mathbb{R}^n$ است، $1 \leq l < k$

$\{A_1, \dots, A_l\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی از عناصر E است. نشان دهید عناصر $A_{l+1}, \dots, A_k$ از E وجود دارند که $\{A_1, \dots, A_k\}$ یک پایه برای E است (راهنمایی. اثبات ۸.۲.۷ را تقلید کنید).

۷. طبق تمرین (۱۳) بخش ۱.۷، اگر L یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ باشد و P یک نقطه خارج آن، یک و تنها یک خط راست L' گذرنده از P وجود دارد که موازی L است. اگر E یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ شامل L و P باشد. نشان دهید E شامل L' نیز هست.

۸. نشان دهید هر زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ اجتماعی از یک دسته خطوط راست موازی است.

۹. فرض کنید L و L' دو خط راست متنافر در $\mathbb{R}^n$ ، $n \geq 3$ ، باشند. نشان دهید زیرفضای مستوی سه‌بعدی یگانه‌ای در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل L و L' است.

۱۰. فرض کنید $P_1, \dots, P_{k+1}$ نقاطی در $\mathbb{R}^n$ ، $n \geq k+1$ ، باشند. نشان دهید زیرفضای مستوی k بعدی E از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل $P_1, \dots, P_{k+1}$ است. اگر هیچ زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ با بُعد کوچکتر از k وجود نداشته باشد که شامل $P_1, \dots, P_{k+1}$ باشد، نشان دهید E یگانه است. توجه کنید که احکام فوق تعمیم گزاره ۶.۱.۷ بخش ۱.۷ هستند.

۱۱. فرض کنید E_1 و E_2 زیرفضاهای مستوی $\mathbb{R}^n$ با بعدهای به ترتیب k و l باشند که $n \geq k+l+1$. نشان دهید زیرفضای مستوی $(k+l+1)$ بعدی E از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل E_1 و E_2 است. تحت چه شرط اضافی E یگانه است؟

۱۲. دایره‌های C و C' در $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف شده‌اند. C دایره به شعاع واحد در

۳.۷ ضرب داخلی و هندسه اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ ۴۵

صفحه (x_1, x_2) به مرکز $(0, 0)$ است و C' دایره به شعاع واحد در صفحه (x_2, x_3) به مرکز $(0, 1, 0)$. این دو دایره در $\mathbb{R}^3$ به هم قلاب شده‌اند و نمی‌توان آنها را بدون شکستن یکی از هم جدا کرد. حال $\mathbb{R}^3$ را به عنوان زیرفضای $(x_1, x_2, x_3, 0)$ از $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید. نشان دهید با حرکت دادن C در $\mathbb{R}^4$ می‌توان آن را از C' جدا کرد بدون آنکه دو دایره یکدیگر را قطع کنند. (راهنمایی: به ازای $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ ، خانواده دایره‌های C_t را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$C_t : (x_1 - 2 \sin t)^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0, x_4 = \sin 2t$$

۱۳. فرض کنید E یک زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید E یک زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد: به ازای هر u, v, w در E و هر عدد حقیقی r داشته باشیم $ru - rv + w \in E$.

۱۴. فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ هستند که $E_1 \cap E_2$ یک تک نقطه‌ای است. نشان دهید هیچ خط راست در E_1 با هیچ خط راست در E_2 موازی نیست.

۱۵. فرض کنید E_1 یک زیرفضای مستوی k بُعدی $\mathbb{R}^n$ و E_2 یک زیرفضای مستوی l بُعدی $\mathbb{R}^n$ هستند که $k \geq 1$ و $l \geq 1$ و $k + l > n$. نشان دهید خطی راستی چون l_1 در E_1 و خط راستی مانند l_2 در E_2 وجود دارند که $l_1 \parallel l_2$.

۳.۷ ضرب داخلی و هندسه اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$

تاکنون مفاهیم ابتدایی نقطه، خط، صفحه، و تراز را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌ایم. در هندسه مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در

$\mathbb{R}^n$ و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار، رابطه طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم «طول» و «زاویه» را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی را مبنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند، حاصل ضرب داخلی آنها، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، اغلب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha \quad (۱)$$

که $\alpha \in [0, \pi]$ زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است و $||$ طول بردار را نمایش می‌دهد. با قرار دادن $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ، از (۱) نتیجه می‌شود که

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \quad (۲)$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ، به طوری که زاویه بین آنها، $\alpha \in [0, \pi]$ ، معنی داشته باشد، با توجه به (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} \quad (۳)$$

تابع کسینوس روی بازه $[0, \pi]$ یک به یک است و همه مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد بازه $[-1, 1]$ را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع وارون $\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}} \right) \quad (۴)$$

بدین ترتیب، مفهوم زاویه بین دو بردار نیز به کمک (۴) از ضرب داخلی به دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل ضرب داخلی دو بردار را مستقل از «طول» و «زاویه» تعریف کرد،

۳.۷ ضرب داخلی و هندسه اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$

می‌توان با به‌کارگرفتن (۲) و (۴) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در هندسه تحلیلی

دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل ضرب داخلی به دست می‌آید (به کمک قضیه

مثلاثی «قاعده کسینوس») که این خواست را برآورده می‌کند. در $\mathbb{R}^2$ ، اگر $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

و $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ، ثابت می‌شود که

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (5)$$

و نیز در $\mathbb{R}^3$ ، برای $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (6)$$

عبارت‌های جبری (۵) و (۶) تعریف زیر را در $\mathbb{R}^n$ القا می‌کنند:

تعریف ۱.۳.۷ برای دو بردار $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ، حاصل ضرب داخلی، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ،

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند

(۲.۳.۷) خواص ابتدایی حاصل ضرب داخلی

(۱.۲.۳.۷) به‌ازای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

(۲.۲.۳.۷) به‌ازای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$ و

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}).$$

(۳.۲.۳.۷) به‌ازای هر $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$ ، $(r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ و

$$\mathbf{u} \cdot (r\mathbf{v}) = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

(۴.۲.۳.۷) به‌ازای هر $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ و $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u} = 0$.

با توجه به (۴.۲.۳.۷) و با الهام از (۲)، طول $u \in \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \quad (۷)$$

تنها n تایی دارای طول صفر، $^{\circ}$ است. برای $|u|$ ، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدرمطلق نیز به کار می‌رود. گاه $|u|$ را به $\|u\|$ نمایش می‌دهند که آن را از قدرمطلق متمایز کنند ولی چون در $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ، طول همان قدرمطلق است، نیازی به این تمایز نیست.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویه بین u و v را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در $\mathbb{R}^n$ ، مقدار عبارت $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}}$ همواره در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد.

(۳.۳.۷) نابرابری کوشی-شوارتس. به ازای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$|u \cdot v| \leq |u| |v|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری برابری این است که u و v همراستا باشند. برهان. نخست حالتی را در نظر بگیرید که u و v همراستا هستند. اگر یکی از u و v صفر باشد دو طرف نابرابری بالا صفر می‌شود؛ در غیر این صورت، به ازای عدد حقیقی بنابه r ، $v = ru$ که در این حالت هر دو طرف نابرابری به $|r||u|^2$ تبدیل می‌شود و برابری برقرار است. حال فرض کنید u و v همراستا نباشند، بالاخص $u \neq ^{\circ}$ و $v \neq ^{\circ}$. n تایی $xu + v$ ، $x \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. داریم $xu + v \neq ^{\circ}$ زیرا در غیر این صورت $v = -xu$ و همراستایی ایجاد می‌شود. پس:

$$(xu + v) \cdot (xu + v) > ^{\circ} \quad (\text{طبق } ۴.۲.۴)$$

$$(xu) \cdot (xu) + (xu) \cdot v + v \cdot (xu) + (v \cdot v) > ^{\circ} \quad (\text{با استفاده مکرر از } ۲.۲.۴)$$

$$(u \cdot u)x^2 + 2(u \cdot v)x + (v \cdot v) \quad (\text{با استفاده مکرر از } ۳.۲.۴ \text{ و } ۱.۲.۴)$$

این نابرابری درجه دوم نسبت به x به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u \cdot v)^2 - (u \cdot u)(v \cdot v) < 0$$

یا

$$|u \cdot v|^2 < |u|^2 |v|^2$$

که نابرابری موردنظر است.

حال با توجه به نابرابری کوشی-شوارتس داریم

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} \leq 1$$

و یگانه مقداری در $[0, \pi]$ را که کسینوس آن برابر $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}}$ است زاویه بین u و v می‌نامیم:

$$\angle(u, v) = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} \quad (8)$$

قضیه زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی - شوارتس نتیجه می‌شود:

(۴.۳.۷) نابرابری مثلث. به ازای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از u و v مضربی نامنفی از دیگری باشد.

برهان. کافی است نابرابری برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

که معادل است با

$$(u+v) \cdot (u+v) \leq (u \cdot u) + (v \cdot v) + 2|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u \cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v| \cos \angle(u, v) \leq |u||v| \quad (\text{طبق نتیجه نابرابری کوشی-شوارتس})$$

اگر u و v صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطه بالا معادل است با:

$$\cos \angle(u, v) \leq 1$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos \angle(u, v) = 1$ ، یعنی u و v همراستا و همجهت باشند.

برای دو عنصر u و v از $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $u \perp v$ و می‌گوییم u بر v عمود است در صورتی که $u \cdot v = 0$. قضیه فیثاغورس که پایه هندسه اقلیدسی است در $\mathbb{R}^n$ با تعریف ذکر شده برای طول و زاویه برقرار است: ■

(۵.۳.۷) قضیه فیثاغورس. هرگاه به‌ازای $u, v \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $u \perp v$ ، آنگاه

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

برهان. عبارت بالا را می‌توان به‌صورت

$$(u+v) \cdot (u+v) = (u \cdot u) + (v \cdot v)$$

نوشت که با توجه به $u \cdot v = 0$ برقرار است.

توجه کنید که با همین استدلال (یا قرار دادن $\mathbf{v}$ به جای $\mathbf{v}$)، رابطه

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \quad \text{نیز تحت فرض } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ برقرار است. در } \mathbb{R}^n \text{ نیز،}$$

مانند $\mathbb{R}^2$ ، قضیه فیثاغورس به شکل $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ حالت خاص قاعده

کسینوس است که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$(9) \quad \text{به‌ازای هر } u \neq 0, v \neq 0, \quad |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \angle(u, v)$$

این رابطه نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبه بالا با استفاده از (۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \angle(u, v) \quad (\text{طبق (۸)}) \end{aligned}$$

به‌طور کلی، هرگاه $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند،

فاصله x از y ، که گاهی به $d(x, y)$ نمایش داده می‌شود، برابر $|x - y|$ تعریف می‌شود.

این تعریف با آنچه از بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر

را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز بیان کنیم: ■

(۶.۳.۷) نابرابری مثلث. برای $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$:

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

(۷.۳.۷) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} - \mathbf{z})$ ،

آنگاه

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2$$

(۸.۳.۷) قاعده کسینوس. به ازای هر x, y, z در $\mathbb{R}^n$ داریم

$$|y - z|^2 = |y - x|^2 + |z - x|^2 - 2|y - x||z - x| \cos \angle(y - x, z - x)$$

هر یک از این روابط با جایگزینی در رابطه متناظر به دست می‌آید. در (۶.۳.۷) قرار می‌دهیم $u = y - x$ و $v = x - z$ ، آنگاه $u + v = y - z$ در مورد (۷.۳.۷) و (۸.۳.۷)،

می‌نویسیم $u = y - x$ و $v = z - x$ ، آنگاه $u - v = y - z$

(۹.۳.۷) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ و

$\mathbb{R}^3$ محاسبه تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می‌آورد (شکل ۱).

شکل ۷-۹

اگر $u, v \neq 0$ در $\mathbb{R}^3$ باشند، u' ، تصویر قائم u بر راستای v ، برداری است که طول آن برابر $|u| \cos \angle(u, v)$ است (درحالتی که $u = 0$ ، این طول برابر صفر در نظر گرفته می‌شود هر چند که زاویه بین u و v تعریف نشده است)، u' مضربی از v است، $u' = ru$ و علامت r با علامت کسینوس زاویه بین u و v یکی است. بدین ترتیب اگر $\frac{v}{|u|}$ بردار واحد در جهت v باشد، می‌توان نوشت:

$$u' = |u| \cos \angle(u, v) \frac{v}{|v|} \quad (10)$$

یا معادل آن

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \quad (11)$$

با توجه به این که عبارت‌های سمت راست (۱۱) همه در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند، می‌توانیم تصویر

قائم u بر $v \neq 0$ در $\mathbb{R}^n$ را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که v یک

بردار واحد باشد:

$$|v| = 1 \text{ اگر } u' = (u \cdot v)v \quad (12)$$

مثال پایه متداول $\mathbb{R}^n$ یعنی $1, 0, \dots, 0$ را در نظر بگیرید. بدین ترتیب:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

هر $x = (x_1, \dots, x_n)$ را می‌توان به صورت:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

نوشت. درواقع $x \cdot e_i$ تصویر قائم x بر راستای e_i (محور i ام) است:

$$(x \cdot e_i) e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) e_i \quad (13)$$

مطلب بالا را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد. فرض کنید E یک زیرفضای خطی

$\mathbb{R}^n$ است و $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ یک پایه برای E . پایه B را متعامد می‌نامیم در صورتی

که به ازای هر $j \neq i$, $b_i \perp b_j$. اگر به علاوه، به ازای هر $i = 1, \dots, k$, $|b_i| = 1$ ، پایه B

یکامتعامد خوانده می‌شود. نشان می‌دهیم حکمی مشابه (۱۳) برای هر پایه یکامتعامد برقرار

است.

گزاره ۳.۷.۱۰ فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است و $\{b_1, \dots, b_k\}$ یک پایه یکامتعامد برای

E . در این صورت برای هر $x \in E$

$$x = \sum_{i=1}^k (x \cdot b_i) b_i \quad (۱۴)$$

برهان. چون $\{b_1, \dots, b_k\}$ پایه‌ای برای E است، اعداد حقیقی $t_1, \dots, t_k$ وجود دارند که

$$x = \sum_{i=1}^k t_i b_i$$

برای هر j ثابت، $j = 1, \dots, k$ ، ضرب داخلی دو طرف رابطه بالا در b_j را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x \cdot b_j &= \left(\sum_{i=1}^k t_i b_i \right) \cdot b_j \\ &= \sum_{i=1}^k t_i (b_i \cdot b_j) \end{aligned} \quad \text{طبق ۲.۲.۳.۷ و ۳.۲.۳.۷}$$

از یکامتعامد بودن پایه نتیجه می‌شود که $b_i \cdot b_j = 0$ اگر $i \neq j$ و $b_i \cdot b_j = 1$ اگر

$i = j$. پس

$$x \cdot b_j = t_j$$

■

و حکم به اثبات می‌رسد.

بدین ترتیب، محاسبه ضرایب نمایش نسبت به یک پایه یکامتعامد بسیار ساده است.

به‌زودی یک روش عمومی برای ساختن پایه‌های یکامتعامد برای زیرفضاهای خطی ارائه

خواهیم کرد، ولی مقدماً گزاره زیر را مطرح می‌کنیم:

گزاره ۱۱.۳.۷ اگر $\{b_1, \dots, b_k\}$ یک مجموعه متعامد متشکل از عناصر ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه

$\{b_1, \dots, b_k\}$ مستقل خطی است.

برهان. فرض کنید $c_1 b_1 + \dots + c_k b_k = 0$. باید ثابت کنیم همه c_i ها صفر هستند. برای

j ثابت و دلخواه، حاصل ضرب داخلی دو طرف رابطه در b_j را محاسبه می‌کنیم:

$$c_1(b_1 \cdot b_j) + \dots + c_k(b_k \cdot b_j) = 0$$

ولی $b_i \cdot b_j = 0$ مگر وقتی که $i = j$ که در این صورت $b_j \cdot b_j = |b_j|^2$ ناصفر است

زیرا همه $b_1, \dots, b_k$ ناصفر فرض شده‌اند. پس، از رابطه $c_j |b_j|^2 = 0$ نتیجه می‌گیریم که

$c_j = 0$ چون j در بین $1, \dots, k$ دلخواه بود، حکم به اثبات می‌رسد. ■

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به کمک هر پایه داده شده برای زیرفضای

خطی E ، یک پایه یکامتعامل برای E ساخت:

(۱۲.۳.۷) روش گرام-اشمیت. فرض کنید E یک زیرفضای خطی k -بعدی از $\mathbb{R}^n$ است و

$\{A_1, \dots, A_k\}$ یک پایه برای E می‌خواهیم یک پایه یکامتعامل $\{B_1, \dots, B_k\}$ برای E

بسازیم. برای این کار نخست یک پایه متعامد $\{B'_1, \dots, B'_k\}$ برای E به دست می‌آوریم،

سپس با قرار دادن $B'_i = \frac{1}{|B'_i|} B'_i$ ، یک پایه یکامتعامل حاصل می‌شود.

برای ساختن $\{B'_1, \dots, B'_k\}$ گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. قرار می‌دهیم $B'_1 = A_1$.

۲. برای ساختن B'_2 ، تصویر قائم A_2 بر $B'_1 = A_1$ را از A_2 کم می‌کنیم:

$$B'_2 = A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 \quad (15)$$

توجه کنید که $B'_1 \perp B'_2$ زیرا حاصل ضرب داخلی طرف راست در B'_1 صفر می‌شود.

به علاوه $B'_2 \neq 0$ زیرا اگر $B'_2 = 0$ ، آنگاه با توجه به اینکه $A_1 = B'_1$ ، یک رابطه

وابستگی خطی $A_1 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} A_1 = 0$ برای A_2 پدید می‌آید که خلاف فرض استقلال خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ و در نتیجه استقلال خطی هر زیرمجموعه آن، است. نتیجه اینکه بنابر گزاره، $\{B'_1, B'_2\}$ مستقل خطی است. ضمناً توجه کنید که $\langle B'_1, B'_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$ زیرا $B'_1 = A_1$ و طبق (۱۵) می‌توان نقش A_2 و B'_2 را با هم عوض کرد.

۳. این روش را می‌توان به استقراء ادامه داد. اگر $\{B'_1, \dots, B'_j\}$ ، $j < k$ ، به دست

آمده باشد که عناصر آن ناصفر و دو به دو بر هم عمود باشند به طوری که

$$\langle B'_1, \dots, B'_j \rangle = \langle A_1, \dots, A_j \rangle$$

$$B'_{j+1} = A_{j+1} - \frac{A_{j+1} \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 - \dots - \frac{A_{j+1} \cdot B'_j}{B'_j \cdot B'_j} B'_j \quad (۱۶)$$

در واقع در (۱۶) تصویر قائم A_{j+1} بر تک تک $B'_1, \dots, B'_j$ را از A_{j+1} کم کرده‌ایم. حاصل باید بر $B'_1, \dots, B'_j$ عمود باشد که این موضوع با محاسبه حاصل ضرب داخلی طرف راست (۱۶) در B'_i ، $i = 1, \dots, j$ ، مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که $B'_{j+1} \neq 0$ زیرا طبق فرض استقراء، $\langle B'_1, \dots, B'_j \rangle = \langle A_1, \dots, A_j \rangle$ و $\{A_1, \dots, A_j, A_{j+1}\}$ مستقل خطی است. بالاخره مجموعه متعامد $\{B'_1, \dots, B'_{j+1}\}$ که همه عناصرش ناصفرند، طبق ۱۱.۳.۷ مستقل خطی است و مجدداً با استدلال مشابه گام ۲ داریم $\langle B'_1, \dots, B'_{j+1} \rangle = \langle A_1, \dots, A_{j+1} \rangle$.

با ادامه این روش در k گام به مجموعه $\{B'_1, \dots, B'_k\}$ دست می‌یابیم که از عناصر ناصفر دویه‌دو بر هم عمود در E تشکیل شده است. چون تعداد عناصر برابر بعد E است و مجموعه طبق ۱۱.۳.۷ مستقل خطی است، به یک پایه متعامد برای E

دست یافته‌ایم.

مثال. نخست تحقیق می‌کنیم که مجموعه $\{A_1, A_2, A_3\}$ در $\mathbb{R}^4$ که در آن

$$A_3 = (1, 1, 3, 0), A_2 = (1, 0, 2, 0), A_1 = (0, 0, -1, 1)$$

مستقل خطی است، سپس پایه‌ای یکامتعامل برای $E = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ می‌سازیم. فرض

$$\text{کنید } c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0 \text{ پس}$$

$$(c_2 + c_3, c_3 - c_1 + 2c_2 + 3c_3, c_1) = (0, 0, 0, 0)$$

نتیجه اینکه $c_3 = 0$ و $c_1 = 0$ که از اینها به دست می‌آید: $c_2 = 0$ پس $\{A_1, A_2, A_3\}$ مستقل خطی است. E را زیرفضای متشکل از ترکیب‌های خطی A_1, A_2, A_3 می‌گیریم: $E = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$. توجه کنید که $\{A_1, A_2, A_3\}$ متعامد نیست، مثلاً

$$A_1 \cdot A_2 = -2 \neq 0. \text{ روش گرام-اشمیت را به کار می‌گیریم:}$$

$$B'_1 = A_1 = (0, 0, -1, 1)$$

$$B'_2 = (1, 0, 2, 0) - \frac{(1, 0, 2, 0) \cdot (0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1, 1)} (0, 0, -1, 1)$$

$$= (1, 0, 2, 0) + (0, 0, -1, 1)$$

$$\text{یا } B'_2 = (1, 0, 1, 1). \text{ بالاخره:}$$

$$B'_3 = (1, 1, 3, 0) - \frac{(1, 1, 3, 0) \cdot (0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1, 1)} (0, 0, -1, 1)$$

$$- \frac{(1, 1, 3, 0) \cdot (1, 0, 1, 1)}{(1, 0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1, 1)} (1, 0, 1, 1)$$

$$= (1, 1, 3, 0) + \frac{3}{4} (0, 0, -1, 1) - \frac{4}{3} (1, 0, 1, 1)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

پس مجموعه $\left\{ \left(0, 0, -1, 1 \right), \left(1, 0, 1, 1 \right), \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \right\}$ یک پایه متعامد برای E است، که می‌توان این مطلب را مستقیماً نیز تحقیق کرد. برای یافتن یک پایه یکامتعامد، هر یک از B'_i ها را در عکس طول آن ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ B_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ B_3 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{42}}, \frac{6}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}} \right) \end{aligned}$$

روش گرام-اشمیت در تکمیل یک مجموعه متعامد (یا یکامتعامد) برای تبدیل آن به یک پایه کامل نیز به‌کار گرفته می‌شود:

(۱۳.۳.۷) تکمیل مجموعه متعامد به پایه. فرض کنید E یک زیرفضای خطی k -بعدی $\mathbb{R}^n$ است و $\{B_1, \dots, B_l\}$ یک مجموعه یکامتعامد از عناصر E که $l < k$ نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با استفاده از روش ۱۲.۳.۷، عناصری چون $B_{l+1}, \dots, B_k$ از E یافت به طوری که $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک پایه یکامتعامد برای E باشد. چون $l < k$ ، عنصری مثل A_{l+1} از E یافت می‌شود که در $\langle A_1, \dots, A_l \rangle$ نیست. به روش گرام-اشمیت، با کم کردن تصویر قائم A_{l+1} بر $B_1, \dots, B_l$ ، عنصری چون B'_{l+1} به دست می‌آوریم به طوری که $\{B_1, \dots, B_l, B'_{l+1}\}$ متعامد و مستقل خطی باشد:

$$B'_{l+1} = A_{l+1} - (A_{l+1} \cdot B_1)B_1 - \dots - (A_{l+1} \cdot B_l)B_l$$

سپس با تعریف $B_{l+1} = \frac{1}{|B'_{l+1}|} B'_{l+1}$ ، یک مجموعه $\{B_1, \dots, B_l, B_{l+1}\}$ حاصل می‌شود که عناصر آن طول واحد دارند و دو به دو بر هم عمودند (یعنی یک مجموعه یکامتعامد است). اگر $l + 1 = k$ ، چون این مجموعه مستقل خطی به تعدادی برابر بعد E عضو

دارد، خود یک پایه یکامتعامد برای l می‌شود، $E = \langle B_1, \dots, B_{l+1} \rangle$. اگر $l + 1 < k$ ، $\langle B_1, \dots, B_{l+1} \rangle$ نیست. به روش بالا، از A_{l+2} عنصری چون E یافت می‌شود که در $\langle B_1, \dots, B_{l+1} \rangle$ نیست. به روش بالا، از A_{l+2} ، عنصری چون B_{l+2} می‌سازیم به طوری که $\{B_1, \dots, B_{l+2}\}$ یکامتعامد باشد. اگر این عمل را $(k-l)$ بار انجام دهیم به یک مجموعه یکامتعامد k عضوی $\{B_1, \dots, B_k\}$ می‌رسیم که بنابراین یک پایه برای E خواهد بود.

(۱۴.۳.۷) کاربرد در معادله زیرفضاها. زیرفضای مستوی E از $\mathbb{R}^n$ را یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم در صورتی که بعد E برابر $(n-1)$ باشد. بدین ترتیب ابرصفحه‌های $\mathbb{R}$ ، نقاط $\mathbb{R}$ هستند، ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^2$ ، خطوط راست در $\mathbb{R}^2$ ، و ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^3$ ، صفحات واقع در $\mathbb{R}^3$ می‌باشند. حال یک ابرصفحه E از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. اگر E° انتقال یافته E به $^\circ$ باشد، می‌توان برای E° یک پایه متعامد $\{B_1, \dots, B_{n-1}\}$ طبق روش گرام-اشمیت در نظر گرفت. با استفاده از ۱۳.۳.۷، عنصری چون $Q, Q \neq 0$ ، در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که بر $B_1, \dots, B_{n-1}$ عمود است و در نتیجه $\{B_1, \dots, B_{n-1}, Q\}$ یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^n$ است. توجه کنید که شرطی لازم و کافی برای اینکه عنصر x از $\mathbb{R}^n$ در E° باشد این است که

$$Q \cdot x = 0 \quad (17)$$

زیرا اگر بنویسیم $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i + c_n Q$ ، عناصر E° دقیقاً آن x هایی هستند که $c_n = 0$. پس اگر $x \in E$ ، آنگاه $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (B_i \cdot Q) = 0$. به عکس، اگر $Q \cdot x = 0$ ، داریم

$$0 = Q \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (Q \cdot B_i) + c_n (Q \cdot Q) = c_n$$

حال فرض کنید ابرصفحه E به شکل $E = p + \langle B_1, \dots, B_{n-1} \rangle$ توصیف شده

است که $p = (p_1, \dots, p_n)$ نقطه‌ای در E است. نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ در E است

اگر و تنها اگر $x - p \in E^\circ$ ، پس شرطی لازم و کافی برای $x \in E$ این است که

$$(x - p) \cdot Q = 0 \quad (18)$$

اگر n تایی Q را به $(Q_1, \dots, Q_n)$ نمایش دهیم، (۱۸) معادل است با

$$Q_1(x_1 - p_1) + \dots + Q_n(x_n - p_n) = 0 \quad (19)$$

این رابطه را معادله ابرصفحه گذرنده از p عمود بر Q می‌نامند. نمایش متداول خط در صفحه و صفحه در فضای سه‌بعدی حالت‌های خاص (۱۹) هستند. در مورد خط در صفحه، خطی که از نقطه (x_0, y_0) بگذرد و بر بردار $Q = (A, B)$ عمود باشد معادله $Ax + By + C = 0$ را دارد که می‌توان آن را به صورت $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ نوشت. به همین ترتیب در $\mathbb{R}^3$ صفحه گذرنده از (x_0, y_0, z_0) و عمود بر $Q = (A, B, C)$ به صورت $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ یا $Ax + By + C + D = 0$ نمایش داده می‌شود.

مثال. معادله ابرصفحه گذرنده از $(1, -1, 0, 2)$ و عمود بر خط راست

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4}{3}$$

را می‌نویسیم. از روش نوشتن صورت مقارن معادله خط راست به یاد می‌آوریم که خط راست فوق موازی $\langle (2, 1, -1, 3) \rangle$ است، پس طبق (۱۹) ابرصفحه موردنظر نمایش زیر را دارد:

$$2(x_1 - 1) + 1(x_2 + 1) + (-1)(x_3 - 0) + 3(x_4 - 2) = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 7 = 0$$

این یک زیرفضای مستوی سه‌بعدی $\mathbb{R}^4$ است.

ایده نمایش ابرصفحه به صورت (۱۹) را می‌توان به نمایش زیرفضاهای با ابعاد غیر

از $(n-1)$ تعمیم داد. فرض کنید E یک زیرفضای خطی k بعدی $\mathbb{R}^n$ باشد. مکمل قائم

E به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^\perp = \{x \in E \mid x \cdot e = 0, \forall e \in E\} \quad (20)$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود که مجموع دو عضو $E^\perp$ در $E^\perp$ است و مضرب حقیقی هر عضو

$E^\perp$ نیز در $E^\perp$ است، پس $E^\perp$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است. ضمناً $E \cap E^\perp = \{0\}$

زیرا اگر عضو e از E بر همه اعضای e عمود باشد، به‌خصوص داریم $|e|^2 = e \cdot e = 0$

و $e = 0$.

گزاره ۱۵.۳.۷ فرض کنید E یک زیرفضای خطی k بعدی $\mathbb{R}^n$ است. در این صورت:

الف) $E^\perp$ یک زیرفضای خطی $(n-k)$ بعدی $\mathbb{R}^n$ است و $E \cap E^\perp = \{0\}$

ب) $(E^\perp)^{\perp} = E$

برهان. الف) قبلاً توضیح دادیم که $E^\perp$ یک زیرفضای خطی است و $E \cap E^\perp = \{0\}$

فرض کنید $\dim E = k$. در این صورت $E = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ که $\{A_1, \dots, A_k\}$

مستقل خطی است. طبق روش گرام-اشمیت می‌توان پایه‌ای متعامد چون $\{B_1, \dots, B_k\}$

برای E در نظر گرفت. همین طبق ۱۳.۳.۷ می‌توان $\{B_1, \dots, B_k\}$ را به پایه‌ای متعامد

مانند $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_n\}$ برای $\mathbb{R}^n$ توسعه داد. ادعا می‌کنیم:

$$E^\perp = \langle B_{k+1}, \dots, B_n \rangle \quad (21)$$

اگر این ادعا ثابت شود نتیجه می‌شود که $\dim E^\perp = n-k$. نخست چون هر B_j ، $j > k$ ،

بر هر B_i ، $i \leq k$ ، عمود است، B_j بر هر ترکیب خطی $B_1, \dots, B_k$ نیز عمود است، پس

به ازای هر $j = k+1, \dots, n$ ، $B_j \in E^\perp$. نتیجه اینکه $\langle B_{k+1}, \dots, B_n \rangle \subset E^\perp$.
 حال فرض کنید $x \in E^\perp$. نشان می‌دهیم x ترکیبی خطی از $B_{k+1}, \dots, B_n$ است.
 چون در هر صورت $x \in \mathbb{R}^n$ و $\{B_1, \dots, B_n\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است، می‌توان نوشت:

$$x = x_1 B_1 + \dots + x_k B_k + x_{k+1} B_{k+1} + \dots + x_n B_n$$

چون $x \in E^\perp$ ، $x \cdot B_i = 0$ ، به ازای $i \leq k$. پس با ضرب داخلی دو طرف در B_i نتیجه می‌شود:

$$0 = x_i (B_i \cdot B_i)$$

زیرا $B_i \cdot B_j = 0$ اگر $i \neq j$ ، حال $B_i \neq 0$ چون B_i یک عضو مجموعه مستقل خطی $\{B_1, \dots, B_n\}$ است، پس لزوماً $x_i = 0$ به ازای $i \leq k$. بدین ترتیب، x ترکیبی خطی از $B_{k+1}, \dots, B_n$ است و حکم (الف) به اثبات می‌رسد. (ب) نخست طبق آنچه در (الف) گذشت، $E = \langle B_1, \dots, B_k \rangle$ و $E^\perp = \langle B_{k+1}, \dots, B_n \rangle$. پس طبق همان استدلال، $B_1, \dots, B_k$ یک پایه متعامد برای $(E^\perp)^\perp$ است و حکم نتیجه می‌شود. ■

به عنوان نتیجه، فرض کنید $B_1, \dots, B_k$ یک مجموعه مستقل خطی متعامد باشد. در این صورت، مجموعه x های متعلق به $\mathbb{R}^n$ که در روابط زیر صدق می‌کنند یک زیرفضای خطی $(n-k)$ بعدی $\mathbb{R}^n$ ، درواقع $\langle B_1, \dots, B_k \rangle^\perp$ ، است:

$$\begin{cases} B_1 \cdot x = 0 \\ \vdots \\ B_k \cdot x = 0 \end{cases} \quad (22)$$

به طور کلی، اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ هر مجموعه مستقل خطی k تایی در $\langle B_1, \dots, B_k \rangle$

باشد، دستگاه (۲۱) معادل است با

$$\begin{cases} A_1 \cdot x = 0 \\ \vdots \\ A_k \cdot x = 0 \end{cases} \quad (23)$$

زیرا هر A_i ترکیبی خطی از $B_1, \dots, B_k$ است و به عکس. بدین ترتیب نمایش (۲۲) تعمیم

(۱۷) به زیرفضاهای خطی $(n-k)$ بُعدی است. چون زیرفضاهای مستوی از انتقال

زیرفضاهای خطی به دست می‌آیند، هر زیرفضای مستوی $(n-k)$ بُعدی F گذرنده از

نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ را می‌توان برابر مجموعه x هایی گرفت که در دستگاهی چون

$$\begin{cases} A_1 \cdot (x - p) = 0 \\ \vdots \\ A_k \cdot (x - p) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

صدق می‌کنند. در اینجا $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است و اگر F° انتقال یافته F به

0 باشد داریم:

$$F = \langle A_1, \dots, A_k \rangle^\perp$$

دستگاه (۲۳) تعمیم (۱۸) یا (۱۹) است.

می‌توان (۲۳) را این‌گونه نیز تعبیر کرد: هر معادله (۲۳) یک ابرصفحه $\mathbb{R}^n$ ، یعنی یک

زیرفضای مستوی $(n-1)$ بُعدی $\mathbb{R}^n$ ، را نمایش می‌دهد که از x هایی تشکیل شده است

که $x - p$ بر یک A عمود است. اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی باشد، اشتراک این k

ابرصفحه یک زیرفضای مستوی $(n-k)$ بُعدی $\mathbb{R}^n$ است.

مثال زیرفضای خطی $E = \langle A_1, A_2 \rangle$ از $\mathbb{R}^4$ را در نظر بگیرید که در آن $A_1 = (2, 0, -1, 1)$ و $A_2 = (1, 1, 1, 0)$. توجه کنید که $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است (چرا؟)، پس E یک زیرفضای خطی دوبعدی است. می‌خواهیم معادله آن زیرفضای مستوی دوبعدی $\mathbb{R}^4$ را بیابیم که از $P = (1, 3, 0, -4)$ می‌گذرد و موازی مکمل قائم E است. طبق (۲۳) این زیرفضای مستوی از نقاط (x_1, x_2, x_3, x_4) تشکیل شده است که:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 1) + (0)(x_2 - 3) + (-1)(x_3 - 0) + (1)(x_4 + 4) = 0 \\ 1(x_1 - 1) + (1)(x_2 - 3) + (1)(x_3 - 0) + (0)(x_4 + 4) = 0 \end{cases}$$

یا معادل آن

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 + 2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

بدین ترتیب، صفحه مورد نظر به صورت دو ابرصفحه ظاهر می‌شود.

تمرین ۳.۷

۱. در هر مورد، تصویر قائم نقطه داده شده بر زیرفضای داده شده را به دست آورید:

الف) در $\mathbb{R}^3$ ، نقطه $(1, 1, -1)$ و صفحه $x + y + z + 2 = 0$.

ب) در $\mathbb{R}^4$ ، نقطه $(1, -1, 0, 2)$ و خط راست $\langle (2, 3, -1, 1) \rangle$.

ج) در $\mathbb{R}^4$ ، نقطه $(1, -1, 0, 2)$ و صفحه گذرنده از سه نقطه $(2, 2, -1, 1)$ ،

$(2, 0, 1, 0)$ و $(3, -1, 0, 2)$.

د) در $\mathbb{R}^4$ ، نقطه $(1, -1, 0, 2)$ و ابرصفحه $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0$

۲. در هر مورد، معادله یا معادلاتی را بنویسید که زیرفضای داده شده را توصیف می‌کنند:

الف) در $\mathbb{R}^4$ ، ابرصفحه‌ای که از $(1, -1, 2, 3)$ می‌گذرد و بر خط راست

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4 + 1}{3}$$

عمود است.

ب) در $\mathbb{R}^5$ ، خط راستی که از $(2, 1, -1, 0, 3)$ می‌گذرد و بر ابرصفحه

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + 1 = 0$$

عمود است.

ج) در $\mathbb{R}^4$ ، صفحه‌گذرنده از 0 و شامل خط راست

$$\frac{x_1 + 1}{-1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4 - 2}{3}$$

د) در $\mathbb{R}^4$ ، صفحه‌گذرنده از $(-1, -1, 0, 1)$ و موازی مکمل قائم صفحه‌گذرنده

$$\text{از } 0 \text{ و دو نقطه } (-1, 1, 2, 3) \text{ و } (2, -1, -1, 1).$$

۳. در هر مورد، مجموعه داده شده را به یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^4$ داده شده تکمیل کنید؛

سپس از پایه متعامد حاصل شده، یک پایه یکامتعامد بسازید. در مواردی که مجموعه

داده شده بیش از یک عضو دارد، نخست تحقیق کنید که مجموعه داده شده متعامد است.

الف) در $\mathbb{R}^4$ ، مجموعه $\{(1, 1, -1, 2)\}$

ب) در $\mathbb{R}^4$ ، مجموعه $\{(2, 0, 1, -1), (-1, 3, 3, 1)\}$

ج) در $\mathbb{R}^4$ ، مجموعه $\{(1, 1, -1, -1), (1, 0, 0, 1), (1, -1, 1, -1)\}$

۴. در هر مورد، مجموعه S داده شده را به یک پایه متعامد برای زیرفضای خطی E

داده شده تکمیل کنید. در هر مورد که $S \neq \emptyset$ ، نخست تحقیق کنید که عناصر S

عضو E هستند و در مواردی که S بیش از یک عضو دارد تحقیق کنید که مجموعه S متعامد است.

الف) E ابرصفحه 0 $x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$ در $\mathbb{R}^4$.

(ب) E ابرصفحه $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$ در $\mathbb{R}^4$ ، و

$$S = \{(1, 1, 1, 0), (-1, 1, 2, 1)\}$$

(ج) E ابرصفحه $3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ در $\mathbb{R}^4$ و $S = \{(1, -1, 0, -1)\}$

(د) E متمم قائم خط راست $\frac{x_1}{-1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{1}$ در $\mathbb{R}^4$ و $S = \{(2, 0, 1, 1), (2, 3, -2, -2)\}$.

(ه) E اشتراک دو ابرصفحه $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ و $2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$$\text{در } \mathbb{R}^4 \text{ و } S = \{(0, 1, 0, -1)\}$$

۵. فرض کنید E یک زیرفضای خطی k بُعدی $\mathbb{R}^n$ است، $k < n$ ، و $\{b_1, \dots, b_n\}$ یک پایه

یکامتعامد برای E . به ازای $u \in \mathbb{R}^n$ ، نشان دهید $u' = \sum_{i=1}^k (u \cdot b_i) b_i$ (تصویر قائم u بر

E) یگانه عنصر E است به طوری که $u - u'$ بر E عمود است، یعنی $(u - u') \cdot v = 0$

به ازای هر $v \in E$.

۶. در $\mathbb{R}^n$ ، نشان دهید تصویر قائم $u \in \mathbb{R}^n$ بر راستای v ، $v \neq 0$ ، نقطه اشتراک ابرصفحه

گذرنده از u و عمود بر خط راست $\langle v \rangle$ است.

۷. به ازای هر $u \neq 0$ و $v \neq 0$ در $\mathbb{R}^n$ نشان دهید

$$\left| \frac{u}{|u|} - |u|v \right| = \left| \frac{v}{|v|} - |v|u \right|$$

(راهنمایی: مجذور دو طرف را در نظر بگیرید.) تعبیر هندسی این تساوی چیست؟

۸. نشان دهید فاصله نقطه $(a_1, \dots, a_n)$ از ابرصفحه $A_0 + A_1x_1 + \dots + A_nx_n = 0$

در $\mathbb{R}^n$ برابر است با

$$\frac{|A_0 + A_1a_1 + \dots + A_na_n|}{\sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2}}$$

۹. فرض کنید p و L به ترتیب یک نقطه و یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ هستند. نشان دهید حداقل

فاصله p از نقاط L برای نقطه‌ای چون $q \in L$ به دست می‌آید که $q - p$ بر L عمود است. اگر

خط راست L را به صورت $a + \langle A \rangle$ نمایش دهیم، نشان دهید $q = a + \frac{(p - a) \cdot A}{|A|^2} A$.

۱۰. اگر $L = a + \langle A \rangle$ یک خط راست و E یک زیرفضای مستوی در $\mathbb{R}^n$ باشند، زاویه بین

L و E را برابر زاویه بین A و تصویر قائم آن روی E تعریف می‌کنیم.

الف) اگر $\{b_1, \dots, b_k\}$ یک پایه یکامتعامد برای E باشد، نشان دهید زاویه بین L و E

برابر است با

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k (A \cdot b_i)^2}}{|A|}$$

ب) اگر $a + \langle A \rangle$ یک خط راست L و $Q \cdot (x - p) = 0$ یک ابرصفحه E در $\mathbb{R}^n$

باشند، نشان دهید زاویه بین L و E برابر است با

$$\sin^{-1} \frac{A \cdot Q}{|A||Q|}$$

ج) زاویه بین خط راست $\frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4 + 2}{1}$ و ابرصفحه

$$0 = 5 - x_4 - 2x_3 + 2x_2 \text{ در } \mathbb{R}^4 \text{ را پیدا کنید.}$$

۱۱. فرض کنید l_1, l_2 دو خط متنافر در $\mathbb{R}^n$ هستند و $n \geq 3$. در تمرین ۹ بخش ۲.۷ آمده

است که زیرفضای مستوی سه‌بعدی منحصر به فردی از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که شامل l_1 و l_2

است.

الف) نشان دهید خط راست منحصر به فردی در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که l_1 و l_2 را قطع می‌کند

و بر هر دو عمود است.

ب) نشان دهید صفحه منحصر به فردی در $\mathbb{R}^4$ وجود دارد که l_1 و l_2 را قطع می‌کند و بر

هر دو عمود است.

(ج) در قسمت (ب)، وقتی l_1 محور x_1 و l_2 خط راست

$$\frac{x_1 + 1}{2} = \frac{x_2 - 3}{1} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{1}$$

باشد، صفحه ذکر شده را پیدا کنید.

۱۲. برای دو زیرفضای خطی E_1 و E_2 از $\mathbb{R}^n$ دو رابطه «قائم بودن» و «عمود بودن» را به صورت

زیر تعریف می‌کنیم. می‌گوییم E_1 و E_2 نسبت به هم قائم‌اند و می‌نویسیم $E_1 \perp E_2$

در صورتی که به ازای هر $u \in E_1$ و هر $v \in E_2$ داشته باشیم $u \perp v$. می‌گوییم E_1 بر

E_2 عمود است و می‌نویسیم $E_1 \perp E_2$ در صورتی که اگر E'_1 مکمل قائم E_2 در $E_1 \cap E_2$ در

E_1 باشد، داشته باشیم $E'_1 \perp E_2$.

(الف) اگر $E_1 \perp E_2$ ، نشان دهید $\{0\} = E_1 \cap E_2$.

(ب) نشان دهید $E_1 \perp E_2$ اگر و تنها اگر $E_1 \perp E_2$.

(ج) فرض کنید $\dim E_1 = 2$ و یک زیرفضای خطی یک بعدی E_3 از E_1 وجود داشته

باشد که $E_3 \perp E_2$. نشان دهید $E_1 \perp E_2$. اگر $\dim E_1 \geq 3$ و $\dim E_2 \geq 3$ ، مثالی

بیاورید که برای یک زیرفضای خطی یک بعدی E_3 از E_1 داشته باشیم $E_3 \perp E_2$ ولی

E_1 بر E_2 عمود نباشد.

۱۳. رابطه زیر را که به اتحاد متوازی الاضلاع معروف است به ازای هر u و v در $\mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

۱۴. رابطه زیر را که به اتحاد متوازی السطوح معروف است به ازای هر $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ ثابت کنید:

$$|u + v|^2 + |v + w|^2 + |w + u|^2 = |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 + |u + v + w|^2$$

۱۵. نابرابری زیر را که منسوب به Hlavka است ثابت کنید: به ازای هر $u, v, w \in \mathbb{R}^n$

$$|u + v| + |v + w| + |w + u| \leq |u| + |v| + |w| + |u + v + w|$$

۱۶. فرض کنید $d_1, \dots, d_n$ اعداد مثبت مفروضی باشند. به ازای $u, v \in \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$u * v = d_1 u_1 v_1 + \dots + d_n u_n v_n$$

الف) نشان دهید چهار ویژگی ابتدایی ضرب داخلی، ۲.۳.۷، برای $*$ برقرارند. بنابراین اگر $|u|$ را به صورت $|u| = \sqrt{u * u}$ تعریف کنیم، نابرابری‌های کوشی-شوارتز و مثلث برقرار می‌شوند، و اگر زاویه را به صورت $\cos^{-1} \frac{u * v}{|u||v|}$ تعریف کنیم، قضیه فیثاغورس همچنان برقرار می‌ماند.

ب) نشان دهید نسبت به ضرب داخلی $*$ ، محورهای مختصات همچنان دو به دو برهم عمودند. بردارهای واحد در جهت مثبت محورهای مختصات را پیدا کنید.

۱۷. اعداد حقیقی a, b, c و داده شده‌اند به طوری که $a > 0$ و $ac - b^2 > 0$. برای u و v در

$\mathbb{R}^2$ تعریف می‌کنیم

$$u * v = au_1 v_1 + b(u_1 v_2 + u_2 v_1) + cu_2 v_2$$

الف) نشان دهید چهار ویژگی ابتدایی ضرب داخلی، ۲.۳.۷، برای $*$ برقرارند.

ب) اگر $a = 2, b = c = 1$ ، زاویه بین در محور مختصات را نسبت به این ضرب داخلی پیدا کنید.

محور اصلی بحث ما در فصل‌های ۲ تا ۶، تابع‌های یک متغیری حقیقی، یعنی تابع‌هایی به شکل $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ بود که در آن S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. در نیمه دوم کتاب، تابع‌های $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ که در آن S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است موضوع اصلی خواهد بود و به خصوص مفهومیهای مشتق و انتگرال را که برای توابع چند متغیری، یعنی به ازای $n > 1$ ، از غنا و پیچیدگی بیشتری نسبت به توابع یک متغیری برخوردارند بررسی خواهیم کرد. برای این منظور، نخست لازم است شناخت کارسازی از ساده‌ترین حالت یعنی وقتی تابع از درجه یک یا به عبارت دیگر، «مستوی» یا «خطی» است به دست آوریم که در این حالت نیازی به مشتق و انتگرال نیست. در واقع همچنان که در حالت یک متغیری دیدیم، مشتق در یک نقطه، نوعی تقریب خطی برای تابع فراهم می‌کند که به کمک آن می‌توان به بعضی خواص تابع پی‌برد یا از آن برای محاسبه تقریبی بهره گرفت. در حالت یک متغیری، هر تابع مستوی را می‌توان به شکل $A(x) = mx + b$ نمایش داد که نمودار آن یک خط راست غیر قائم است و خواص آن به سادگی قابل بررسی است. هدف این بخش و بخش بعد دستیابی به تعمیم قابل استفاده‌ای از وضعیتی است که در آن به جای یک متغیر x ، n تایی $(x_1, \dots, x_n)$ قرار دارد. برای این کار استفاده از «جبر ماتریسی» سودمند واقع خواهد شد.

جبر ماتریسی

مقصود از یک ماتریس $m \times n$ (حقیقی) یک جدول A با m سطر و n ستون است که در هر خانه جدول یک عدد (حقیقی) وارد شده است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

عددهای a_{ij} را درایه‌های ماتریس می‌نامند. در این اندیس‌گذاری، اندیس اول (سمت چپ) شماره سطر را از بالا به پایین و اندیس دوم شماره ستون را از چپ به راست نشان می‌دهد. گاهی اوقات A را به $[a_{ij}]$ یا به طور کامل تر به $[a_{ij}]_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب یک ماتریس $m \times n$ با $m \times n$ عدد و ترتیب قرارگرفتن آنها در سطرها و ستون‌ها مشخص می‌شود همچنان که یک عضو $\mathbb{R}^n$ یک n تایی مرتب از اعداد حقیقی است یعنی ترتیب قرارگرفتن n مؤلفه نیز جزئی از تعریف n تایی است. برای ماتریسهای $m \times n$ عمل جمع و نیز ضرب در اعداد حقیقی مشابه عملهای متناظر در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود. بدین ترتیب اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس $m \times n$ باشند و $r \in \mathbb{R}$ ، تعریف می‌کنیم:

$$A + B = [c_{ij}] \quad (۲)$$

که در آن

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (۳)$$

و

$$rA = [ra_{ij}] \quad (۴)$$

خواص ابتدایی جمع ماتریسی

الف) تعویض پذیری (جابجایی بودن) اگر A و B ماتریسهای $m \times n$ باشند،

$$A + B = B + A$$

ب) شرکت پذیری اگر A ، B ، و C ماتریسهای $m \times n$ باشند، $A + (B + C) =$

$$(A + B) + C$$

ج) عنصر بی اثر ماتریس صفر $m \times n$ ، که همه درایه‌های آن صفر است و به 0 نمایش

داده می‌شود، یگانه ماتریس $m \times n$ ای است که به ازای هر ماتریس $m \times n$ چون A ,

$$A + 0 + 0 + A = A.$$

(د) عنصر قرینه برای ماتریس $A = [a_{ij}]$ ، ماتریس $B = [b_{ij}]$ که در آن $b_{ij} = -a_{ij}$,

$$A + B = B + A = 0.$$

اثبات خواص فوق همه سراسر است و از اینکه در جمع ماتریس‌ها عناصر متناظر با هم جمع می‌شوند نتیجه می‌شود.

خواص ابتدایی ضرب عدد در ماتریس

$$1 \cdot A = A \text{ (الف) برای هر ماتریس } A.$$

$$(rs)A = r(sA) \text{ (ب) برای هر ماتریس } A \text{ و همه اعداد حقیقی } r \text{ و } s.$$

$$(r+s)A = rA + sA \text{ (ج) برای هر ماتریس } A \text{ و همه اعداد حقیقی } r \text{ و } s.$$

$$r(A+B) = rA + rB \text{ (د) برای هر عدد حقیقی } r \text{ و هر دو ماتریس } m \times n \text{ چون } A$$

و B .

صحت خواص فوق از این نتیجه می‌شود که ضرب کردن عدد r در ماتریس A به معنای ضرب کردن تک‌تک درایه‌های A در r است.

دو عمل فوق کاملاً مانند عملیات مشابه برای n تایی‌های مرتب هستند و تنها چیزی

که ماتریس را از بردار متمایز می‌کند طریقه نمایش درایه‌ها در یک جدول $m \times n$ به جای

یک ردیف $m \times n$ تایی است. اکنون ضرب ماتریس‌ها را برای ماتریس‌های با اندازه مناسب

تعریف می‌کنیم.

اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ یک ماتریس $n \times p$ باشد،

ماتریس حاصل ضرب، $AB = [c_{ij}]$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (5)$$

توجه کنید که لازمه تعریف حاصل ضرب این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد زیرا تنها در این صورت (۵) معنی دارد. درواقع می‌توان c_{ij} را حاصل ضرب داخلی سطر i ام ماتریس A به عنوان n تایی $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ در ستون j ام ماتریس B ، به عنوان n تایی $(b_{j1}, \dots, b_{nj})$ ، تلقی کرد. انگیزه این تعریف را به زودی ملاحظه خواهیم کرد.

خواص ابتدایی ضرب ماتریس‌ها

الف) شرکت‌پذیری اگر A, B ، و C ماتریس‌هایی با اندازه، به ترتیب، $m \times n$ ، $n \times p$ و $p \times q$ باشند، آنگاه

$$(AB)C = A(BC)$$

ب) قانون توزیع‌پذیری (پخش‌ی) داریم

$$(A + B)C = (AC) + (BC), \quad A(B + C) = (AB) + (AC)$$

مشروط به اینکه اندازه ماتریس‌های فوق برای عملیات ذکر شده مناسب باشد.

ج) ماتریس واحد $n \times n$ ، $I_n = [\delta_{ij}]$ ، بدین صورت تعریف می‌شود که

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

برای هر ماتریس $m \times n$ چون A و هر ماتریس $n \times p$ مانند B ، داریم

$$A \cdot I_n = A, \quad I_n \cdot B = B$$

اثبات (الف) را می‌آوریم دوتای دیگر ساده‌ترند و اثبات آنها به خواننده وگذار می‌شود. برای

(الف) می‌نویسیم $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$, $AB = [d_{ij}]$, $BC = [e_{ij}]$,

$(AB)C = [x_{ij}]$ و $A(BC) = [y_{ij}]$. طبق تعریف حاصل ضرب ماتریس‌ها عمل

می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^p d_{ik} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} \left(\sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} e_{lj} \\ &= y_{ij} \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

در اینجا شایان ذکر است که اگر AB تعریف شده باشد، لزومی ندارد BA نیز تعریف

شدنی باشد زیرا تعریف AB مستلزم این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای

B باشد، و این امر، الزامی در مورد برابری تعداد ستون‌های B با تعداد سطرهای A پیش

نمی‌آورد. حتی اگر AB و BA هر دو تعریف شدنی باشند، لزومی ندارد هر دو به یک اندازه

باشند، مثلاً اگر A یک ماتریس $1 \times n$ و B یک ماتریس $n \times 1$ باشند، $n > 1$

$$A = [a_1 \dots a_n], \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

AB یک ماتریس 1×1 با تک درایه $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ است، درحالی که BA یک ماتریس $n \times n$ است که درایه سطر i ام و ستون j ام آن عبارت است از $b_j a_i$. حتی اگر A و B هر دو $n \times n$ باشند، لزومی بر تساوی AB و BA نیست، مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

البته در مورد ماتریس I_n و هر ماتریس $n \times n$ چون A ، از (ج) نتیجه می‌شود که $AI_n = I_n A (= A)$.

توجه کنید که برای یک n تایی مرتب از اعداد، مثلاً $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، اکنون سه نمایش ممکن داریم، یکی به صورت بالا که معمولاً تجسم برداری دارد، دیگر به صورت یک

ماتریس $1 \times n$ ، $[x_1 \dots x_n]$ ، و بالاخره به صورت یک ماتریس $n \times 1$ ، $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. اغلب

لازم است که بین این سه نمایش تمایز قائل شویم تا ابهامی در عملیات حاصل نشود. برای این منظور، هرگاه n تایی $x = (x_1, \dots, x_n)$ به صورت یک ماتریس $1 \times n$ نوشته شود، آن را به $\langle x |$ نمایش می‌دهیم، و هرگاه به صورت یک ماتریس $n \times 1$ نمایش داده شود، آن را به $|x\rangle$ نمایش می‌دهیم. بنابراین، حاصل ضرب داخلی x و y را می‌توان به صورت $\langle x | y \rangle$ یا $\langle y | x \rangle$ نیز نمایش داد.

مفهوم نگاشت خطی

با مقدمه بالا در مورد ماتریس‌ها، به موضوع اصلی بخش که «نگاشت‌های خطی» است می‌پردازیم. کلمات «تابع»، «نگاشت» و «تبدیل» در اینجا به صورت کاملاً مترادف به کار خواهند رفت هر چند که به لحاظ تاریخی گاهی تصاویر ذهنی متفاوتی از این کلمات القاء می‌شود. اگر S و T دو مجموعه باشند، مقصود از یک تابع (= نگاشت = تبدیل) از S به T ، قانونی چون f است که به هر عنصر s از S ، عنصر مشخصی مانند $f(s)$ از T نسبت می‌دهد. می‌نویسیم $f: S \rightarrow T$. در گذشته، کلمه «تابع» معمولاً وقتی که T برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، «تبدیل» در حالت $S = T$ یعنی برای تابعی از یک مجموعه به خود آن، و «نگاشت» برای تابع‌های $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (m, n بزرگتر از ۱) به کار می‌رفته است. ما چنین تمایزهایی قایل نمی‌شویم. برای تابع $f: S \rightarrow T$ ، مجموعه S را دامنه (= قلمرو)، و مجموعه T را بُرد می‌نامیم. مجموعه $\{f(s) | s \in S\}$ که یک زیرمجموعه T است، تصویر f ، یا تصویر S تحت f خوانده می‌شود. درواقع برای هر زیرمجموعه E از S ، تصویر E تحت f ، که به $f(E)$ نمایش داده می‌شود به صورت:

$$f(E) = \{f(s) | s \in E\}$$

تعریف می‌شود. تابع f را یک به یک می‌نامیم در صورتی که هرگاه $f(s_1) = f(s_2)$ ، نتیجه شود که $s_1 = s_2$ و f را پوشا می‌نامیم اگر $f(S) = T$. برای تابع‌های یک به یک و پوشا، $f: S \rightarrow T$ ، تابعی به نام وارون f (یا معکوس f) به صورت زیر تعریف می‌شود که آن را به $f^{-1}: T \rightarrow S$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $t \in T$ ، چون f پوشاست، عنصری چون s از S وجود دارد که $f(s) = t$. به علاوه چون f یک به یک فرض شده است، چنین عنصر s

به طور منحصر به فرد تعیین می شود، پس f^{-1} به صورت قانونی بی ابهام $f^{-1} = s$ تعریف شدنی است و داریم

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_T, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_S$$

که مقصود از id_X تابع همانی مجموعه X است: به ازای هر $x \in X$ ، $\text{id}_X(x) = x$.
نماد $f^{-1}(t)$ حتی وقتی f^{-1} تعریف شدنی نباشد نیز به کار می رود. مقصود از $f^{-1}(t)$ مجموعه نقاطی از S است که تحت f به t فرستاده (= نگاشته) می شوند، یعنی

$$f^{-1}(t) = \{s \in S \mid f(s) = t\}$$

$f^{-1}(t)$ را مجموعه تراز منسوب به t می خوانیم. به طور کلی، اگر Y زیرمجموعه ای از T باشد، زیرمجموعه $f^{-1}(Y)$ (تصویر وارون Y) یک زیرمجموعه S است که بدین صورت تعریف می شود:

$$f^{-1}(Y) = \{s \in S \mid f(s) \in Y\}$$

موضوع اصلی بحث ما بررسی تابع های $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (یا به طور کلی تر، تابع های $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $S \subset \mathbb{R}^n$) است. بدین ترتیب، چنین تابع f برای به هر n تایی مرتب از اعداد حقیقی در دامنه، یک m تایی مرتب از اعداد حقیقی نسبت می دهد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \quad (6)$$

هر y_i وابسته به $(x_1, \dots, x_n)$ است، پس درواقع ارائه f همانند ارائه m تابع $f_1, \dots, f_m$ ، هر یک از S به $\mathbb{R}$ است، $f_i(x_1, \dots, x_n) = y_i$ ، $i = 1, \dots, m$. (۶) را به صورت زیر

نیز می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = y_m \end{cases} \quad (۷)$$

گاهی می‌نویسیم $f = (f_1, \dots, f_m)$ و هر f_i را یک مؤلفه f می‌نامیم.

تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در (۶) یا (۷) را خطی می‌نامیم در صورتی که هر

$f_i(x_1, \dots, x_n)$ یک عبارت همگن درجه اول نسبت به $x_1, \dots, x_n$ باشد، یعنی

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \quad \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (۸)$$

مقصود از «همگن» این است که همه جملات سمت راست از یک درجه‌اند، در اینجا همه از درجه ۱، و به خصوص جمله ثابت وجود ندارد. اگر هر عبارت سمت راست را فقط از درجه ۱ در نظر بگیریم و محدودیت همگن بودن را حذف کنیم، یک عدد ثابت نیز ممکن است به هر جمله افزوده شود. این‌گونه تابع‌ها را **مستوی** می‌نامیم:

$$\begin{cases} y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \quad \dots \\ y_m = a_{m0} + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (۹)$$

مقدار تابع مستوی (۹) از انتقال مقدار تابع (۸) با m تایی ثابت $(a_{10}, \dots, a_{m0})$ به دست

می‌آید پس خواص تابع‌های مستوی به سادگی از خواص تابع‌های خطی نتیجه خواهند شد.

چند مثال

الف) هر تابع خطی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل $f(x) = mx$ است که در آن $m \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی داده شده است. تابع های مستوی $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل $g(x) = mx + b$ ، m و b اعداد حقیقی داده شده، می باشند.

ب) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x_1, x_2) = \left(2x_1, \frac{1}{4}x_2 \right)$$

هر دو عبارت $2x_1$ و $\frac{1}{4}x_2$ از درجه ۱ و همگن نسبت به (x_1, x_2) هستند، پس f خطی است. عملکرد این تابع بدین صورت است که فاصله هر نقطه را از محور x_2 به دو برابر افزایش می دهد و فاصله آن از محور x_1 را نصف می کند. محور x_1 با ضریب تجانس ۲ به خود آن نگاشته می شود (انبساط با ضریب ۲)، و محور x_2 با ضریب تجانس $\frac{1}{4}$ روی خود منقبض می شود. (شکل ۱)

ج) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$$

f خطی است. توجه کنید که هر خط راست افقی $x_2 = c$ به خود آن نگاشته می شود ولی هر نقطه روی این خط به اندازه مقدار c انتقال افقی می یابد. بدین ترتیب، خطوط راست

افقی بالای محور x_1 به طرف راست و خطوط افقی پایین محور x_1 به سمت چپ روی خود می‌لغزند. نقاط محور x_1 سر جای خود ثابت می‌مانند.

(د) (دوران حول $\circ$ در $\mathbb{R}^2$) دوران حول $\circ$ در $\mathbb{R}^2$ با زاویه α را در نظر بگیرید. اگر $x = (x_1, x_2)$ نقطه‌ای غیر از $\circ$ در صفحه باشد، نمایش آن به صورت قطبی را در نظر بگیرید: $x_1 = |x| \cos \theta$, $x_2 = |x| \sin \theta$.

اگر دوران زاویه α حول $\circ$ را به $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نمایش دهیم، نمایش قطبی $f(x_1, x_2)$ می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (|x| \cos(\theta + \alpha), |x| \sin(\theta + \alpha)) \\ &= (|x| \cos \theta \cos \alpha - |x| \sin \theta \sin \alpha, |x| \sin \theta \cos \alpha + |x| \cos \theta \sin \alpha) \\ &= ((\cos \alpha)x_1 - (\sin \alpha)x_2, (\sin \alpha)x_1 + (\cos \alpha)x_2) \end{aligned}$$

هر یک از دو مؤلفه f یک تابع درجه یک همگن نسبت به (x_1, x_2) است، پس f خطی است.

(ه) (تصویر روی یک زیرفضای مختصاتی) فرض کنید $n > m$ و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

این تابع خطی است و عملکرد آن این است که نقطه $(x_1, \dots, x_n)$ را به $(x_1, \dots, x_m)$

متشکل از m مؤلفه اول آن، می‌نگارد. مثلاً به ازای $n = 3$ و $m = 2$ $f(x, y, z) = (x, y)$

تصویر (x, y, z) روی صفحه xy است.

(و) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, -x_2)$$

چون هر مؤلفه f یک عبارت درجه یک همگنی نسبت به (x_1, x_2) است، این تابع خطی است.

(ز) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 x_2)$$

این تابع خطی نیست زیرا مؤلفه دوم f ، یعنی $x_1 x_2$ از درجه یک نیست.

اکنون ارتباط میان دو بحث این بخش را بیان می‌کنیم. توجه کنید که می‌توان (۸) را

به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

یا به طور فشرده:

$$|y\rangle = A|x\rangle \quad (11)$$

یعنی محاسبه مقدار یک تابع خطی بدین صورت حاصل می‌شود که ضرایب a_{ij} در (۸) را

در یک ماتریس $m \times n$ قرار می‌دهیم و حاصل ضرب این ماتریس را در ستون $|x\rangle$ محاسبه

می‌کنیم. بدین ترتیب، یک تناظر یک به یک میان تابع‌های خطی $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های $m \times n$ ایجاد می‌شود.

برای مثال‌های خطی ۱.۴.۲.۷، ماتریس‌های مربوط به ترتیب عبارتند از:

(الف) $[m]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

(د)

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

(ه)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(و)

با نگاه کردن به ماتریس متناظر به یک تابع خطی می‌توان عملکرد تابع خطی بر اعضای

پایه متداول، یعنی $e_1, \dots, e_n$ ، را فوراً دریافت. توجه کنید که اگر ماتریس $A = [a_{ij}]$

از سمت چپ در ستون $|e_j\rangle$ ضرب شود، ستون j ام ماتریس $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ به دست می‌آید.

بدین ترتیب، برای نوشتن ماتریس مربوط به یک تابع خطی f ، کافی است $f(e_1), \dots,$

$f(e_n)$ را محاسبه کنیم و نتایج حاصل را به ترتیب در ستون‌های اول تا n ام درج کنیم.

ویژگی خطی بودن یک تابع را می‌توان به صورت دیگری نیز بیان کرد که اغلب در اثبات

قضایا سودمند واقع می‌شود:

گزاره ۱.۴.۷ نگاشت $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است اگر و تنها اگر واجد دو شرط زیر باشد

(الف) به ازای هر x و x' در $\mathbb{R}^n$ ، $f(x + x') = f(x) + f(x')$.

(ب) به ازای هر x در $\mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$ ، $f(rx) = rf(x)$.

برهان. اگر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ خطی باشد، ماتریس متناظر با آن، A ، را در نظر می‌گیریم.

عملکرد f روی عناصر x از $\mathbb{R}^n$ به صورت

$$|f(x)\rangle = A|x\rangle \quad (۱۲)$$

است. بنابراین

$$|f(x + x')\rangle = A|x + x'\rangle$$

$$= A|x\rangle + A|x'\rangle \quad (\text{بنابر قانون توزیع پذیری ضرب ماتریسی})$$

$$= |f'(x)\rangle + |f(x')\rangle$$

پس (الف) برقرار است. همین‌طور

$$|f(rx)\rangle = A|rx\rangle$$

$$= r(A|x\rangle)$$

و (ب) برقرار است. به عکس، فرض کنید شرط‌های (الف) و (ب) برای تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

برقرار باشند. باید نشان دهیم ماتریسی $m \times n$ مثل، A وجود دارد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$

داریم $|f(x)\rangle = A|x\rangle$. از بحث قبل از گزاره به یاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس یک تابع خطی به ترتیب از مؤلفه‌های $f(e_1)$ تا $f(e_n)$ تشکیل می‌شوند. بنابراین نامزد واضحی برای ماتریس موردنظر A وجود دارد که باید در مورد آن ادعای $|f(x)\rangle = A|x\rangle$ را ثابت کرد. ماتریس A را این‌گونه در نظر می‌گیریم که ستون j ام آن، به‌ازای $j = 1, \dots, n$ ، برابر $|f(e_j)\rangle$ باشد. برای $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ داریم

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= |f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\rangle \\ &= |x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)\rangle \quad (\text{طبق الف و ب}) \\ &= |x_1 f(e_1)\rangle + \dots + |x_n f(e_n)\rangle \\ &= x_1 |f(e_1)\rangle + \dots + x_n |f(e_n)\rangle \\ &= x_1 (A|e_1\rangle) + \dots + x_n (A|e_n\rangle) \\ &= A|x_1 e_1\rangle + \dots + A|x_n e_n\rangle \\ &= A|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\rangle \quad (\text{طبق قانون توزیع‌پذیری ضرب ماتریسی}) \\ &= A|x\rangle \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. ■

بدین ترتیب برای تحقیق خطی بودن یک تابع، تحقیق دو ویژگی (الف) و (ب) کافی است و نیازی به یافتن صریح ماتریس مربوط نیست.

این بخش را با ارائه تعبیری از ضرب ماتریسی در ارتباط با نگاشتهای خطی به پایان می‌بریم. تعریف ضرب ماتریسی در نگاه اول دور از ذهن و فاقد انگیزه مشخص به نظر می‌رسد، ولی گزاره زیر نشان می‌دهد که حاصل ضرب دو ماتریس نمایشگر ترکیب تابع‌های

خطی متناظر است.

گزاره ۴.۴.۷ فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ نگاشت‌هایی خطی هستند. در این صورت

$g \circ f$ نیز یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^p$ است. به علاوه اگر A ماتریس f و B ماتریس g باشد، BA ماتریس $g \circ f$ است.

برهان. خطی بودن $g \circ f$ را می‌توان با استفاده از ضوابط (۳.۴.۷) تحقیق کرد:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + x') &= g(f(x + x')) \\ &= g(f(x) + f(x')) \quad (\text{طبق ۳.۴.۷، الف}) \\ &= g(f(x) + g(f(x'))) \quad (\text{طبق ۳.۴.۷، الف}) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(x')\end{aligned}$$

و به همین ترتیب:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(rx) &= g(f(rx)) \\ &= g(rf(x)) \quad (\text{طبق ۳.۴.۷، ب}) \\ &= rg(f(x)) \quad (\text{طبق ۴.۴.۷، ب}) \\ &= r(g \circ f)(x)\end{aligned}$$

حال فرض کنید C ماتریس تابع خطی $f \circ g$ است. در این صورت:

$$\begin{aligned} C|x\rangle &= |(g \circ f)(x)\rangle \\ &= |g(f(x))\rangle \\ &= B|f(x)\rangle \\ &= B|(A|x\rangle)\rangle \\ &= BA|x\rangle \quad (\text{بنا بر شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی}) \end{aligned}$$

پس $C|x\rangle = BA|x\rangle$ ، یعنی اثر ضرب کردن دو ماتریس BA و C بر هر ستون $|x\rangle$ یکی است. اگر x را به ترتیب برابر e_1 تا e_n در نظر بگیریم نتیجه می‌شود که ستونهای BA و C یکی هستند، پس $C = BA$.

■

با توجه به گزاره فوق، چنانچه نتیجه عملکرد دو نگاشت خطی که به دنبال هم عمل می‌کنند موردنظر باشد، کافی است ماتریس‌های مربوط را در هم ضرب کنیم. این مطلب انگیزه تعریف ضرب ماتریسی است و در ضمن نشان می‌دهد که چرا برای قابل تعریف بودن SA لازم است که تعداد ستون‌های B برابر تعداد سطرهای A باشد.

تمرین ۴.۷

۱. صحت قانون توزیع‌پذیری ضرب ماتریسها، ۳.۱.۴.۷ (ب)، را تحقیق کنید.

۲. صحت ۳.۱.۴.۷ (ج) را تحقیق کنید.

۳. همهٔ ماتریس‌های 2×2 حقیقی M را پیدا کنید که

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴. همهٔ ماتریس‌های 2×2 حقیقی M را پیدا کنید که

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M = M$$

۵. برای هر یک از ماتریس‌های داده شده A در زیر، همهٔ ماتریس‌های M را پیدا کنید که

جذر A هستند، یعنی $MM = A$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}), \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}), \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۶. برای هر یک از ماتریس‌های زیر یا یک جذر پیدا کنید یا نشان دهید ماتریس داده شده

جذر ندارد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}), \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\pi \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{د}), \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{و}), \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

$$۷. \text{ ماتریس } M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \text{ را در نظر بگیرید.}$$

الف) نشان دهید اگر برای ماتریس ۲×۲ ، A ، $AM = ۰$ ، آنگاه $A = ۰$.

ب) ماتریس ۳×۳ ناصفر B ای پیدا کنید که $MB = ۰$.

۸. تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را که توسط ماتریس M تمرین ۷ تعریف می‌شود در نظر بگیرید. نشان دهید f پوشاست ولی یک به یک نیست.

۹. نشان دهید تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ مستوی است اگر و تنها اگر واجد شرط زیر باشد:

به‌ازای هر $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$ ، رابطه

$$f(rx - ry + z) = rf(x) - rf(y) + f(z)$$

برقرار باشد.

۱۰. نشان دهید که تحت اثر هر تابع مستوی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، تصویر هر خط راست یا

یک خط راست است یا یک نقطه. اگر l و l' دو خط موازی در $\mathbb{R}^n$ باشند، نشان

دهید $f(l)$ و $f(l')$ یا هر دو نقطه‌اند و یا یک زوج خط موازی.

۱۱. نگاشت مستوی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت $f(x) = L(x) + B$ تعریف می‌کنیم

که در آن L نگاشت خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است و $B = (-۱, -۱)$. تصویر

مربع $S = \{(x, y) \mid |x| < ۱, |y| < ۱\}$ را تحت اثر f توصیف کنید.

۱۲. نگاشت مستوی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت $f(x) = L(x) + B$ تعریف می‌کنیم

که در آن L نگاشت خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ است و $B = (۲, ۰)$. تصویر قرص

واحد $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq ۱\}$ را تحت اثر f توصیف کنید.

۱۳. نگاشت مستوی $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: f را به صورت $f(x) = L(x) + B$ تعریف می‌کنیم

که در آن L نگاشت خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ است و $B = (1, 1 - \sqrt{2})$.
 نشان دهید f دوران با زاویه $\frac{\pi}{4}$ حول $(1, 1)$ است.

۱۴. مجموعه ماتریسهای 2×2 حقیقی به شکل

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

را به xi نمایش می‌دهیم.

الف) نشان دهید مجموع و حاصلضرب دو عضو ξ در ξ است.

ب) تابع $H : \xi \rightarrow \mathbb{C}$: H را به صورت $H(M) = \alpha + i\beta$ تعریف می‌کنیم. نشان

دهید H تابعی یک به یک و پوشاست.

ج) اگر M_1 و M_2 عناصر xi باشند و H طبق (ب)، نشان دهید:

$$H(M_1 M_2) = H(M_1) \cdot H(M_2) \text{ و } H(M_1 + M_2) = H(M_1) + H(M_2)$$

۱۵. نشان دهید هر تابع خطی $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: L با ماتریسی به شکل M در تمرین ۱۴

ترکیب یک دوران حول O و یک تجانس حول O است.

۵.۷ نگاشت خطی (۲)

مثالهای تابع خطی در بخش پیشین نشان داد که تابعهای خطی از تنوع قابل ملاحظه‌ای

برخورد دارند. علیرغم این تنوع، مشترکاتی نیز میان تابعهای خطی هست که مورد استفاده

ما در بخشها و فصلهای آینده خواهد بود. در این بخش به توصیف دسته مهمی از این

مشترکات می‌پردازیم.

یک نکته مشترک ابتدایی میان همه نگاشتهای خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ این است که f عنصر o در $\mathbb{R}^n$ را به عنصر o در $\mathbb{R}^m$ می نگارد زیرا اگر هر ماتریس $m \times n$ را در ستون n تایی صفر ضرب کنیم ستون m تایی صفر حاصل می شود. گزاره زیر عملکرد تابع خطی روی هرگونه زیرفضای مستوی را توصیف می کند.

گزاره ۱.۵.۷ فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت خطی است. در این صورت:

الف) تحت اثر f ، تصویر هر زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ (به ترتیب، هر زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$) یک زیرفضای خطی (به ترتیب، یک زیرفضای مستوی) است.

ب) اگر E_1 و E_2 دو زیرفضای مستوی هم بعد و موازی $\mathbb{R}^n$ باشند، $f(E_1)$ و $f(E_2)$ دو زیرفضای مستوی هم بعد و موازی (یا منطبق) $\mathbb{R}^m$ هستند.

برهان. الف) نخست فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است، باید ثابت کنیم $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ است. طبق گزاره ۱.۲.۷ باید ثابت کنیم که اگر $y \in f(E)$ و $r \in \mathbb{R}$ ، آنگاه ry نیز عضوی از $f(E)$ است، و اگر $y_1, y_2 \in f(E)$ ، آنگاه $y_1 + y_2 \in f(E)$. حال اگر $y \in f(E)$ ، عضوی چون x از E وجود دارد که $y = f(x)$ پس

$$\begin{aligned} ry &= rf(x) \\ &= f(rx) \quad (\text{طبق ۳.۴.۷ ب}) \end{aligned}$$

ولی $rx \in E$ طبق ۱.۲.۷ (ب)، پس $ry \in f(E)$. به همین ترتیب اگر $y_1, y_2 \in f(E)$ ،

عضوهای x_1 و x_2 از E موجودند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ ؛ پس

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= f(x_1) + f(x_2) \\ &= f(x_1 + x_2) \quad (\text{طبق ۳.۴.۷ الف}) \end{aligned}$$

ولی $x_1 + x_2 \in E$ طبق ۱.۲.۷ (الف)، بنابراین $y_1 + y_2 \in f(E)$.

حال فرض کنید E یک زیرفضای مستوی است، پس $E = a + E^\circ$ که E° انتقال یافته E به مبدأ است و $a \in E$. از آنجا که $f(E) = f(a) + f(E^\circ)$ و طبق آنچه در بالا ثابت شد، $f(E^\circ)$ یک زیرفضای خطی است، $f(E)$ یک زیرفضای مستوی است. حکم (ب) هم با همین نوع استدلال ثابت می‌شود. اگر E_1 و E_2 دو زیرفضای هم‌بعد موازی باشند، چون انتقال یافته آنها به مبدأ یکی است، به ازای a مناسب در $\mathbb{R}^n$ داریم $E_2 = a + E_1$. بنابراین، $f(E_2) = f(a) + f(E_1)$ ، یعنی $f(E_2)$ از انتقال $f(E_1)$ توسط $f(a)$ به دست می‌آید. در حالتی که $f(a) \in f(E_1)$ ، نتیجه می‌گیریم $f(E_2) = f(E_1)$ ، و در غیراین صورت، $f(E_1)$ و $f(E_2)$ موازی و هم‌بعد هستند. ■

مثال. تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را که با ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم. تصویر هر نقطه (x, y, z) تحت f را به (X, Y, Z) نمایش می‌دهیم؛ پس $(X, Y, Z) = f(x, y, z)$ و

$$X = -x + y, \quad Y = 2x + y - z, \quad Z = 5x + y - 2z \quad (۱)$$

توجه کنید که $Z = 2Y - X$ ؛ پس کل $\mathbb{R}^3$ به یک صفحه گذرنده از $^\circ$ (زیرفضای خطی دوبعدی) یعنی $^\circ = x_1 - 2x_2 + x_3$ نگاشته می‌شود. حال اثر f را بر چند صفحه خاص در نظر می‌گیریم. نخست صفحه مختصاتی xy ، متشکل از نقاط $(x, y, 0)$ ، را در نظر

بگیرید. طبق (۱) داریم

$$f(x, y, \circ) = (-x + y, 2x + y, 5x + y)$$

ادعا می‌کنیم هر نقطه صفحه $\circ = x_1 - 2x_2 + x_3$ در تصویر صفحه مختصاتی xy قرار

دارد. اگر $(x_1, x_2, -x_1 + 2x_2)$ یک چنین نقطه‌ای باشد، باید نشان دهیم دستگاه زیر

دارای جواب بر حسب x و y است:

$$\begin{cases} -x + y = x_1 \\ 2x + y = x_2 \\ 5x + y = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

دو معادله اول جواب منحصر به فرد $x = \frac{-x_1 + x_2}{2}, y = \frac{2x_1 + x_2}{3}$ را دارند که با

جایگزینی ملاحظه می‌کنیم در معادله سوم نیز صدق می‌کند. پس درواقع صفحه مختصاتی

xy به طور یک به یک بر صفحه تصویر همه $\mathbb{R}^3$ نگاشته می‌شود. محاسبه مشابه با صفحات

مختصاتی xy و zx نشان خواهد داد که هر یک از این صفحات نیز به طور یک به یک بر

$f(\mathbb{R}^3)$ نگاشته می‌شود. حال تصویر صفحه $\circ = x_1 + 2x_2 - x_3$ را تحت f بررسی

می‌کنیم. نقاط این صفحه به شکل $(x, y, x + 2y)$ هستند. طبق (۱) داریم

$$f(x, y, x + 2y) = (-x + y, x - y, 3x - 3y)$$

ملاحظه می‌کنیم که هر نقطه تصویر ضربی از سه تایی $(-1, 1, 3)$ است، یعنی تصویر

زیرصفحه، خط راست

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$$

است. بدین ترتیب، تصویر صفحاتی که تاکنون بررسی کردیم، بعضی یک صفحه (دوبعدی) و بعضی یک خط راست (یکبعدی) می‌شوند. سؤالی که مطرح می‌شود این است که چه قانونی بر تعیین بعد تصویر حاکم است؟ بررسی‌های بعدی این موضوع را روشن خواهد ساخت.

برای تابع خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، هسته f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و به $\ker(f)$ نمایش می‌دهیم:

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \circ\} \quad (۲)$$

گزاره ۲.۵.۷ $\ker(f)$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است.

برهان. اگر x و x' در $\ker(f)$ باشند، باید نشان دهیم $x + x'$ در $\ker(f)$ است، و اگر به علاوه $r \in \mathbb{R}$ ، باید نشان دهیم rx نیز در $\ker(f)$ است:

$$f(x + x') = f(x) + f(x') \quad (\text{طبق ۳.۴.۷ الف})$$

$$= \circ + \circ = \circ$$

$$f(rx) = rf(\circ) \quad (\text{طبق ۳.۴.۷ ب})$$

$$= r\circ = \mathbf{0}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. ■

حال طبق ۱.۵.۷ (ب)، اگر L از انتقال هسته f با یک عضو ثابت $\mathbb{R}^n$ به دست آید،

تصویر L تحت f موازی و هم‌بعد تصویر هسته تحت f است، ولی هسته به تک نقطه $\{\circ\}$ نگاشته می‌شود، بنابراین تصویر L یک تک نقطه است.

گزاره ۳.۵.۷ اگر K هسته f باشد و $a \in \mathbb{R}^n$ ، تصویر $a + K$ تحت f یک تک نقطه $\{f(a)\}$ است.

به عکس، اگر b نقطه‌ای در $\mathbb{R}^m$ باشد، $f^{-1}(b)$ (مجموعه تراز منسوب به b) یا تهی است یا یک زیرفضای مستوی هم‌بعد و موازی K است.

برهان. قسمت اول حکم را در بالا توضیح دادیم و برای قسمت دوم فرض کنید $f^{-1}(b)$ تهی نباشد، آنگاه عنصری چون a در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $f(a) = b$. نشان می‌دهیم:

$$f^{-1}(a) = a + K$$

نخست به ازای هر عنصر $a + K$ ، یعنی عنصر به شکل $a + x$ که $x \in K$

$$f(a + x) = f(a) + f(x)$$

$$= f(a)$$

$$= b$$

به عکس، اگر $a' \in f^{-1}(b)$ می‌نویسیم:

$$a' = a + (a' - a) \quad (۳)$$

$a' - a$ در هسته است زیرا

$$f(a' - a) = f(a') - f(a)$$

$$= b - b$$

$$= 0$$

بنابراین (۳) نشان می‌دهد که هر عضو $f^{-1}(b)$ مجموع a با یک عنصر هسته است و اثبات

■

حکم کامل می‌شود.

نتیجه‌های اخیر تصویری ساده و به لحاظی کامل از عملکرد یک تابع خطی

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ به دست می‌دهند. طبق (۱.۵.۷)، کل $\mathbb{R}^n$ به یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$

نگاشته می‌شود، هسته به نقطه $\mathbf{0}$ و زیرفضاهای موازی و هم‌بعد هسته هر یک به تمامی به یک نقطه تصویر نگاشته می‌شوند. از هر نقطه $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای منحصر به فرد هم‌بعد و موازی K می‌گذرد که همه نقاط آن به یک نقطه واحد در $f(\mathbb{R}^n)$ نگاشته می‌شوند. می‌توان عملکرد تابع خطی را این‌گونه تجسم کرد که در اثر آن، هر یک از زیرفضاهای مستوی موازی و هم‌بعد هسته به یک نقطه در $\mathbb{R}^m$ منقبض می‌شود و حاصل یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ است. به نظر می‌آید که در اثر انقباض این زیرفضاهای مستوی به تک نقطه‌ها، باید تصویر $\mathbb{R}^n$ تحت f ، بعدی برابر $(n - k)$ داشته باشد که k بعد هسته است. درواقع حکم کلی زیر برقرار است:

شکل ۷-۱۰

قضیه ۴.۵.۷ فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است، دراین صورت:

$$\dim E = \dim f(E) + \dim(E \cap \ker(f)) \quad (۴)$$

(در اینجا $\dim$ مخفف dimension به معنای بُعد است)

برهان. نخست توجه کنید که طبق ۱۳.۲.۷، اشتراک هر دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است؛ بنابراین، $E \cap \ker(f)$ یک زیرفضای خطی است و بُعد آن معنی دارد. درحالتی که $E \cap \ker f = E$ ، لزوماً $E \subset \ker f$ ؛ پس $f(E) = \{0\}$ و رابطه (۴) برقرار است. پس فرض کنید $E \cap \ker f$ همه E نباشد، مثلاً $\dim(E \cap \ker f) = l$ ، توجه کنید که می‌توان پایه‌ای چون $\{A_1, \dots, A_k\}$ برای E انتخاب کرد و $\dim E = k$ و $l < k$.

کرد که $\{A_1, \dots, A_l\}$ پایه‌ای برای $E \cap \ker f$ باشد. مثلاً اگر $\{A_1, \dots, A_l\}$ یک پایه یکامتعامد برای $E \cap \ker f$ باشد، می‌توان به روش ۱۲.۲.۷، $\{A_1, \dots, A_l\}$ را به یک پایه (یکامتعامد) برای تمام E توسعه داد. حال نشان می‌دهیم $\dim f(E) = k - l$ که از آن (۴) نتیجه خواهد شد. عضو دلخواه x از E را به صورت ترکیبی خطی از اعضای پایه می‌نویسیم:

$$x = t_1 A_1 + \dots + t_l A_l + t_{l+1} A_{l+1} + \dots + t_k A_k$$

پس

$$f(x) = t_1 f(A_1) + \dots + t_l f(A_l) + t_{l+1} f(A_{l+1}) + \dots + t_k f(A_k)$$

چون $A_1, \dots, A_k$ اعضای هسته f هستند، $f(A_i) = 0$ به ازای $i \leq l$ ، بنابراین:

$$f(x) = t_{l+1} f(A_{l+1}) + \dots + t_k f(A_k)$$

یعنی هر عضو $f(E)$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $f(A_{l+1}), \dots, f(A_k)$ نوشت. اگر نشان دهیم این مجموعه $k - l$ تایی مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که $\{f(A_{l+1}), \dots, f(A_k)\}$ یک پایه برای $f(E)$ است و حکم نتیجه می‌شود. فرض کنید برای ضرایب $c_{l+1}, \dots, c_k$ رابطه زیر برقرار است:

$$c_{l+1} f(A_{l+1}) + \dots + c_k f(A_k) = 0$$

پس چون f خطی است

$$f(c_{l+1} A_{l+1} + \dots + c_k A_k) = 0$$

بدین ترتیب، $c_{l+1} A_{l+1} + \dots + c_k A_k$ باید عضو $E \cap \ker f$ باشد. ولی $A_1, \dots, A_l$

یک پایه برای $E \cap \ker f$ است، بنابراین ضرایب $c_1, \dots, c_l$ وجود دارند که

$$c_{l+1}A_{l+1} + \dots + c_k A_k = c_1 A_1 + \dots + c_l A_l$$

یا

$$c_1 A_1 + \dots + c_l A_l - c_{l+1} A_{l+1} - \dots - c_k A_k = 0$$

از استقلال خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ نتیجه می‌گیریم که همه c_i ها، به خصوص $c_{l+1}, \dots, c_k$ باید صفر باشند. پس استقلال خطی $\{f(A_{l+1}), \dots, f(A_k)\}$ و حکم قضیه نتیجه می‌شوند. ■

با توجه به قضیه فوق اکنون می‌توانیم مثال پس از گزاره ۱.۵.۷ را به طول کامل‌تر بررسی کنیم. به خصوص این موضوع که تصویر زیرفضاهای دوبعدی مختلف بعضی یک‌بعدی و بعضی دوبعدی می‌شوند روشن خواهد شد. برای این کار نخست هسته تابع خطی داده شده

در مثال را پیدا می‌کنیم. باید عناصر $x \in \mathbb{R}^3$ را که

$$A|x\rangle = |0\rangle \quad (5)$$

مشخص کنیم. در اینجا A ماتریس 3×3 داده شده در مثال است. به‌ازای $x = (x_1, x_2, x_3)$

از (۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

بنابراین، $x_2 = x_1$ و $x_3 = 3x_1$ ، پس هسته f خط راست زیر است:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{3} \quad (6)$$

حال اگر E یک زیرفضای خطی دوبعدی $\mathbb{R}^3$ باشد، طبق قضیه ۴.۵.۷ بُعد $f(E)$ برابر $l - 2$ است که l بُعد $E \cap \ker f$ است. چون $\ker f$ یک بُعدی است، دوامکان وجود دارد، یا اشتراک E با $\ker f$ برابر $\{0\}$ است که در این صورت $\dim f(E) = 2$ ، و یا اینکه E شامل خط راست (۶) است و تصویر آن یک بُعدی است، سایر صفحاتی که در آن مثال در نظر گرفته شدند با (۶) فقط در 0 اشتراک دارند و تصویر آنها دوبعدی است.

در همین مثال، اگر E یک صفحه دلخواه، یعنی زیرفضای مستوی دوبعدی باشد (نه لزوماً صفحه گذرنده از 0)، در مورد تصویر آن چه می‌توان گفت؟ طبق ۱.۵.۷ (ب)، $f(E)$ یک زیرفضای مستوی موازی و هم‌بعد با $f(E^\circ)$ است که E° انتقال یافته E به 0 است. بنابراین، برای یافتن بُعد $f(E)$ باید E را به 0 منتقل کرد تا زیرفضای E° به دست آید و آنگاه:

$$\dim f(E) = \dim E - \dim(E^\circ \cap \ker f) \quad (7)$$

اکنون به ذکر چند کاربرد بحث این بخش می‌پردازیم. در گزاره‌های زیر نداشت خطی

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

موردنظر است.

گزاره ۵.۵.۷ شرطی لازم و کافی برای یک به یک بودن f این است که $\ker(f) = \{0\}$. در این حالت لزوماً $n \leq m$.

برهان. اگر عنصری چون $x \neq 0$ در هسته باشد، چون $f(x) = f(0) = 0$ ، f یک به یک نیست. حال فرض کنید $\ker f = \{0\}$ و $f(x_1) = f(x_2)$ چون f خطی است نتیجه می‌گیریم که $f(x_1 - x_2) = 0$ ، یعنی $x_1 - x_2 \in \ker(f)$ ، بنابراین طبق فرض، $x_1 = x_2$ و یک به یک بودن به اثبات می‌رسد. در این حالت، $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = n$ ، و

چون $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ ، نتیجه می‌گیریم که $n \leq m$.

در فرمول (۴)، وقتی $E = \mathbb{R}^n$ داریم:

$$n = \dim(f(\mathbb{R}^n)) + \dim(\ker(f))$$

پوشا بودن f معادل این است که $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ ، یعنی $n = m + \dim(\ker(f))$. بنابراین:

گزاره ۶.۵.۷ شرطی لازم و کافی برای پوشا بودن f این است که $\dim(\ker(f)) = n - m$. در این حالت، لزوماً $n \geq m$.

برای تابع‌های $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، یعنی در حالت $m = n$ ، از (۵.۵.۷) و (۶.۵.۷) نتیجه می‌شود که

گزاره ۷.۵.۷ تابع خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

می‌دانیم که شرطی لازم و کافی برای وجود تابع وارون، یک به یک و پوشا بودن تابع است. بدین ترتیب وقتی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک (معادلاً پوشا) باشد، تابعی چون $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

ادعا می‌کنیم که f^{-1} نیز خطی است. فرض کنید $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. چون f پوشاست، x_1 و

x_2 وجود دارند که به طوری $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ بنابراین

$$f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(f(x_1) + f(x_2))$$

$$= f^{-1}(f(x_1 + x_2)) \quad (\text{چون } f \text{ خطی است})$$

$$= x_1 + x_2$$

$$= f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$$

به همین ترتیب، اگر $y = f(x)$ و r یک عدد حقیقی باشد،

$$f^{-1}(ry) = f^{-1}(rf(x))$$

$$= f^{-1}(f(rx)) \quad (\text{چون } f \text{ خطی است})$$

$$= rx$$

$$= rf^{-1}(y)$$

چون f^{-1} خطی است، به آن ماتریسی $n \times n$ ، B ، منسوب می شود. اگر A ماتریس

تابع خطی f باشد، رابطه B را با A بررسی می کنیم. داریم $f \circ f^{-1} = I_n$ و

$f^{-1} \circ f = I_n$ که در آن I_n تابع همانی $\mathbb{R}^n$ است. از آنجا که ماتریس I_n برابر

است و ترکیب تابع های خطی متناظر با حاصل ضرب ماتریس های مربوط است، داریم:

$$BA = I_n, \quad AB = I_n$$

چنین ماتریس B ای را وارون یا معکوس ماتریس A می خوانند و معمولاً آن را به A^{-1}

نمایش می‌دهند.

رابطه با دستگاه معادلات خطی

مطالبی که در این بخش بررسی شد بازتاب و تعبیر مستقیمی در مورد دستگاههای معادلات درجه یک دارد و به عکس بحث در مورد این دستگاهها را می‌توان در چارچوب نگاشتهای خطی انجام داد. موضوع را با یک مثال آموزنده آغاز می‌کنیم.

مثال. فرض کنید E_1 و E_2 دو صفحه (زیرفضای مستوی دوبعدی) در $\mathbb{R}^4$ هستند. نشان می‌دهیم:

الف) اگر $E_1 \cap E_2$ یک تک نقطه، E'_1 یک صفحه موازی E_1 ، E'_2 یک صفحه موازی E_2 باشد آنگاه $E'_1 \cap E'_2$ نیز یک تک نقطه است.

ب) اگر $E_1 \cap E_2$ یک خط راست باشد، صفحه‌ای چون E'_1 موازی E_1 و صفحه‌ای چون E'_2 موازی E_2 وجود دارند به طوری که $E'_1 \cap E'_2$ تهی است.

فرض کنید E_1 صفحه گذرنده از p به موازات A_1 و A_2 باشد که $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است، و E_2 صفحه گذرنده از q به موازات B_1 و B_2 ، که $\{B_1, B_2\}$ مستقل خطی است. اینکه E_1 و E_2 دقیقاً یک نقطه مشترک دارند بدین صورت قابل بیان است که چهارتایی منحصر به فرد (s_1, s_2, t_1, t_2) از اعداد حقیقی وجود دارد که

$$p + s_1 A_1 + s_2 A_2 = q + t_1 B_1 + t_2 B_2 \quad (A)$$

حال p, q, A_1, A_2, B_1, B_2 همگی عناصر $\mathbb{R}^4$ ، یعنی چهارتایی،

هستند. می‌نویسیم $p = (p_1, \dots, p_4)$ ، $q = (q_1, \dots, q_4)$ ، $A_1 =$

$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$ ، $A_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$ ، $B_1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41})$ ، $B_2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42})$

پس اگر مؤلفه‌های اول تا چهارم دو طرف (A) را برابر قرار

دهیم حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} p_1 + s_1 a_{11} + s_2 a_{12} = q_1 + t_1 b_{11} + t_2 b_{12} \\ p_2 + s_1 a_{21} + s_2 a_{22} = q_2 + t_1 b_{21} + t_2 b_{22} \\ p_3 + s_1 a_{31} + s_2 a_{32} = q_3 + t_1 b_{31} + t_2 b_{32} \\ p_4 + s_1 a_{41} + s_2 a_{42} = q_4 + t_1 b_{41} + t_2 b_{42} \end{cases} \quad (9)$$

با انتقال جملات دارای t_1, t_2, s_1 و s_2 به سمت چپ و سایر جملات به سمت راست،

دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_{11} & -b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & -b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & -b_{31} & -b_{32} \\ a_{41} & a_{42} & -b_{41} & -b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \\ q_4 - p_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ماتریس 4×4 سمت چپ یک تابع خطی $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ تعریف می‌کند. اینکه E_1 و E_2 فقط یک نقطه اشتراک دارند بدین صورت قابل بیان است که یک و تنها یک نقطه $\mathbb{R}^4$ به نقطه $(q-p)$ نگاشته می‌شود، یا مجموعه تراز، $f^{-1}(q-p)$ تک عضوی است. می‌دانیم که همه مجموعه‌های تراز ناتهی از انتقال هسته به دست می‌آیند و با هم موازی هستند. پس در این حالت هسته برابر $\{0\}$ است و در نتیجه f یک به یک و پوشاست. حال اگر به جای E_1 و E_2 ، دو زیرفضای موازی جایگزین کنیم، فقط طرف راست (10) عوض می‌شود، ولی از آنجا که f یک به یک پوشاست، مجدداً جواب منحصر به فردی چون (s_1, s_2, t_1, t_2) برای دستگاه به دست می‌آید، یعنی اشتراک دو زیرفضای موازی نیز یک تک نقطه است.

اکنون حالتی را در نظر بگیریم $E_1 \cap E_2$ یک خط راست است. به زبان تابع‌های

خطی، این مطلب را می‌توان به این صورت بیان کرد که مجموعه تراز $f^{-1}(q - p)$ یک بعدی است. نتیجه می‌شود که هسته تابع خطی $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ یک بعدی است. بنابراین، f یک به یک نیست و طبق (۸.۵.۷) پوشا نیست. پس طرف راست (10) را می‌توان طوری اختیار کرد که مجموعه تراز منسوب به آن تهی باشد. مثلاً با ثابت نگاهداشتن p و تغییر مناسب q ، می‌توان به چنین نقطه‌ای رسید. نتیجه اینکه با انتقال موازی مناسب E_1 و E_2 می‌توان به دو صفحه با اشتراک تهی رسید.

مثال بالا به خوبی نشان می‌دهد که بسیاری از سؤال‌های مربوط به دستگاه‌های معادلات خطی را اکنون می‌توان به کمک اطلاعاتی که در مورد تابع‌های خطی کسب کرده‌ایم جواب داد. دستگاه کلی m معادله n مجهولی درجه یک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (11)$$

یا به طور خلاصه:

$$A|x\rangle = |b\rangle \quad (12)$$

که در آن $A = [a_{ij}]$. دستگاهی را که طرف چپ آن مانند بالا باشد و طرف راست آن از صفر تشکیل شده باشد، دستگاه همگن وابسته به (۱۱) یا (۱۲) می‌نامند:

$$A|x\rangle = |0\rangle \quad (13)$$

جدول زیر رابطه بین جبر حل دستگاه‌های معادلات بالا و هندسه تابع‌های خطی را

خلاصه می‌کند:

هندسه	جبر
یافتن مجموعه تراز منسوب b	حل (۶) به ازای b داده شده
ناهنی بودن مجموعه تراز منسوب به b	وجود جواب به ازای b داده شده
پوشا بودن تابع خطی f	وجود جواب به ازای هر b
هسته $\{0\}$	یگانگی جواب در صورت وجود
یافتن هسته	حل دستگاه همگن

چند نمونه از احکام جبری را که اکنون می‌توان درستی آنها را با توسل به هندسه

تابع‌های خطی نشان داد در زیر می‌آوریم. مثال‌های دیگری در تمرین‌ها آمده‌اند.

الف) اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهول‌ها باشد، می‌توان b را طوری اختیار کرد که دستگاه جواب نداشته باشد.

برهان. این حالت $m > n$ است که طبق ۶.۵.۷ تابع خطی مربوط پوشا نیست، یعنی $b \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $f^{-1}(b)$ تهی است.

■

ب) اگر $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \bar{x}$ یک جواب (۱۱) باشد، همه جواب‌های (۱۱) عبارت‌اند از $x + \bar{x}$ که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ یک جواب دستگاه همگن متناظر است.

برهان. طبق فرض، $f(\bar{x}) = b$. اگر x یک جواب دستگاه همگن باشد، x در هسته f است، پس $f(x + \bar{x}) = f(x) + f(\bar{x})$. به عکس، فرض کنید $\bar{\bar{x}}$ جواب دیگری از (۱۱) باشد، آنگاه

$$f(\bar{\bar{x}} - \bar{x}) = f(\bar{\bar{x}}) - f(\bar{x}) = b - b = 0.$$

پس $\bar{\bar{x}} - \bar{x}$ در هسته است و می‌توان نوشت $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}} - \bar{x}) + \bar{x}$.

حالت مهم $m = n$ (تساوی تعداد مجهولها و تعدا معادله‌ها) را در نظر بگیرید. دیدیم که در این حالت، شرایط زیر معادل هستند: f یک به یک، f پوشا، f وارون پذیر، هسته $f = \{0\}$. در این حالت، ماتریس مربوط، A ، وارون پذیر است و با ضرب کردن دو طرف (۱۲) در A^{-1} از سمت چپ، جواب (منحصر به فرد) دستگاه به دست می‌آید:

$$|x\rangle = A^{-1}b \quad (14)$$

تمرین ۵.۷

- در هر مورد، برای تابع خطی مربوط به ماتریس داده شده، هسته و تصویر تابع را توصیف کنید و مشخص کنید که تابع خطی یک به یک هست یا نیست، پوشا هست یا نیست، و اگر تابع خطی وارون پذیر است، ماتریس وارون تابع را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(الف)} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{(ب)} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\
 \text{(ج)} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{(د)} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 \text{(هـ)} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{(و)} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{(ز)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{(ح)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۲. نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تصویر خط راست $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ و صفحه $x + 2y - 2z - 4 = 0$ را تحت اثر f پیدا کنید.

۳. برای تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ در تمرین ۲ نشان دهید که تصویر محور x_1 و تصویر صفحه x_2x_3 تحت اثر f بر یکدیگر عمود نیستند.

۴. تابع خطی $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

بُعد هسته و بُعد تصویر تابع را تعیین کنید. تصویر ابرصفحه $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0$ را تحت اثر f پیدا کنید.

۵. نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) صفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f یک خط راست باشد و صفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f یک صفحه باشد.
ب) ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f یک صفحه باشد و ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^4$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f سه‌بُعدی باشد.

۶. تابع خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ماتریس $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ داده شده است که در آن a و b

اعداد حقیقی مفروضی هستند و $a^2 + b^2 \neq 0$. نشان دهید اگر دو خط راست l_1

و l_2 در $\mathbb{R}^2$ با یکدیگر زاویه α بسازند، $f(l_1)$ و $f(l_2)$ هم دو خط راست در $\mathbb{R}^2$

هستند که با یکدیگر زاویه α می‌سازند.

۷. تابع خطی $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید که با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

که در اینجا $0 \neq a^2 + b^2 + c^2$. نشان دهید هسته g یک بُعدی است و تصویر $\mathbb{R}^3$ تحت اثر g صفحه گذرنده از 0 و عمود بر هسته است.

۸. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است و E_1 و E_2 دو زیرفضای مستوی موازی (نه لزوماً هم‌بُعد) در $\mathbb{R}^n$ هستند. نشان دهید $f(E_1)$ و $f(E_2)$ یا موازی هستند و یا یکی زیرمجموعه‌ای از دیگری است.

۹. فرض کنید تابع خطی $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ چنان باشد که $f \circ f$ تابع ثابت با مقدار صفر است. نشان دهید بُعد هسته f بزرگتر یا مساوی n است. به ازای $n = 2$ ، مثال‌هایی از این نوع تابع بیاورید که بُعد هسته ۲ و ۳ باشد.

۱۰. فرض کنید تابع خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ دارای هسته $(n-1)$ بُعدی است. اگر $f \circ f$ تابع ثابت صفر نباشد، نشان دهید ترکیب k باره f با خود آن، $f \circ \dots \circ f$ ، $k > 2$ ، نیز تابع ثابت صفر نیست.

۱۱. فرض کنید برای ماتریس $n \times n$ ، $A \neq 0$ ، ماتریسی $n \times n$ ، $B \neq 0$ ، وجود دارد که $AB = 0$. نشان دهید ماتریسی $n \times n$ ، $C \neq 0$ ، وجود دارد که $CA = 0$. (راهنمایی: تابع‌های خطی متناظر با ماتریس‌ها را در نظر بگیرید.)

۱۲. فرض کنید E_1 و E_2 دو ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ هستند.

الف) اگر $E_1 \cap E_2$ تهی نباشد، چه امکاناتی برای بُعد این اشتراک وجود دارد؟ به طور دقیق توضیح دهید.

ب) در حالتی که $E_1 \cap E_2$ از بُعد $(n-2)$ باشد، اگر E'_1 موازی و هم بُعد E_1 و E'_2 موازی و هم بُعد E_2 باشد، نشان دهید $E'_1 \cap E'_2$ نیز $(n-2)$ بُعدی است.

۱۳. اگر دستگاه به ازای یک $b = (b_1, \dots, b_m)$ جواب یکتا داشته باشد، آنگاه به ازای هر b یا جواب ندارد و یا جواب یکتا دارد.

۱۴. اگر دستگاه به ازای یک $b = (b_1, \dots, b_m)$ بینهایت جواب داشته باشد، آنگاه به ازای هر b که دستگاه جواب داشته باشد بینهایت جواب دارد.

۱۵. اگر دستگاه به ازای بیش از یک b جواب داشته باشد، آنگاه به ازای بینهایت b جواب دارد.

۱۶. در صورتی که حکم زیر درست است آن را ثابت کنید و در صورتی که نادرست است مثال ناقضی ارائه کنید.

«اگر تعداد مجهولها، n ، بیش از تعداد معادلات، m ، باشد، دستگاه به ازای هر b جواب دارد.»

۱۷. در صورتی که حکم زیر درست است آن را ثابت کنید و در صورتی که نادرست است، مثال ناقضی ارائه کنید:

«اگر تعداد مجهولها، n ، بیش از تعداد معادلات، m ، باشد، به ازای هر b که دستگاه جواب داشته باشد بینهایت جواب دارد.»

در میان مفاهیم هندسی که تا اینجا در مورد اشیاء مسطح یا مستوی بررسی کرده‌ایم، صحبتی از «مساحت» و «حجم» نشده است. درواقع اگر «طول» را اندازه‌اشیاء یک بُعدی، «مساحت» را اندازه‌اشیاء دوبعدی و «حجم» را اندازه‌اشیاء سه‌بُعدی تلقی کنیم، این سؤال پیش می‌آید که برای قطعه‌ای از یک زیرفضای مستوی k بُعدی از $\mathbb{R}^n$ ، «محتوای k بُعدی» یا «اندازه k بُعدی» آن قطعه را چگونه باید سنجید؟ برای پاسخگویی به این نیاز لازم است به تعریف مشترکی از طول، مساحت، و حجم دست یابیم و این تعریف را به ابعاد دلخواه تعمیم دهیم. در این بخش به کمک «ضرب خارجی بردارها» در $\mathbb{R}^3$ این مفاهیم را تا بُعد سه به گونه‌ای تدوین می‌کنیم که قابلیت تعمیم به بُعدهای بالاتر را داشته باشند. در بخش ۷.۷ مفهوم حجم n بُعدی مطرح خواهد شد.

(۱.۶.۷) تعریف. برای $u, v \in \mathbb{R}^3$ ، $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$ ، حاصل ضرب خارجی یا حاصل ضرب برداری، $u \cdot v$ ، عضوی از $\mathbb{R}^3$ به صورت زیر است:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (۱)$$

احکام ۲.۶.۷ تا ۷.۶.۷ در زیر ویژگی‌های ابتدایی ضرب خارجی را بیان می‌کنند.

(۲.۶.۷) پادتقارن. برای هر u و v در $\mathbb{R}^3$:

$$u \times v = -v \cdot u \quad (۲)$$

به خصوص برای هر عضو u از $\mathbb{R}^3$:

$$u \times u = 0 \quad (۳)$$

برهان. در فرمول (۱) اگر نقش u و v با هم تعویض شود، هر مؤلفه در (۱-) ضرب

می‌شود. اگر در (۲) قرار دهیم $u = v$ ، نتیجه می‌شود که $u \times u = -(u \times u)$ ، پس

لزوماً $u \times u = 0$.

۳.۶.۷ (قوانین توزیع پذیری) به ازای هر $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$(u+v) \times w = (u \times w) + (v \times w), \quad u \times (v+w) = (u \times v) + (u \times w) \quad (۴)$$

برهان. این دو قانون با محاسبه سر راست از (۱) حاصل می شوند. محاسبه به خواننده واگذار می شود.

۴.۶.۷ (۴.۶.۷) به ازای $u, v \in \mathbb{R}^3$ و $r \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(ru) \times v = r(u \times v), \quad u \times (rv) = r(u \times v) \quad (۵)$$

برهان. اگر در (۱) یکی از u یا v در r ضرب شود، هر مؤلفه طرف راست در r ضرب می شود.

۵.۶.۷ (۵.۶.۷) به ازای هر $u, v \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$v \times (u \times v) = 0, \quad u \cdot (u \times v) = 0 \quad (۶)$$

برهان. این نیز یک محاسبه سر راست است:

$$\begin{aligned} u \cdot (u \times v) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب اتحاد دیگر ثابت می‌شود. ■

(۶.۶.۷) (رابطه با ضرب داخلی) به‌ازای هر $u, v \in \mathbb{R}^3$:

$$|u \times v|^2 + |u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2 \quad (۷)$$

برهان. توجه کنید که مقصود از $|u \times v|$ طول سه‌تایی $u \times v$ است و مقصود از $|u \cdot v|$

قدرمطلق عدد $u \cdot v$. اتحاد (۶) به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{aligned} \quad (۸)$$

■

صحت این اتحاد جبری را می‌توان با محاسبهٔ سراسرست تحقیق کرد.

اگر $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد، مثلاً $v = ru$ ، به‌ازای عدد حقیقی r ، آنگاه از (۵) و (۲) نتیجه می‌شود $u \cdot v = 0$ ، البته این مطلب از (۷) نیز نتیجه می‌شود زیرا اگر $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد، آنگاه $|u \cdot v| = |u||v|$. حال فرض کنید $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، به‌خصوص $u \neq 0$ و $v \neq 0$. در این صورت هر یک از u و v یک نیم‌خط تعریف می‌کند (مضارب مثبت این بردار). α را زاویهٔ بین دو نیم‌خط می‌گیریم: از آنجا که $u \cdot v = |u||v| \cos \alpha$ ، از (۷) نتیجه می‌شود که

$$|u \times v| = |u||v| \sin \alpha \quad (۹)$$

عبارت طرف راست درواقع مساحت متوازی‌الاضلاع است که توسط u و v ایجاد می‌شود. به‌طور دقیقتر، مقصود از متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط u و v مجموعهٔ زیر است:

$$P(u, v) = \{t_1 u + t_2 v \mid 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1\}$$

توجه کنید که ارتفاع وارد بر «قاعده» u دارای طول $|v| \sin \alpha$ است، پس

$$|u||v| \sin \alpha \text{ درواقع مساحت } P(u, v) \text{ است.}$$

شکل ۷-۱۱

بدین ترتیب، تاکنون به این نتایج در مورد $u \times v$ رسیده‌ایم: اگر $\{u, v\}$ وابسته خطی باشد، $u \times v$ برابر 0 است و اگر $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، آنگاه $u \times v$ بر صفحه u, v عمود است (بنابر (۶) و طول آن برابر $|u||v| \sin \alpha$ است. درواقع، حالت وابستگی خطی را می‌توان حالت خاص حکم دوم دانست زیرا در آن صورت $\sin \alpha = 0$ و چون $u \times v = 0$ ، این حاصل ضرب بر هر صفحه شامل u و v عمود است (به مفهوم صفر شدن ضرب داخلی). در حالت استقلال خطی، دقیقاً دو سه‌تایی با طول $|u||v| \sin \alpha$ وجود دارند که بر صفحه u و v عمودند. برای مشخص کردن اینکه کدام یک برابر $u \times v$ است از مفهوم «دترمینان» کمک می‌گیریم.

اگر $u = (u_1, u_2)$ و $v = (v_1, v_2)$ دو عنصر $\mathbb{R}^2$ باشند، مؤلفه‌های u و v را به ترتیب در ستون‌های اول و دوم یک ماتریس 2×2 به صورت زیر قرار می‌دهیم

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس M ، یا $\det M$ ، بنابر تعریف برابر $u_1 v_2 - u_2 v_1$ است. معنی

هندسی این عبارت را بررسی می‌کنیم. اگر (v_1, v_2) را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت عقربه ساعت

دوران دهم بردار v' به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$v' = (v_2, -v_1)$$

شکل ۷-۱۲

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} u_1 v_2 - u_2 v_1 &= u \cdot v' \\ &= |u||v'| \cos \angle(u, v') \\ &= |u||v| \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= |u||v| \sin \alpha \end{aligned}$$

قدرمطلق عبارت سمت راست اندازه مساحت $P(u, v)$ و علامت آن به علامت $\sin \alpha$ وابسته است. اگر $\{u, v\}$ وابسته خطی باشد، $\sin \alpha = 0$ و $\det M$ صفر می‌شود. ولی چنانچه $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، اگر زاویه α (از نیم خط تعیین شده توسط u تا نیم خط تعیین شده توسط v) بین 0° و π° باشد، $\sin \alpha > 0$ و $\det M$ مثبت است. ولی اگر زاویه α بین π و 2π باشد، $\sin \alpha < 0$ و $\det M$ منفی است.

یک زوج مرتب برداری (u, v) در صفحه مانند (الف) در شکل (۳) را راستگرد و یک زوج مرتب برداری مانند (ب) در شکل (۳) را چپگرد می‌نامند. تمایز این دو وضعیت را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد. چنانچه با گردش کوچکتر از یک نیم صفحه در جهت مثلاًثاتی از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب راستگرد خوانده می‌شود ولی چنانچه با

شکل ۷-۱۳

گردش کوچکتر از یک نیم صفحه در جهت عقربه ساعت از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب چپگرد محسوب می شود.

با توجه به بحث بالا، می توان زوج مرتب (u, v) را راستگرد (به ترتیب چپگرد) تعریف کرد اگر $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) بنابراین $\det M$ دو اطلاع زیر را به دست می دهد:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر مساحت متوازی الاضلاع $P(u, v)$ است.
 ب) $\det M = 0$ اگر و تنها اگر $\{u, v\}$ وابسته خطی باشد، $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) اگر و تنها اگر زوج مرتب (u, v) راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.
 این ملاحظات را می توان به $\mathbb{R}^3$ تعمیم داد. فرض کنید $u = (u_1, u_2, u_3)$ ، $v = (v_1, v_2, v_3)$ و $w = (w_1, w_2, w_3)$ عناصر $\mathbb{R}^3$ باشند. مقصود از متوازی السطوح ایجاد شده توسط u, v و w مجموعه زیر است:

$$P(u, v, w) = \{t_1 u + t_2 v + t_3 w \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, 3\} \quad (10)$$

اگر سه تایی $\{u, v, w\}$ وابسته خطی باشد، سه بردار در یک صفحه قرار می گیرند و حجم این متوازی السطوح صفر است. در غیر این صورت، برای به دست آوردن حجم باید مساحت یک قاعده (مثلاً متوازی الاضلاع $P(u, v)$) را در ارتفاع وارد بر این قاعده ضرب کنیم. ارتفاع وارد بر قاعده $P(u, v)$ برابر طول تصویر قائم بر امتداد عمود بر صفحه توسط

u, v است. امتداد عمود بر صفحه توسط $u \times v$ تعیین می‌شود، پس

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{|w \times (u \times v)|}{|u \times v|^2} |u \times v|$$

و در نتیجه چون مساحت قاعده برابر $|u \times v|$ است:

$$\begin{aligned} P(u, v, w) \text{ حجم} &= |w \times (u \times v)| \\ &= |w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)| \end{aligned} \quad (11)$$

حال مانند حالت دوبعدی، مؤلفه‌های سه بردار u, v, w را به ترتیب در ستون‌های یک

ماتریس 3×3 قرار می‌دهیم:

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

طبق تعریف، دترمینان ماتریس 3×3 بالا برابر است با

$$\det M = u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 + v_1w_2u_3 - v_1w_3u_2 + w_1u_2v_3 - w_1u_3v_2 \quad (12)$$

که می‌توان آن را به صورت‌های زیر نیز نوشت:

$$\det M = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) \quad (13)$$

یا

$$\det M = v_1(w_2u_3 - w_3u_2) + v_2(w_3u_1 - w_1u_3) + v_3(w_1u_2 - w_2u_1) \quad (14)$$

و یا

$$\det M = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1) \quad (15)$$

از مقایسه (۱۵) و (۱۱) می‌بینیم که قدرمطلق دترمینان M همان حجم متوازی‌السطوح $P(u, v, w)$ است. در مورد علامت، سه‌تایی مرتب (u, v, w) در $\mathbb{R}^3$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم در صورتی که $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$). توجه کنید که $\det M = 0$ اگر و تنها اگر سه‌تایی $\{u, v, w\}$ وابسته خطی باشد زیرا اگر u, v و w در یک صفحه باشند، حاصل ضرب داخلی w با $u \times v$ که بر این صفحه عمود است صفر می‌شود. به این ترتیب مجدداً $\det M$ دو اطلاع زیر به دست می‌دهد:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر حجم متوازی‌السطوح $P(u, v, w)$ است.
 ب) $\det M = 0$ اگر و تنها اگر $\{u, v, w\}$ وابسته خطی باشد، $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) اگر و تنها اگر سه‌تایی مرتب (u, v, w) راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.
 ضمناً با توجه به (۱۳) و (۱۴) نیز می‌توان نوشت:

$$u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = -w \cdot (v \times u) = v \cdot (u \times w) = -u \cdot (w \times v) \quad (16)$$

قدرمطلق هر یک از این عبارات حجم متوازی‌السطوح $P(u, v, w)$ به صورت حاصل ضرب یک قاعده در ارتفاع وارد بر آن است. به سؤال اولیه‌ای که بحث بالا را پیش آورد باز می‌گردیم. اگر $\{u, v\}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی باشد، می‌خواستیم بدانیم $u \times v$ کدامیک از دو بردار عمود بر صفحه u, v به طول $|u||v| \sin \alpha$ است. اکنون ادعا می‌کنیم:

(۷.۶.۷) اگر $\{u, v\}$ یک مجموعه مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشد، سه‌تایی مرتب $(u, v, u \times v)$ راستگرد است.

برهان. باید نشان دهیم دترمینان ماتریس زیر مثبت است:

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_2 & v_2 & u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_3 & v_3 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

که طبق (۱۵) می‌شود:

$$\det M = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

اگر $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، دست‌کم یکی از سه عبارت بالا صفر نیست و $\det M > 0$.

■

بدین ترتیب، $u \times v$ از نظر هندسی به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌شود:

در صورتی که $\{u, v\}$ وابسته خطی باشد، $u \times v$ صفر است وگرنه، $u \times v$ یگانه بردار عمود

بر صفحه $\{u, v\}$ به طول $|u||v|\sin\alpha|(u, v)|$ است که سه‌تایی مرتب $(u, v, u \times v)$ راست‌گرد است.

مثال (کاربرد در هندسه تحلیلی سه‌بعدی)

فرض کنید l_1 و l_2 دو خط متنافر در $\mathbb{R}^3$ هستند. ادعا می‌کنیم خط راست یکتایی در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که l_1 و l_2 را قطع می‌کند و بر هر دو خط عمود است. نخست نشان می‌دهیم چنین خطی وجود دارد. از نقطه‌ای دلخواه روی l_2 خطی l'_1 به موازات l_1 رسم می‌کنیم. چون l_1 و l_2 موازی نیستند، l'_1 از l_2 متمایز است و صفحه‌ای شامل l_2 و l'_1 تشکیل می‌شود. خط l_1 با این صفحه اشتراک تهی دارد و با آن موازی است زیرا اگر l_1 در نقطه‌ای این صفحه را قطع کند چون با یک خط در این صفحه موازی است باید در آن صفحه بماند و چون با l_2 موازی نیست حتماً آن را قطع می‌کند که خلاف متنافر بودن l_1 و l_2 است. حال

خط l_1 را به طور عمود روی صفحه $\mathbb{P}$ تصویر می‌کنیم. این تصویر خط l_1 را در نقطه‌ای B قطع می‌کند چون l_1 و l_2 موازی نیستند. خط گذرنده از B و نقطه A روی l_1 که بر B تصویر شده است، بر l_1 و l_2 عمود است (شکل ۴). نشان می‌دهیم چنین پاره خط AB گذرنده از l_1 و l_2 و عمود بر هر دو منحصر به فرد است. فرض کنید $A'B'$ پاره خط دیگری باشد که بر هر دو خط عمود است، A' روی l_1 قرار دارد و B' روی l_2 . اگر از B' خط l'' را به موازات l_1 رسم کنیم این خط موازی l'_1 است پس در صفحه $\mathbb{P}$ می‌ماند. از طرف دیگر، $A'B'$ بر این خط عمود است. پس $A'B'$ بر صفحه $\mathbb{P}$ عمود است، پس باید موازی AB باشد. چون این پاره خط در A' بر l_1 و در B' بر l_2 عمود است. $AA'B'A'$ یک مستطیل است بنابراین خط ناگذرنده از A و A' یعنی l_1 ، باید موازی خط گذرنده از B و B' ، یعنی l_2 ، باشد که خلاف فرض متنافر بودن l_1 و l_2 است.

شکل ۷-۱۴

اکنون به کمک ضرب خارجی یک مثال عددی حل می‌کنیم. خط‌های راست l_1 و

l_2 به صورت زیر در $\mathbb{R}^3$ داده شده‌اند:

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

$$l_2: \frac{x_1+1}{0} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

می‌خواهیم طول عمود مشترک دو خط و نیز معادله خط راستی را که هر دو را به طور عمودی قطع می‌کند به دست آوریم. برای به دست آوردن طول عمود مشترک کافی است

یک پاره خط متکی به دو خط را بر راستایی عمود بر دو خط تصویر قائم کنیم. مثلاً نقطه $P_1 = (1, 0, -2)$ روی l_1 و $P_2 = (-1, -1, 0)$ روی l_2 را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $u = p_1 - p_2 = (2, 1, -2)$. یک بردار عمود بر l_1 و l_2 را می‌توان با ضرب خارجی بردارهایی موازی دو خط به دست آورد، مثلاً

$$\begin{aligned} v &= (2, 3, -1) \times (0, -2, 1) \\ &= (1, -2, -4) \end{aligned}$$

تصویر قائم u روی v عبارت است از

$$\frac{u \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{8}{21} (1, -2, -4)$$

که طول آن برابر $\frac{8}{\sqrt{21}}$ است. بنابراین فاصله عمودی دو خط l_1 و l_2 نیز $\frac{8}{\sqrt{21}}$ است. خط راست عمود بر l_1 و l_2 موازی v است پس معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-2} = \frac{z - z_0}{-4} \quad (17)$$

باید نقطه (x_0, y_0, z_0) را طوری اختیار کنیم که این خط با l_1 و l_2 نقطه مشترک داشته باشد. نقطه

(x_0, y_0, z_0) را نقطه اشتراک با l_2 می‌گیریم. اگر بنویسیم $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1} = s$

نتیجه می‌شود که $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -2s - 1, s)$. برای خط l می‌نویسیم

$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1} = t$. پس $(x, y, z) = (2t + 1, 3t, -t - 2)$. بنابراین، برای

اینکه خط (۱۷) از (x_0, y_0, z_0) و (x, y, z) بگذرد، باید s و t را طوری پیدا کرد که

$$\frac{2t + 1 + 1}{1} = \frac{3t + 2s + 1}{-2} = \frac{-t - 2 - s}{-4}$$

این دو معادله دو مجهولی بر حسب s و t است:

$$\begin{cases} 2s + 7t = -5 \\ s - 7t = 6 \end{cases}$$

که جواب آن $s = \frac{1}{3}$ ، $t = -\frac{17}{21}$ است. بنابراین $(x_0, y_0, z_0) = \left(-1, \frac{-5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ و

خط راست مطلوب عبارت است از

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{3}}{-4}$$

تمرین ۶.۷

۱. دترمینان هریک از ماتریس‌های 3×3 زیر را محاسبه کنید.

$\begin{bmatrix} \circ & a & b \\ -a & \circ & c \\ -b & -c & \circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \circ & a_{22} & a_{23} \\ \circ & \circ & a_{33} \end{bmatrix}$	(الف)
(ب)		
$\begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & \circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \circ & b & c \\ d & e & f \\ \circ & \circ & g \end{bmatrix}$	(ج)
(د)		

۲. در مورد ترتیب‌های ممکن پایه متداول l_1, l_2, l_3 از $\mathbb{R}^3$ تعیین کنید کدام راستگرد و

کدام چپگرد هستند.

۳. فرمول‌های (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) متن، «بسط دترمینان بر حسب ستون» نام دارند.

فرمول‌های مشابهی برای بسط دترمینان بر حسب سطر پیدا کنید.

۴. در $\mathbb{R}^3$ نشان دهید فرمول صفحه‌گذرنده از نقطه o به موازات خطوط راست $p + \langle u \rangle$

و $\langle v \rangle + q$ عبارت است از $(u \times v) \cdot (x - a) = 0$ که در آن $x = (x_1, x_2, x_3)$

نقطه‌ای در صفحه است.

۵. در $\mathbb{R}^3$ ، نشان دهید فاصله نقطه a از خط راست $\langle u \rangle + p$ برابر است با

$$\frac{1}{|u|} |(a - p) \times u|$$

۶. الف) در $\mathbb{R}^4$ ، مساحت متوازی‌الاضلاع $p(u, v)$ را پیدا کنید که در آن $u =$

$$v = (1, 1, 0, -2) \text{ و } (1, -1, -1, 1)$$

ب) در $\mathbb{R}^4$ ، حجم متوازی‌السطوح $p(u, v, w)$ را پیدا کنید که در آن $u =$

$$v = (1, -1, 1, -1) \text{ و } w = (2, 2, -2, 1) \text{ (راهنمایی:)}$$

می‌توانید از روش گرام-شمیت استفاده کنید.)

۷. دو خط راست $\langle u \rangle + p$ و $\langle v \rangle + q$ را در نظر بگیرید که u و v مانند تمرین ۶ (ب)

هستند، $p = (1, 0, 1, 1)$ و $q = (1, -1, 1, 1)$. طول عمود مشترک دو خط و

معادله خط راستی را که هر دو خط را قطع می‌کند و بر هر دو عمود است پیدا کنید.

۸. تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید که با ماتریس زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

نشان دهید تحت اثر این تابع خطی زاویه بین خطوط حفظ می‌شود ولی مساحت

متوازی‌السطوح‌ها تغییر می‌کند.

۹. اگر A, B ، و C عناصر $\mathbb{R}^3$ باشند نخست ثابت کنید

$$A \times (B \times C) = (A \times C)B - (A \times B)C$$

سپس اتحاد ژاکوبی را نتیجه بگیرید:

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0.$$

۱۰. (اتحاد لاگرانژ) به ازای هر A, B, C, D در $\mathbb{R}^3$:

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$

۱۱. به ازای u, v, w در $\mathbb{R}^n$ ، مجموعه $\tau(u, v, w)$ ، موسوم به چهاروجهی ایجاد شده

توسط u, v, w و w ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tau(u, v, w) = \{t, u + t_1 v + t_2 w \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 t_i \leq 1\}$$

در $\mathbb{R}^3$ ، نشان دهید حجم $\tau(u, v, w)$ برابر یک ششم حجم $P(u, v, w)$ است.

(راهنمایی: $P(u, v, w)$ را به صورت اجتماع شش چهاروجهی با حجم برابر بنویسید.)

۱۲. یک چهاروجهی در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید و چهاروجه آن را به s_1, s_2, s_3, s_4 نمایش

دهید. فرض کنید u_i برداری عمود بر وجه i ام چهاروجهی در جهت روبه بیرون برابر

با مقدار عددی مساحت s_i باشد. نشان دهید $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

۱۳. فرض کنید u, v, w سه نقطه در $\mathbb{R}^3$ هستند. نشان دهید این سه نقطه روی یک

خط راست قرار دارند اگر و تنها اگر $(u \times v) + (v \times w) + (w \times u) = 0$.

۱۴. (قضیه پاپس) فرض کنید l و l' دو خط راست در یک صفحه هستند، A, B, C و

سه نقطه متمایز روی l ، و A', B', C' سه نقطه متمایز روی l' . اگر خط AB'

موازی خط $A'B$ و خط AC' موازی خط $A'C$ باشد، نشان دهید خط BC'

موازی خط BC' است.

(راهنمایی: می توانید از تمرین ۱۳ استفاده کنید.)

۱۵. برای u و v در $\mathbb{R}^n$ نشان دهید مساحت متوازی الاضلاع ایجاد شده توسط u و v

$$\text{برابر است با } \sqrt{(u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2}.$$

۱۶. الف) P یک متوازی الاضلاع در $\mathbb{R}^3$ با مساحت A است. تصویر قائم P روی

سه صفحه مختصاتی را در نظر بگیرید. اگر مساحت‌های این سه متوازی الاضلاع A_1 ،

A_2 و A_3 باشد، نشان دهید:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

ب) حکم بالا را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهید: اگر P یک متوازی الاضلاع در $\mathbb{R}^n$ با مساحت

A باشد و A_i ها مساحت‌های تصویر قائم P روی صفحات مختصاتی (که تعداد آنها

$\frac{1}{2}n(n-1)$ است)، نشان دهید مجذور A برابر مجموع مجذورهای A_i ها است.

۱۷. یک چهاروجهی در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. از هر یال چهارضلعی یک صفحه منصف

می‌گذرد که زاویه میان دو وجه منتهی به آن یال را نصف می‌کند. نشان دهید شش

منصف چهاروجهی از یک نقطه می‌گذرند.

۷.۷ حجم و دترمینان در $\mathbb{R}^n$

هدف ما در این بخش تعمیم مفاهیم دترمینان و حجم به $\mathbb{R}^n$ است. نخست تعریف هندسی

و تعریف جبری دترمینان ماتریس‌های 2×2 و 3×3 را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ستون‌های ماتریس ۲×۲ را به ترتیب از چپ به راست به $A^۱$ و $A^۲$ ، و ستون‌های ماتریس ۳×۳ را به $A^۱$ ، $A^۲$ و $A^۳$ نمایش می‌دهیم. در $\mathbb{R}^۲$ ، متوازی‌الاضلاع $P(A)$ را به صورت

$$P(A) = \{t_۱ A^۱ + t_۲ A^۲ \mid 0 \leq t_۱ \leq ۱, 0 \leq t_۲ \leq ۱\}$$

و در $\mathbb{R}^۳$ ، متوازی‌الاضلاع $P(A)$ را به صورت

$$P(A) = \{t_۱ A^۱ + t_۲ A^۲ + t_۳ A^۳ \mid 0 \leq t_۱ \leq ۱, 0 \leq t_۲ \leq ۱, 0 \leq t_۳ \leq ۱\}$$

در نظر می‌گیریم.

(۱.۷.۷) تعریف هندسی دترمینان

در حالت ۲×۲ : مساحت $P(A)$ $|\det A|$

$$\text{علامت } \det A = \begin{cases} + & \text{اگر زوج مرتب } (A^۱, A^۲) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^۱, A^۲) \text{ چپگرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } \{A^۱, A^۲\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

در حالت ۳×۳ : حجم $P(A)$ $|\det A|$

$$\text{علامت } \det A = \begin{cases} + & \text{اگر سه‌تایی مرتب } (A^۱, A^۲, A^۳) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^۱, A^۲, A^۳) \text{ چپگرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } \{A^۱, A^۲, A^۳\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

(۲.۱۱) تعریف جبری دترمینان

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (۲)$$

برای تعمیم این مفاهیم به ماتریس‌های $n \times n$ و $\mathbb{R}^n$ ، ما طبعاً تصویری پیشینی نسبت به «حجم n بعدی» و «راستگرد بودن یک n تایی بردارها در $\mathbb{R}^n$ » نداریم. بنابراین راهبرد ما این خواهد بود که تعریف جبری را به‌گونه‌ای تعمیم دهیم که قدرمطلق آن خواصی مشابه مساحت و حجم داشته باشد و علامت آن، n تایی‌های برداری مستقل خطی را به دو دسته «راستگرد» و «چپگرد» تقسیم کند به نحوی که قرابت موردنظر با دوگونگی متناظر در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ برقرار شود. به این منظور سه ویژگی دترمینان در حالت 2×2 و 3×3 را در زیر بررسی می‌کنیم و خواهیم دید که به‌طور کلی برای ماتریس‌های $n \times n$ یک و تنها یک روش نسبت دادن یک عدد به یک ماتریس وجود دارد که این سه ویژگی را داراست. این عدد را «دترمینان ماتریس» نام خواهیم گذارد.

بایه متداول $\mathbb{R}^n$ یعنی $(e_1, \dots, e_n)$ را در نظر بگیرید. مقصود از مکعب n بعدی واحد، مجموعه زیر است:

$$K^n = \{t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \mid 0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_n \leq 1\} \quad (۳)$$

به ازای $n = ۱$ داریم $K^۱ = [۰, ۱]$ ، به ازای $n = ۲$ ، $K^۲ = \{(x, y) | ۰ \leq x \leq ۱, ۰ \leq y \leq ۱\}$

و به ازای $n = ۳$ ، $K^۳ = \{(x, y, z) | ۰ \leq x \leq ۱, ۰ \leq y \leq ۱, ۰ \leq z \leq ۱\}$ (شکل

(۱)

شکل ۷-۱۵

به طور کلی، برای n عضو $A^۱, \dots, A^n$ در $\mathbb{R}^n$ ، متوازی السطوح n بعدی ایجاد شده توسط

$A^۱, \dots, A^n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P(A^۱, \dots, A^n) = \{t_۱ A^۱ + \dots + t_n A^n | ۰ \leq t_i \leq ۱, i = ۱, \dots, n\} \quad (۴)$$

اگر n تایی های $A^۱$ تا A^n را به ترتیب به عنوان ستون های یک ماتریس A در نظر بگیریم،

$P(A^۱, \dots, A^n)$ را به طور خلاصه به $P(A)$ نمایش می دهیم.

(۳.۷.۷) سه ویژگی اساسی دترمینان (برای ماتریس های ۲×۲ و ۳×۳)

(۱.۳.۷.۷) دترمینان نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون ها ثابت نگاه داشته

شوند.

مقصود از «خطی بودن»، برقراری دو شرط گزاره ۳.۴.۷ است، یعنی اگر همه درایه های

یک ستون در عددی چون r ضرب شوند، دترمینان در r ضرب می شود. اگر یک ستون

(به عنوان یک n تایی عددی) برابر مجموع دو ستون باشد، دترمینان برابر مجموع دترمینان

ماتریس‌هایی خواهد شد که از تفکیک دو ستون به دست می‌آیند. مثلاً:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

این دو شرط به سادگی از تعریف جبری (۱) و (۲) به دست می‌آیند. نکته این است که در هر جمله سمت راست (۱) و (۲) فقط یک درایه از هر ستون ظاهر، با درجه یک می‌شود. وقتی $r > 0$ ، تغییر هندسی شرط اول این است که با ضرب کردن طول یک ضلع متوازی‌الاضلاع (به ترتیب یک ضلع متوازی‌السطوح) در r و ثابت نگاه داشتن اضلاع دیگر، مساحت متوازی‌الاضلاع (به ترتیب حجم متوازی‌السطوح) در r ضرب می‌شود. وقتی $r < 0$ ، جهت گردش (راستگردی یا چپگردی) اضلاع معکوس می‌شود، بنابراین علامت دترمینان عوض می‌شود (شکل ۲).

شکل ۷-۱۶

تعبیر هندسی شرط دوم در حالت $n = 2$ در شکل ۳ نمایش داده شده است. اگر یک ضلع متوازی‌الاضلاع، مثلاً ضلع u ، برابر مجموع $u' + u''$ باشد به طوری که (u, v) ، (u', v) و (u'', v) هر سه راستگرد یا هر سه چپگرد باشند، مساحت $P(u, v)$ برابر مجموع مساحت‌های $P(u', v)$ و $P(u'', v)$ می‌شود. وقتی جهت گردش سه دوتایی یکسان نباشد، باید علامت دترمینان را نیز منظور کرد. تعبیر مشابهی در حالت سه‌بعدی برقرار است و این حکم را می‌توان از اینکه مساحت برابر $|u \times v|$ و حجم برابر $|(u \times v) \cdot w|$ است

شکل ۷-۱۷

اکنون ویژگی اساسی دوم دترمینان را بیان می‌کنیم:

(۲.۳.۷.۷) دترمینان نسبت به ستون‌ها «پادمتقارن» است، یعنی هرگاه جای دو ستون

تعویض شود، دترمینان در (-1) ضرب می‌شود.

این مطلب را می‌توان به‌طور جبری از روی تعریف‌های جبری (۱) و (۲) مشاهده کرد.

تعبیر هندسی این است که تعویض ترتیب دو ضلع جهت گردش را معکوس می‌کند. توجه

کنید که اگر k بار تعویض ستون صورت گیرد، هر بار دترمینان در (-1) ضرب می‌شود،

بنابراین پس از k تعویض، دترمینان در $(-1)^k$ ضرب خواهد شد.

بالاخره ویژگی اساسی سوم دترمینان به شرح زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

در حالت 2×2 ، این بدان معنی است که مساحت مربع واحد برابر یک است و دوتایی

مرتب (e_1, e_2) راستگرد می‌باشد. همین‌طور در حالت 3×3 ، حجم مکعب واحد برابر یک

است و سه‌تایی مرتب (e_1, e_2, e_3) راستگرد است.

خواهیم دید که این سه‌ویژگی دترمینان را به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند.

لازم است نخست مفهوم «پادمتقارن» را کمی بیشتر بررسی کنیم. به‌طور کلی، جابه‌جا کردن

ترتیب n شیء، مانند n ستون یک ماتریس $n \times n$ ، یک «جایگشت» خوانده می‌شود. اگر n شیء را با شماره‌گذاری به مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ نمایش دهیم، یک جایگشت $\{1, 2, \dots, n\}$ در واقع یک تابع یک به یک و پوشا از $\{1, \dots, n\}$ به خود آن است:

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

مقصود از $\sigma(i)$ جای جدید i است. تابع همانی جایگشتی است که هر یک از 1 تا n را در جای خود نگاه می‌دارد. یک نوع جایگشت ساده، ترانهش است. منظور از ترانهش جایگشتی است که $(n-2)$ عنصر را در جای خود نگه می‌دارد و جای دو عنصر باقیمانده را تعویض می‌کند. مثلاً

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4$$

یک ترانهش $\{1, 2, 3, 4\}$ است.

قضیه ۴.۷.۷ هر جایگشت $\{1, \dots, n\}$ را می‌توان به صورت ترکیبی متناهی از ترانهش نمایش داد. روش نمایش یکتا نیست ولی تعداد ترانهش‌های لازم همواره زوج یا همواره فرد است.

برهان. حکم اول را می‌توان با استقراء ثابت کرد. به‌ازای $n = 2$ ، حکم واضح است زیرا یک جایگشت $\{1, 2\}$ تبادل 1 و 2 است و دیگری که همانی است از ترکیب این ترانهش با خودش حاصل می‌شود. فرض کنید حکم تا n ثابت شده است، آن را برای $(n+1)$ ثابت می‌کنیم. پس فرض کنید σ یک جایگشت $\{1, \dots, n, n+1\}$ است. اگر σ همانی باشد، می‌توان نوشت $\sigma = \tau \circ \tau$ که τ یک تبادل دلخواه است. اگر σ همانی نباشد، دست‌کم یک i را جابه‌جا می‌کند، مثلاً $\sigma(i) = j \neq i$. حال تبادل ρ را در نظر بگیرید که بدین صورت تعریف می‌شود: $\rho(i) = j$ ، $\rho(j) = i$ ، و $\rho(k) = k$ اگر $k \neq i, j$. ترکیب $\rho \circ \sigma$ جایگشتی است که i را تثبیت می‌کند زیرا $(\rho \circ \sigma)(i) = \rho(j) = i$. بدین ترتیب

می‌توان $\rho \circ \sigma$ را یک جایگشت n شیء $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1\}$ تلقی کرد. طبق فرض استقراء، ρ باید ترکیب تعدادی ترانهش τ_i باشد (که i را ثابت نگاه می‌دارند)، $\rho \circ \sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$. حال اگر ρ را از طرف چپ با هر طرف ترکیب کنیم، چون همانی $\rho \circ \rho =$ نتیجه می‌شود که $\sigma = \rho \circ \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$ یعنی σ ترکیبی از ترانهش‌ها است. برای حکم دوم، نخست به هر جایگشت σ از $\{1, \dots, n\}$ عدد $\epsilon(\sigma)$ را به صورت

زیر نسبت می‌دهیم:

$$\epsilon(\sigma) = \frac{1}{(1)!(2)!\dots(n-1)!} \prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i)) \quad (5)$$

که در اینجا مقصود از $\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))$ حاصل ضرب همه $\sigma(j) - \sigma(i)$ ها است که در آن $i < j$. نشان می‌دهیم که $\epsilon(\sigma) = \pm 1$. توجه کنید که به ازای هر $k \neq l$ ، $k, l \in \{1, \dots, n\}$ جمله $(k-l)$ یا $(l-k)$ یک و فقط یک بار در حاصل ضرب سمت راست ظاهر می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (\sigma(i) - \sigma(j)) &= \pm \prod_{k < l} (l - k) \\ &= \pm \left(\prod_{1 < l} (l-1) \right) \left(\prod_{2 < l} (l-2) \right) \dots \left(\prod_{n-1 < l} (l-(n-1)) \right) \end{aligned}$$

و طرف راست برابر $(1)!\dots(n-1)!$ است. بنابراین $\epsilon(\sigma) = \pm 1$. حال اثر ترکیب یک ترانهش τ با σ را بر $\epsilon(\sigma)$ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم $\epsilon(\tau \circ \sigma) = -\epsilon(\sigma)$. فرض کنید ترانهش τ دو عدد متمایز μ و ν را جابه‌جا می‌کند و سایر اعداد را ثابت نگاه می‌دارد. مثلاً $\mu < \nu$. در حاصل ضرب طرف راست (5) جملات $(\sigma(j) - \sigma(i))$ که در آنها $\sigma(i) \neq \mu, \nu$ و $\sigma(j) \neq \mu, \nu$ تغییری نمی‌کنند. داریم:

$$(\tau \circ \sigma)(j) - (\tau \circ \sigma)(i) = \sigma(j) - \sigma(i)$$

یکی از دو جمله $(\nu - \mu)$ یا $(\mu - \nu)$ یک و فقط یک بار به صورت $(\sigma(i) - \sigma(j))$ ظاهر می‌شود که با اثر دادن τ ، در (-1) ضرب می‌شود. سایر جملات $(\sigma(j) - \sigma(i))$ را که در آنها یکی از جمله‌ها برابر μ یا ν است، می‌توان دوتا، دوتا، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\pm(\sigma(k) - \nu)(\sigma(k) - \mu), \quad \sigma(k) \neq \mu, \nu \quad (6)$$

و (۶) تحت اثر τ تغییر علامت نمی‌دهد:

$$\begin{aligned} ((\tau \circ \sigma)(k) - \tau(\nu))((\tau \circ \sigma)(k) - \tau(\mu)) &= (\sigma(k) - \mu)(\sigma(k) - \nu) \\ &= (\sigma(k) - \nu)(\sigma(k) - \mu) \end{aligned}$$

بنابراین، ماحصل اثر دادن τ این است که $\epsilon(\sigma)$ در (-1) ضرب می‌شود:

$$\epsilon(\tau \circ \sigma) = -\epsilon(\sigma), \quad \tau: \text{ترانهش} \quad (7)$$

توجه کنید که اگر σ همانی باشد، $\epsilon(\sigma) = 1$ زیرا به ازای $i < j$ ، $\sigma(j) - \sigma(i) = j - i > 0$.
بنابراین برای هر ترانهش τ داریم $\epsilon(\tau) = -1$. حال اگر σ یک جایگشت دلخواه باشد، طبق قسمت اول قضیه، σ را به صورت ترکیبی از ترانهش‌ها می‌نویسیم، $\sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$.
با استفاده مکرر از (۷) داریم:

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^k \quad (8)$$

که k تعداد ترانهش‌هاست. چون به هر σ یک $\epsilon(\sigma)$ مشخص نسبت داده شده است، (۸) نشان می‌دهد که تعداد تبادلهای لازم برای نمایش σ باید همواره زوج یا همواره فرد باشد. ■
به عنوان دستاوردی از قضیه بالا، اگر σ_1 و σ_2 دو جایگشت باشند، داریم:

$$\epsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \epsilon(\sigma_1) \cdot \epsilon(\sigma_2) \quad (9)$$

یک جایگشت را زوج (به ترتیب فرد) می‌نامیم در صورتی که $\epsilon(\sigma) = +1$ (به ترتیب $\epsilon(\sigma) = -1$). هر جایگشت زوج ترکیب تعدادی زوج تبادیل است و هر جایگشت فرد ترکیب تعدادی فرد تبادیل.

اکنون می‌توانیم به کمک قضیه ۴.۷.۷ مفهوم دترمینان را به ماتریس‌های $n \times n$ تعمیم دهیم.

گزاره ۵.۷.۷ فرض کنید به هر ماتریس $A, n \times n$ ، عدد $D(A)$ را نسبت داده‌ایم که واجد دو شرط زیر است:

الف) $D(A)$ نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون‌ها ثابت نگاه داشته شوند.
 ب) $D(A)$ نسبت به ستون‌ها پادمتقارن است، یعنی جابه‌جایی دو ستون، آن را در (-1) ضرب می‌کند.

در این صورت، مقدار $D, D(I_n)$ را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند.
 برهان. ستون‌های ماتریس $A = [a_{ij}]$ را به $A^1, \dots, A^n$ نمایش می‌دهیم. اگر ستون j ام A_j را به عنوان یک n تایی یعنی عضوی از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم، داریم:

$$A_j = a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_n$$

با توجه به (الف) داریم

$$D(A) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} D[e_{i_1} | e_{i_2} | \dots | e_{i_n}] \quad (10)$$

در ماتریس بالا چنانچه به ازای $\mu \neq \nu$ داشته باشیم $e_{i_\mu} = e_{i_\nu}$ ، مقدار $D[e_{i_1} | \dots | e_{i_n}]$ صفر می‌شود زیرا جابه‌جایی e_{i_μ} و e_{i_ν} از طرفی ماتریس سمت راست بالا را عوض نمی‌کند و از طرف دیگر، طبق (ب) مقدار D باید در (-1) ضرب شود. بنابراین $D[e_{i_1} | \dots | e_{i_n}]$

صفر است مگر اینکه $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ جایگشتی چون σ از $(1, 2, \dots, n)$ باشد. بنابراین،

می‌توان (1^0) را به صورت زیر نوشت:

$$D(A) = \sum_{\sigma: \text{جایگشت}} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} D[e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)}]$$

ولی از خاصیت پادتقارن (ب) می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$D[e_{\sigma(1)} | \dots | e_{\sigma(n)}] = \epsilon(\sigma) D[e_1 | \dots | e_n]$$

$$\epsilon(\sigma) D(I_n)$$

پس

$$D(A) = \sum_{\sigma: \text{جایگشت}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} D(I_n) \quad (11)$$

و گزاره به اثبات می‌رسد. ■

همچنان که در بررسی سه ویژگی اصلی دترمینان‌های 2×2 و 3×3 دیدیم، ویژگی‌های اول و دوم، که مشابه (الف) و (ب) هستند، ویژگی‌های ابتدایی مساحت و حجم متوازی‌الاضلاع و متوازی‌السطوح با منظور کردن علامت هستند. ویژگی سوم، یعنی نسبت دادن عددی به مکعب واحد، به منزله ارائه واحد یا مقیاس برای مساحت یا حجم است.

توجه کنید که ستون‌های I_n درواقع بردارهای تعریف‌کننده مکعب واحد هستند. با تعیین $D(I_n)$ مقدار $D(A)$ برای هر ماتریس A مشخص می‌شود. چنانچه $D(I_n)$ را برابر ۱ بگیریم یعنی حجم n بُعدی مکعب واحد را ۱ فرض کنیم، تابع D حاصل، طبق تعریف، $\det(A)$ (دترمینان A)، خوانده می‌شود، پس:

$$\det A = \sum_{\sigma: \text{جایگشت}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \quad (12)$$

نتیجه ۶.۷.۷ تابع $\det$ که به هر ماتریس $n \times n$ مقدار (۱۲) را نسبت می‌دهد یگانه تابع از ماتریس‌های

$n \times n$ به $\mathbb{R}$ است که سه ویژگی زیر را دارد: (الف) نسبت به هر ستون خطی است

وقتی سایر ستون‌ها ثابت نگاه داشته شوند. (ب) نسبت به ستون‌ها پادمتقارن است، و (ج)

$$\det(I_n) = 1.$$

تعریف. به ازای $A^1, \dots, A^n \in \mathbb{R}^n$ ، حجم n -بعدی متوازی‌السطوح $P(A)$ برابر $|\det A|$

است. حجم n -بعدی $P(A)$ را به $\text{vol}_n(P(A))$ نمایش می‌دهیم.

تعبیر زیر برحسب نگاشت‌های خطی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ماتریس A

که از کنار هم قرار دادن n تایی‌های $A^1, \dots, A^n$ به دست می‌آید درواقع نمایش‌دهنده یک

نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ است که $f(e_j) = A^j$ ، برای هر $j = 1, \dots, n$. حال

$\det f$ را همان $\det A$ تعریف می‌کنیم. نگاشت خطی f مکعب واحد را به متوازی‌السطوح

$P(A)$ می‌نگارد. پس $|\det f|$ درواقع حجم n -بعدی تصویر مکعب واحد تحت f است.

گزاره ۷.۷.۷ برای تابع‌های خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\det(g \circ f) = (\det g)(\det f) \quad (13)$$

یا اگر ماتریس f را به A و ماتریس g را به B نمایش دهیم:

$$\det(BA) = (\det B)(\det A) \quad (14)$$

برهان. برای اثبات، g (معادلاً B) را تثبیت می‌کنیم و دو تابع زیر از مجموعه ماتریس‌های

$n \times n$ به $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$D_1, D_2 : n \times n \text{ های ماتریس‌های } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D_1(A) = (\det B)(\det A)$$

$$D_2(A) = \det(BA)$$

اگر نشان دهیم D_1 و D_2 هر دو واجد شرط‌های (الف) و (ب) گزاره (۵.۱۱) هستند، از این گزاره نتیجه می‌شود که مقدار D_1 و D_2 با دانستن مقدار آنها به ازای $A = I_n$ تعیین می‌شود. ولی داریم:

$$D_1(I_n) = (\det B)(\det I_n) = \det B$$

$$D_2(I_n) = \det(BI_n) = \det B$$

پس اگر ثابت شود که شرط‌های (الف) و (ب) برای D_1 و D_2 برقرارند، به ازای هر ماتریس A خواهیم داشت $D_1(A) = D_2(A)$ ، و حکم گزاره به اثبات می‌رسد. برای $D_1(A)$ که مضرب ثابتی از $\det A$ است برقرار بودن (الف) و (ب) واضح است. موضوع را در مورد D_2 تحقیق می‌کنیم. فرض کنید A^j ، ستون j -ام A ، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{1j} \\ \vdots \\ a''_{nj} \end{bmatrix}$$

در این صورت، ستون j ام ماتریس BA می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} a_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^n b_{n\nu} a_{\nu j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} a'_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^n b_{n\nu} a'_{\nu j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} a''_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^n b_{n\nu} a''_{\nu j} \end{bmatrix}$$

چون ویژگی (الف) در مورد $\det$ برقرار است داریم:

$$\det(BA) = \det(BA') + \det(BA'')$$

که در آن A' و A'' ماتریس‌هایی هستند که از تفکیک ستون j ام ماتریس A به دست آمده‌اند. پس

$$D_2(A) = S_2(A') + D_2(A'')$$

همین‌طور، اگر ستون j ام A در عدد r ضرب شود، ستون j ام BA نیز در r ضرب خواهد شد و خطی بودن نسبت به ستون j ام ثابت می‌شود. در مورد ویژگی (ب)، اگر A' ماتریسی باشد که از تعویض ستون‌های i و j ماتریس A به دست آید، BA' نیز از تعویض ستون‌های i و j ماتریس BA حاصل می‌شود زیرا به‌طور کلی در حاصل ضرب دو ماتریس MN ، ستون j ام از ضرب کردن سطرهای M در ستون j ام N به دست می‌آید. پس چون $\det$ واجد شرط (ب) است، این شرط برای D_2 نیز نتیجه می‌شود و گزاره به اثبات می‌رسد. ■

گزاره بالا نتایج مهمی در پی دارد از جمله:

نتیجه ۸.۷.۷ شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری خطی تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ این است که $\det f \neq 0$.

همین‌طور شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری ماتریس $A, n \times n$ ، این است که $\det A \neq 0$.

برهان. اگر A وارون‌پذیر باشد، ماتریسی چون A^{-1} وجود دارد که $AA^{-1} = I$ ، پس طبق

(۸.۷.۷)، $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ ، و در نتیجه $\det A \neq 0$. به عکس، اگر A (یا معادلاً

تابع خطی متناظر، f) وارون پذیر نباشد، می‌دانیم ستون‌های A وابسته خطی خواهند بود، پس می‌توان یک ستون را به صورت ترکیب خطی ستون‌های دیگر نوشت. بنابراین با استفاده از بسط دادن به کمک ویژگی (الف)، به مجموع $(n-1)$ دترمینان ماتریس‌هایی می‌رسیم که یک ستون آنها تکرار شده است. دترمینان ماتریسی که دو ستون برابر داشته باشد صفر است زیرا که با تعویض دو ستون از یک سو ماتریس عوض نمی‌شود و از سویی طبق (ب) مقدار دترمینان باید در (-1) ضرب شود.

یک دستاورد برهان بالا را جداگانه ذکر می‌کنیم:

■

نتیجه ۹.۷.۷ مجموعه $\{A^1, \dots, A^n\}$ از عناصر $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$.

بدین ترتیب یک ضابطه الگوریتمی برای تحقیق کردن در مورد استقلال خطی یک مجموعه n تایی از عناصر $\mathbb{R}^n$ به دست می‌آید. اگر $k < n$ و مجموعه‌ای k عنصری در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم ضابطه‌ای مشابه وجود دارد که در تمرین آخر بخش آمده است.

نتیجه ۱۰.۷.۷ فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی است و P یک متوازی‌السطوح در $\mathbb{R}^n$. در

این صورت، $f(p)$ نیز یک متوازی‌السطوح است و $\text{vol}_n(f(p)) = |\det f| \text{vol}_n(p)$.

برهان. فرض کنید $P = P(A^1, \dots, A^n)$. در این صورت، ماتریس $[A^1 | \dots | A^n]$ یک ماتریس $n \times n$ است. تابع خطی متناظر با این ماتریس را با $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب $g(l_i) + A^i$ به ازای $i = 1, \dots, n$. نتیجه این که $\text{vol}_n(P) = |\det g|$. حال:

$$f(P) = \{f(t_1 A^1 + \dots + t_n A^n) \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

که چون f خطی است،

$$= \{t_1 f(A^1) + \cdots + t_n f(A^n) \mid 1 \leq t_i \leq n, i = 1, \dots, n\}$$

پس $f(P)$ یک متوازی‌السطوح است. از طرف دیگر، $f(p)$ تصویر مکعب واحد تحت

$f \circ g$ است، پس

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(f(P)) &= |\det(f \circ g)| \\ &= |\det f| |\det g| \\ &= |\det f| \text{vol}_n(P) \end{aligned}$$

■

چنان‌که در حکم بود.

اکنون می‌توانیم مفهوم «راستگرد» و «چپگرد» را در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم. فرض کنید $\{A^1, \dots, A^n\}$ مستقل خطی است. n تایی مرتب $(A^1, \dots, A^n)$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم چنانچه $\det A > 0$ (به ترتیب $\det A < 0$). بنابراین، عیناً مانند حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی، $\det A$ حاوی دو اطلاع زیر است:

الف) $|\det A|$ برابر حجم n -بعدی متوازی‌السطوح $P(A)$ است.

ب) علامت $\det A$ نشان‌دهنده راستگردی یا چپگردی n تایی مرتب ستون‌های $(A^1, \dots, A^n)$ است.

تمرین ۷.۷

۱. هریک از جایگشت‌های σ در زیر را به صورت ترکیبی از ترانهش‌ها بنویسید و $(\sigma) \in$

را محاسبه کنید:

الف) $\sigma : \{1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2\}$

ب) $\sigma : \{1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 1\}$

(ج) $\sigma : \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, (n-1) \rightarrow n, n \rightarrow 1\}$ که $n \geq 2$ یک عدد طبیعی است.

(د) $\sigma : \{1 \rightarrow p+1, 2 \rightarrow p+2, \dots, q \rightarrow q+p, q+1 \rightarrow p, \dots, q+p \rightarrow p\}$ که در اینجا p و q اعداد طبیعی هستند.

۲. دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \circ & a & b & c \\ -a & \circ & d & e \\ -b & -d & \circ & f \\ -c & -e & -f & \circ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \circ & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & \circ \\ \circ & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(ب)} & \text{(الف)} \end{array}$$

(ج) ماتریس $[a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = i \cdot j$ (د)

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 3 \\ 4 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & 2 & \circ & \dots & \circ \\ & & \circ & 3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \circ & & \dots & \circ & n-1 & \\ n & \circ & & \dots & \circ & \end{pmatrix} \quad \text{(ه)}$$

۳. در هر مورد، تعیین کنید مجموعه داده شده مستقل خطی است یا وابسته خطی:

الف) $\{A^1, A^2, A^3, A^4\}$ در $\mathbb{R}^4$ که $A^1 = (1, 1, 0, -1)$ ، $A^2 = (0, -1, 1, 1)$ ،

$$A^3 = (0, 0, 1, -1) \text{ و } A^4 = (2, 0, 0, 0)$$

ب) $\{A^1, \dots, A^n\}$ در $\mathbb{R}^n$ ، $A^i = e_1 + \dots + e_i$ ، که در اینجا $\{e_1, \dots, e_n\}$

پایه متداول $\mathbb{R}^n$ است.

۴. در هر مورد، تعیین کنید n تایی مرتب $(A^1, \dots, A^n)$ در $\mathbb{R}^n$ راستگرد است یا

چپگرد و حجم n بعدی $P(A^1, \dots, A^n)$ را محاسبه کنید:

الف) به ازای $n = 4$ ، $A^1 = (0, 0, 1, 1)$ ، $A^2 = (1, 1, 0, 0)$ ، $A^3 = (0, 1, 1, 0)$ ،

$$A^4 = (1, 0, 1, 0)$$

ب) به ازای n دلخواه، $A^1 = e_1 + e_2$ ، $A^2 = e_2 + e_3$ ، $A^3 = e_3 + e_4$ ، $A^{n-1} = e_{n-1} + e_n$ ،

و $A^n = e_n$ ، که در اینجا $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه متداول $\mathbb{R}^n$ است.

ج) به ازای n دلخواه، $A^1 = e_n$ ، $A^2 = e_{n-1}$ ، $A^3 = e_{n-2}$ ، $A^n = e_1$ ، که در اینجا

$\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه متداول $\mathbb{R}^n$ است.

۵. چون هر جایگشت σ تابعی یک و به یک و پوشا از $\{1, \dots, n\}$ به خود آن است،

σ^{-1} نیز یک جایگشت است.

الف) نشان دهید $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$.

ب) برای هر ماتریس $A = [a_{ij}]$ ، ترانهادۀ A ، $A^T = [b_{ij}]$ ، به صورت $b_{ij} = a_{ji}$

تعریف می شود. نشان دهید $\det(A^T) = \det(A)$.

ج) نشان دهید ستون های یک ماتریس $n \times n$ به عنوان مجموعه ای از عناصر $\mathbb{R}^n$

یک مجموعه مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر سطرهای آن ماتریس به عنوان

مجموعه ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند.

۶. مقصود از یک ماتریس جایگشتی $n \times n$ ، ماتریسی است که در هر سطر و در هر ستون آن یک درایه برابر ۱ است و بقیه درایه‌ها برابر صفر. دترمینان یک ماتریس جایگشتی را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تجانس با ضریب $k > 0$ است، یعنی $f(x) = kx$ به ازای هر x . نشان دهید تجانس با ضریب k هر متوازی‌السطوح n بعدی را به یک متوازی‌السطوح n بعدی می‌نگارد، و اثر آن را بر حجم متوازی‌السطوح پیدا کنید.

۸. فرض کنید A یک ماتریس $k \times k$ است، B یک ماتریس $k \times l$ و C یک ماتریس $l \times l$ ، نشان دهید

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C)$$

۹. برای ماتریس $n \times n$ ، $A = [a_{ij}]$ ، عدد A^{ij} را برابر دترمینان ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ ای تعریف می‌کنیم که از حذف سطر i ام و ستون j ام A به دست آید. نشان دهید:

الف) (بسط بر حسب ستون j ام) به ازای j ثابت، $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A^{ij}$

ب) (بسط بر حسب سطر i ام) به ازای i ثابت، $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A^{ij}$

۱۰. ماتریس $n \times n$ ، A ، را پادمتقارن می‌نامیم در صورتی که $A + A^T = 0$. اگر n فرد باشد و A پادمتقارن، نشان دهید $\det A = 0$.

۱۱. فرض کنید $k < n$ و $\{A^1, \dots, A^k\}$ مجموعه‌ای از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد. با قرار دادن A^i ها به عنوان ستون یک ماتریس $n \times k$ به دست می‌آوریم که آن را A می‌نامیم. نشان دهید مجموعه $\{A^1, \dots, A^k\}$ مستقل خطی است اگر و تنها یک

زیرماتریس $k \times k$ از A وجود داشته باشد که دترمینان آن صفر نباشد.

۱۲. فرض کنید $m < n$ ، و A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ است که

◦ $\det(AB) \neq 0$. نشان دهید ماتریس A دارای m ستون مستقل خطی (به عنوان

عناصر $\mathbb{R}^m$) است.

۱۳. فرض کنید $m < n$ ، و A یک ماتریس $m \times n$ است و B یک ماتریس $n \times m$

است. نشان دهید ◦ $\det(BA) = 0$.

۸.۷ مقدار ویژه و امتداد ویژه پس از آوردن چند مثال متنوع از نگاشت‌های خطی

در بخش ۴.۷، در بخش‌های ۵.۷ تا ۷.۷ به مشترکات نگاشت‌های خطی پرداختیم. در این

بخش مجدداً به تنوع نگاشت‌های خطی باز می‌گردیم. دسته‌ای از مفهومی‌های اساسی برای

شناخت رفتارهای گوناگون نگاشت‌های خطی عبارت است از ویژه مقدار، ویژه بردار، ویژه

راستا... که در این بخش آنها را بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی است. زیرفضای خطی یک بعدی L از

$\mathbb{R}^n$ (= خط راست گذرنده، از ◦) را یک ویژه‌راستا برای f می‌نامیم در صورتی که به ازای هر

$u \in L$ ، $f(u)$ نیز متعلق به L باشد. در واقع اگر برای یک عضو ناصفر $v \in L$ ، $f(v)$ متعلق

به L باشد، به ازای هر عضو $u \in L$ ، $f(u)$ متعلق به L خواهد بود. دلیل آن این است که اگر

◦ $v \neq 0$ ، هر عضو $u \in L$ را می‌توان به شکل $u = cv$ نوشت که در آن $c \in \mathbb{R}$. بنابراین

$$f(u) = f(cv)$$

$$= cf(v)$$

و اگر $f(v)$ در L باشد نتیجه می‌شود که $f(u)$ نیز در L است. به علاوه، عملکرد f روی

هر ویژه‌راستا، یک تجانس یا قرنیۀ یک تجانس است، به این مفهوم که عددی حقیقی چون λ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $u \in L$ ، رابطه $f(u) = \lambda u$ برقرار است. برای مشاهده این نکته فرض کنید برای یک $v \neq 0$ در L داریم $f(v) = \lambda v$ ؛ آنگاه برای عضو دلخواه $u = cv$ روی L :

$$\begin{aligned} f(u) &= f(cv) \\ &= cf(v) \\ &= c\lambda v \\ &= \lambda u \end{aligned}$$

پس همهٔ نقاط L تحت اثر f در عدد واحد λ ضرب می‌شوند. عدد λ را ویژه مقدار منسوب به ویژه‌راستای L می‌نامیم. هر عنصر ناصفر $u \in \mathbb{R}^n$ که $f(u) = \lambda u$ ، یک ویژه بردار (منسوب به λ) خوانده می‌شود.

چندمثال ۱.۸.۷

الف) تابع خطی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را که با ماتریس زیر مشخص می‌شود و در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای یافتن ویژه‌راستاها، برداری مانند $u \neq 0$ جستجو می‌کنیم که برای آن عدد حقیقی λ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$A|u\rangle = \lambda|u\rangle$$

و به عبارت دیگر

$$A|u - \lambda|u\rangle = 0$$

یا

$$(A - \lambda I_2)|u\rangle = 0 \quad (۱)$$

که در اینجا I_2 ماتریس همانی 2×2 است. به بیان دیگر، $u \neq 0$ و λ باید طوری باشند که u در هسته تابع خطی مشخص شده توسط ماتریس $A - \lambda I_2$ قرار گیرد. برای اینکه هسته یک تابع خطی وارون پذیر $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ عضوی غیر از صفر داشته باشد لازم و کافی است که تابع خطی نباشد یا معادلاً دترمینان آن صفر باشد. پس لزوماً:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \quad (۲)$$

توجه کنید که تا این مرحله 2×2 بودن ماتریس هیچ نقشی نداشت. درواقع برای اینکه نگاشت خطی مربوط به ماتریس A ، $n \times n$ ، دارای ویژه راستایی با ویژه مقدار λ باشد، لازم و کافی است که

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \quad (۳)$$

به مثال در دست باز می‌گردیم. باید λ طوری اختیار شود که (۱) برقرار باشد، پس:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

جواب‌های این معادله عبارت‌اند از $\lambda = -1$ و $\lambda = 5$. با قرار دادن هر یک از این دو مقدار

در (۱)، ویژه راستهای مربوط را پیدا می‌کنیم. نخست به‌ازای $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4u_1 + 8u_2 = 0 \\ u_1 + 2u_2 = 0 \end{cases}$$

بدین‌ترتیب، ویژه راستا عبارت است از خط راست $x_1 + 2x_2 = 0$. هر نقطه x از این خط

راست تحت اثر تابع خطی به $-x$ نگاشته می‌شود. به ازای $\lambda = 5$ به طریق مشابه داریم

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2u_1 + 8u_2 = 0 \\ u_1 - 4u_2 = 0 \end{cases}$$

پس ویژه‌راستای مربوط به $\lambda = 5$ ، خط راست $x_1 - 4x_2 = 0$ است. تابع خطی روی این خط به صورت تجانس با ضریب ۵ عمل می‌کند. شکل ۱ وضعیت دو ویژه راستا را نمایش می‌دهد. هر عنصر دلخواه $z \in \mathbb{R}^2$ را می‌توانیم به صورت $z = u + v$ تجزیه کنیم که u روی خط $x_1 + 2x_2 = 0$ قرار دارد و v روی خط $x_1 - 4x_2 = 0$ بنابراین

$$\begin{aligned} f(z) &= f(u) + f(v) \\ &= -u + 5v \end{aligned}$$

شکل ۷-۱۸

ب) نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم که با ماتریس قطری زیر مشخص

شده است:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$$

از شکل ماتریس پیداست که $f(e_j) = d_j \cdot e_j$ به ازای $j = 1, \dots, n$ که در اینجا $e_1, \dots, e_n$ پایه متداول $\mathbb{R}^n$ است. بنابراین، هر یک از n محور مختصات یک ویژه راستا برای f است. آیا ویژه راستا دیگری وجود دارد؟ اگر $x = (x_1, \dots, x_n)$ یک عضو ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد،

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) \\ &= x_1 d_1 e_1 + \dots + x_n d_n e_n \\ &= (d_1 x_1, \dots, d_n x_n) \end{aligned}$$

برای اینکه $f(x) = \lambda x$ ، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = (d_1 x_1, \dots, d_n x_n)$$

اگر به ازای $j \neq i$ داشته باشیم $d_i \neq d_j$ ، آنگاه برقراری توام $\lambda x_j = d_j x_j$ و $\lambda x_i = d_i x_i$ فقط در صورتی امکان پذیر است که یکی از x_i یا x_j صفر باشد. بنابراین در حالتی که همه d_i ها متمایز باشند ویژه راستاها فقط وقتی حاصل می شوند که $(n-1)$ مؤلفه از $x_1, \dots, x_n$ صفر باشند، یعنی فقط محورهای مختصات ویژه راستا هستند. وقتی k تا از $d_1, \dots, d_n$ برابر باشند، مثلاً $d_1 = \dots = d_k$ و $d_i \neq d_1$ به ازای $i > k$ ، هر خط

راست گذرنده از $\circ$ در زیرفضای خطی $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ یک ویژه راستا با ویژه مقدار $\lambda = d_1 = \dots = d_k$ است و هیچ ویژه راستای دیگری با این ویژه مقدار وجود ندارد. در حالتی که همه d_i ها برابر یک مقدار d باشند، $f(x) = dx$ حاصل می‌شود و هر خط گذرنده از $\circ$ یک ویژه راستا با ویژه مقدار d است.

(ج) وضعیت ویژه راستاهای تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را بررسی می‌کنیم که با ماتریس زیر مشخص شده است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $f(e_2) = 2e_2$. پس محور x_2 یک ویژه راستا با ویژه مقدار ۲ است. برای دستیابی به همه ویژه مقادیر و ویژه راستاها با استفاده از (۳) می‌نویسیم:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

با بسط دترمینان برحسب ستون دوم:

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda)^2 + 3 = 0$$

تنها ریشه حقیقی این معادله $\lambda = 2$ است. برای یافتن ویژه بردارهای مربوط به این مقدار

و ریشه، هسته $A - \lambda I$ را شناسایی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} -u_1 - 3u_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ u_1 - u_3 = 0 \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد $u_1 = u_3 = 0$ و شرطی روی u_2 نیست. بنابراین تنها ویژه راستا محور x_2 است.

نکته قابل ذکر در مورد این مثال این است که هر چند فقط یک ویژه راستا وجود دارد، صفحه x_1x_3 تحت عمل تابع به خود آن نگاشته می‌شود و زیرا اگر در $u = (u_1, u_2, u_3)$ قرار دهیم $u_2 = 0$ ، می‌بینیم که مؤلفه دوم $A|u$ نیز صفر است. هر زیرفضای خطی که تحت عمل یک تابع خطی f به خود آن نگاشته شود یک زیرفضای ناوردا تحت آن تابع خطی خوانده می‌شود. بنابراین، ویژه راستا نوع خاصی از زیرفضای ناوردا، یعنی زیرفضای ناوردای یک‌بعدی است.

(د) تابع خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ ویژه مقادیرها می‌نویسیم

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

پس ویژه مقادیر عبارت‌اند از -1 و 2 که 2 به صورت ریشهٔ مضاعف ظاهر می‌شود.

اکنون با محاسبهٔ هستهٔ $A - \lambda I$ ، ویژه راستهای مربوط به هر λ را محاسبه می‌کنیم. برای $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3u_1 + u_2 - u_3 = 0 \\ -3u_2 + 3u_3 = 0 \end{cases}$$

از این معادلات نتیجه می‌گیریم که $u_2 = u_3$ ، $u_1 = 0$ ، پس ویژه راستای مربوط به -1

عبارت است از $\frac{x_1}{0} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{1}$.

برای $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_2 - u_3 = 0 \\ -3u_2 = 0 \\ -3u_3 = 0 \end{cases}$$

بنابراین، محور x_1 تنها ویژه راستای مربوط به $\lambda = 2$ است، هر چند این مقدار ویژه به طور مضاعف ظاهر می شود.

مثال های بالا نشان داد که ویژه مقادیر λ ، برای یک نگاشت خطی با ماتریس A از معادله زیر به دست می آیند:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (4)$$

در واقع، به ازای دقیقاً این مقادیر λ ، $A - \lambda I$ دارای هسته ای بزرگتر از $\{0\}$ خواهد بود و هر زیرفضای خطی یک بُعدی هسته یک ویژه راستا است زیرا اگر $u \neq 0$ متعلق به هسته باشد $(A - \lambda I)(u) = 0$ ، یا معادل آن، $Au = \lambda u$. معادله (۴) معادله مشخصه ماتریس A یا تابع خطی مربوط خوانده می شود. توجه کنید که این معادله از درجه n ، و جمله درجه n آن $\lambda^n (-1)^n$ است. بنابراین، حداکثر n ویژه مقدار برای یک تابع خطی $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد.