



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری نهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. نشان دهید که $x = 0$ یک نقطهٔ تکین منظم برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است:

$$x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0.$$

سپس معادلهٔ مشخصه را در نقطهٔ $x = 0$ به دست آورید و ریشه‌های آن را پیدا کنید. در پایان، سه جملهٔ اول غیرصفری هر یک از دو جواب مستقل سری توانی معادله را (که مضرب هم نباشند) حول نقطهٔ $x = 0$ محاسبه کنید.

۲. در هر قسمت تکین عادی بودن نقطه داده شده برای معادله دیفرانسیل را بررسی کنید.

(الف)

$$t(t-2)y'' + ty' + y = 0, \quad t = 0 \quad \text{و} \quad t = 2$$

(ب)

$$(\sin t)y'' + (\cos t)y' + \frac{1}{t}y = 0, \quad t = 0$$

(ج)

$$(e^t - 1)y'' + e^ty' + y = 0, \quad t = 0$$

۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$2t^2y'' - ty' + (1+t)y = 0.$$

۴. دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید. اختلاف ریشه‌های معادله مشخصه با هم یک عدد مثبت است با این وجود دو جواب به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ وجود دارد.

$$t^2y'' + (3t - t^2)y' - ty = 0.$$

۵. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$t^2y'' + (t^2 - 3t)y' + 3y = 0.$$

(الف) نشان دهید $r = 1$ و $r = 3$ ریشه‌های معادله مشخصه است.

ب) جوابی به صورت سری توانی

$$y_1(t) = t^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad a_0 = 1$$

برای معادله بیابید.

ج) نشان دهید $y_1(t) = t^3 e^{-t}$.

د) نشان دهید معادله جوابی به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ندارد.

ه) با استفاده از کاهش مرتبه جواب دیگری از معادله پیدا کنید. پیدا کردن جواب در فرم انتگرالی کفایت می‌کند.

۶. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$ty'' + ty' + 2y = 0.$$

الف) نشان دهید $r = 1$ و $r = 0$ ریشه‌های معادله مشخصه است.

ب) جوابی به فرم زیر برای معادله بیابید.

$$y_1(t) = t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ج) جواب دیگر را با استفاده از کاهش مرتبه پیدا کنید.