



درس معادلات دیفرانسیل  
نیم سال اول ۰۴-۰۵  
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری دهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 y'' + xy' + (1+x)y = 0.$$

الف) نشان دهید که نقطه  $x = 0$  یک نقطه تکین منظم برای این معادله است.

ب) با استفاده از روش فروبینیوس، یک جواب به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

حول نقطه  $x = 0$  در نظر بگیرید و معادله مشخصه را به دست آورید.

ج) نشان دهید که معادله مشخصه دارای ریشه‌های مختلط مزدوج است و آن‌ها را محاسبه کنید.

د) شکل کلی دو جواب مستقل معادله را بر حسب توابع حقیقی (شامل  $\sin$  و  $\cos$ ) بنویسید.

۲. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0.$$

الف) نشان دهید که این معادله از نوع معادلات بسل است و مرتبه آن را تعیین کنید.

ب) جواب کلی معادله را بر حسب توابع بسل مناسب بنویسید.

ج) رفتار جواب‌ها را هنگامی که  $x \rightarrow 0^+$  بررسی کنید.

۳. معادله بسل مرتبه  $\nu$  را در نظر بگیرید:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x > 0.$$

فرض کنید  $\nu$  عددی حقیقی و بزرگ‌تر از صفر باشد.

الف) نشان دهید که  $x = 0$  یک نقطه تکین منظم برای این معادله است و ریشه‌های معادله مشخصه برابر با  $\nu$  و  $-\nu$  هستند.

ب) متناظر با ریشه بزرگ‌تر  $\nu$ ، نشان دهید که یکی از جواب‌ها به صورت زیر است:

$$y_1(x) = x^\nu \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m-1+\nu)(m+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right].$$

(ج) اگر  $2\nu$  عدد صحیح نباشد، نشان دهید که جواب مستقل دوم به صورت زیر داده می‌شود:

$$y_2(x) = x^{-\nu} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)(2-\nu)\cdots(m-1-\nu)(m-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right].$$

همچنین نشان دهید که

$$y_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{هنگامی که} \quad x \rightarrow 0,$$

در حالی که

$$y_2(x)$$

هنگام  $x \rightarrow 0$  نامتناهی می‌شود.

(د) با استفاده از روش‌های مستقیم، نشان دهید که سری‌های توانی ظاهر شده در عبارات  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  برای تمام مقادیر  $x$  همگرایی مطلق دارند. همچنین بررسی کنید که  $y_2(x)$  تنها در صورتی یک جواب معتبر است که  $\nu$  عدد صحیح نباشد.

۴. در هر قسمت لاپلاسین تابع داده شده را محاسبه کنید.

الف)  $e^{at} \sin(bt)$

ب)  $t^n$

ج)  $\sin^2 at$

د)  $t^{-\frac{1}{2}}$

۵. نشان دهید تابع  $e^{t^2}$  دارای تبدیل لاپلاس نمی‌باشد.

۶. فرض کنید تابع  $f(t)$  از مرتبه نمایی است و  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ . نشان دهید  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ .

۷. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

۸. الف) به فرض  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$  و حد  $\frac{f(t)}{t}$  هنگامی که  $t$  به صفر می‌رود موجود باشد. ثابت کنید:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} F(u) du$$

ب) با استفاده از قسمت قبل لاپلاسین  $\frac{\cos at - 1}{t}$  را محاسبه کنید.