



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۵-۰۴
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری چهارم و پنجم

دانشکده علوم ریاضی

۱. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید. سپس α را طوری تعیین کنید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، جواب به صفر میل کند.

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 2$$

۲. الف) به فرض تابع های y_1 و y_2 مجموعه ای اساسی از جواب های معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ را تشکیل بدهند که در آن p و q توابعی پیوسته هستند. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی y_1 ، یک و تنها یک ریشه از y_2 وجود دارد.

ب) آیا معادله دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه دو وجود دارد که e^t و $t^2 - 1$ جواب های آن باشند؟ اگر جواب مثبت است این مطلب چگونه با قسمت قبل در تناقض نمی باشد؟

۳. آیا $y = \sin t^2$ می تواند جواب معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ با ضرایب پیوسته در بازه ای شامل $t = 0$ باشد؟

۴. الف) اگر $W(f, g)(t) = 2e^{6t}$ باشد که در آن $f = e^{3t}$ است. تابع g را محاسبه کنید.

ب) اگر y_1 و y_2 مجموعه ای اساسی از جواب های معادله دیفرانسیل $ty'' + 2y' + te^ty = 0$ را تشکیل بدهند و اگر $W(y_1, y_2)(1) = 3$ آنگاه مقدار $W(y_1, y_2)(5)$ را بیابید.

۵. فرض کنید $y_1(t)$ و $y_2(t)$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + py' + qy = 0$ برای $-\infty < t < \infty$ است. اگر $y_1(0) = 3$ ، $y_1'(0) = 1$ ، $y_2(0) = 1$ و $y_2'(0) = \frac{1}{3}$ آنگاه نشان دهید $y_1(t)$ و $y_2(t)$ بر بازه $-\infty < t < \infty$ وابسته خطی هستند.

۶. فرض کنید که $p(t)$ و $q(t)$ توابعی پیوسته روی بازه I باشند و $y_1(t)$ و $y_2(t)$ جواب های معادله دیفرانسیل $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ روی این بازه هستند.

الف) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه ای از I داشته باشند، آنگاه نمی توانند مجموعه ای اساسی از جواب ها را تشکیل دهند.

ب) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه عطف مشترک در $t \in I$ داشته باشند آنگاه نمی توانند مجموعه ای اساسی از جواب ها در آن بازه باشند مگر اینکه p و q هر دو در t صفر باشند.

۷. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگنی پیدا کنید که $y_1 = t^2$ و $y_2 = t^4$ جواب‌های آن باشند. بیشترین بازه‌ای که این دو تابع جواب معادله دیفرانسیل هستند را پیدا کنید.

۸. الف) نشان دهید $y_1 = t$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است سپس جواب دیگر را به دست آورید.

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0, \quad t > 0$$

ب) جوابی از معادله دیفرانسیل قسمت قبل به دست آورید که در لحظه $t = 1$ ماتریس رونسکین آن برابر ماتریس همانی است.

۹. در هر قسمت در مورد درستی گزاره داده شده بحث کنید.

الف) اگر y_1 و y_2 دو تابع مشتق پذیر با مشتق مرتبه دوم پیوسته باشند که برای هر $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ آنگاه معادله خطی مرتبه دوم وجود دارد که دو تابع فوق جواب‌های اساسی آن باشند.

ب) اگر y_1 و y_2 بر روی اعداد حقیقی مستقل خطی باشند. آنگاه حداقل یک $t \in \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه رابطه $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ برقرار است.

ج) اگر $W(y_1, y_2)$ در یک نقطه مانند t مخالف صفر باشد، آنگاه این دو تابع مستقل خطی هستند.

۱۰. مساله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \geq 0$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب مساله را بیابید.

ب) α را طوری بیابید که داشته باشیم $y(1) = 0$

ج) کوچک ترین مقدار مثبت t را بر حسب α بیابید که به ازای آن جواب صفر شود.

د) حد عبارت پیدا شده در قسمت قبل را وقتی $\alpha \rightarrow \infty$ به دست آورید.

۱۱. ابتدا تحقیق کنید که $y_1(t) = \sin t^2$ یک جواب برای معادله $ty'' - y' + 4t^2 y = 0$ روی $t > 0$ می‌باشد. سپس جواب مستقل خطی دیگری را با استفاده از کاهش مرتبه پیدا کنید.

۱۲. با تغییر متغیر مناسب ابتدا معادله زیر را به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

$$t^2 y'' + 2ty' - 6y = 0$$

۱۳. فرض کنید $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند و $t \in \mathbb{R}$. گیریم y_1, y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

باشند بطوریکه $W[y_1, y_2](t) = 0$ و $y_1(t) = 0$. ثابت کنید $y_1 = 0$ یا $y_2 = \frac{(y_2)'(t)}{(y_1)'(t)} y_1$.

۱۴. برای معادلهٔ اوایلر

$$x^2 y''(x) + a x y'(x) + b y(x) = 0, \quad x > 0,$$

الف) با تغییر متغیر $x = e^t$, $y(x) = u(t)$ نشان دهید معادله به شکل

$$u''(t) + (a - 1)u'(t) + b u(t) = 0.$$

در متغیر t تبدیل می‌شود.

ب) معادلهٔ مشخصه را بنویسید.

ج) در هر قسمت معادله دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

$$1. \quad x^2 y'' - 6y = 0.$$

$$2. \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

$$3. \quad x^2 y'' - xy' + 5y = 0.$$

۱۵. ابتدا تحقیق کنید که $y_1(t) = e^t$ یک جواب برای معادله $(t^2 + 3)y'' + (1 - t^2)y' - 4y = 0$ می‌باشد. سپس جواب مستقل خطی دیگری را با استفاده از کاهش مرتبه پیدا کنید.