

به نام خدا



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری یازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. لاپلاس وارون هر قسمت را محاسبه کنید.

(الف) $\frac{s^2-5}{s^3+4s^2+3s}$

(ب) $\frac{3s}{(s+1)^4}$

(ج) $F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

(د) $\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$

(ه) $F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$

(و) $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$

(ز) $\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right)$

(ک) $\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$

۲. تبدیل لاپلاس توابع داده شده را محاسبه کنید. سعی کنید در این محاسبه به جای استفاده مستقیم از تعریف، تا جای ممکن توابع را بصورت توابع شناخته شده در جدول لاپلاس تبدیل کنید و سپس تبدیل لاپلاس آن‌ها را محاسبه کنید.

(الف)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t^2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

(ب) $f(t) = |\sin(t)|, \quad t \geq 0$

۳. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos t, & \pi \leq t < \infty \end{cases}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

۴. تابع گاما که با $\Gamma(p)$ نمایش داده می‌شود بصورت انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx.$$

- الف) نشان دهید این انتگرال برای $p > -1$ همگرا است و در نتیجه تابع گاما برای این مقادیر تعریف شده است.
- ب) نشان دهید برای $p > 0$ رابطه $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ برقرار است. همچنین داریم $\Gamma(1) = 1$.
- ج) با استفاده از تابع گاما مقدار $\mathcal{L}\{t^p\}$ را برای $p > 0$ محاسبه کنید.

۵. با استفاده از تبدیل لاپلاس و استفاده از رابطه $e^{\ln u} = u$ مقدار k را در معادله زیر بیابید.

$$\int_0^{\infty} t^2 k^{-t} \sin t dt = 0.$$