



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری هشتم

دانشکده علوم ریاضی

۱. با اعمال تغییر متغیر

$$x - 1 = t$$

و فرض اینکه y یک سری توانی بر حسب t است، دو جواب مستقل برای معادله زیر بیابید:

$$y'' + (x - 1)^2 y' + (x^2 - 1)y = 0$$

این جواب‌ها را در توانی از $x - 1$ بیان کنید.

همچنین نشان دهید که اگر مستقیماً فرض کنید y یک سری تیلور در توانی از $x - 1$ است و ضریب $x^2 - 1$ را نیز در توانی از $x - 1$ بسط دهید، همان نتایج به دست می‌آید.

۲. مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$y' = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 0$$

الف) نشان دهید که

$$y = \sin x$$

جواب این مسئله مقدار اولیه است.

ب) یک جواب برای این مسئله مقدار اولیه به صورت سری توانی حول $x = 0$ بیابید. ضرایب را تا جمله مربوط به x^3 محاسبه کنید.

۳. برای معادله دیفرانسیل زیر یک کران پایین برای شعاع همگرایی جواب‌های سری توانی حول هر یک از نقاط داده شده تعیین کنید:

الف)

$$(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$$

ب)

$$xy'' + y = 0, \quad x_0 = 1$$

۴. برای معادله دیفرانسیل زیر چهار جمله اول (غیر صفر) از دو جواب مستقل سری توانی حول مبدأ را بیابید. همچنین شعاع همگرایی هر سری را حدس بزنید:

الف)

$$y'' + (\sin x)y = 0$$

(ب)

$$e^{-x}y'' + \ln(1+x)y' - xy = 0$$

۵. سؤال طراحی شده

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$(x^2 - 4)y'' + (3x - 2)y' + y = 0$$

(الف) نشان دهید که نقطه $x = 2$ یک نقطه عادی است، هرچند معادله به صورت مستقیم در توان‌های $(x - 2)$ نوشته نشده است.

(ب) یک حل سری توانی حول نقطه

$$x = 2$$

به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 2)^n$$

به دست آورید.

ضرایب را تا جمله مرتبه سوم به طور صریح محاسبه کنید.

۶. تمام مقادیر β را بیابید به طوری که همه جواب‌های معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + \beta y = 0$$

هنگامی که $x \rightarrow 0$ می‌روند، به صفر نزدیک شوند.۷. تابع y را بیابید به طوری که جواب مسئله مقدار اولیه زیر

$$x^2 y'' - 2y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \gamma$$

برای $x \rightarrow 0$ کران‌دار باشد.