



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری هفتم

دانشکده علوم ریاضی

۱. ابتدا نشان دهید تابع $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{-1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه صفر از هر مرتبه‌ای مشتق پذیر است و مقدار آن برابر صفر است. سپس نشان دهید این تابع تحلیلی نیست.

۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(2+t)y'' - ty' - 3y = 0$ را به دست آورید.

۳. در هر قسمت جواب مساله مقدار اولیه را محاسبه کنید.

(الف)

$$t(2-t)y'' - 6(t-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

(ب)

$$y'' + (t^2 + 2t + 1)y' - (4 + 4t)y = 0, \quad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 1.$$

۴. معادله $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ که در آن α ثابت است، معادله دیفرانسیل لژاندر شناخته می‌شود و در بسیاری از حوزه‌های ریاضی و فیزیک دارای کاربرد است.

(الف) دو جواب مستقل خطی (مجموعه اساسی جواب) معادله لژاندر را بیابید.

(ب) نشان دهید اگر در معادله لژاندر قرار دهیم $\alpha = n$ ، آنگاه این معادله دارای جواب چند جمله‌ای درجه n است. این چند جمله‌ای را چند جمله لژاندر مرتبه n گوئیم.

۵. (الف) دو جواب مستقل خطی معادله زیر را بیابید.

$$y'' + t^3y' + 3t^2y = 0.$$

(ب) پنج جمله ابتدایی بسط تیلور حول $t = 0$ تابع $y(t)$ را به دست آورید. که در آن $y(t)$ جواب مساله مقدار اولیه زیر است،

$$y'' + t^3y' + 3t^2y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$