



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری سوم

دانشکده علوم ریاضی

۱. مساله مقدار اولیه‌ی

$$y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1$$

را حل کنید و مشخص کنید جواب در چه بازه‌ای معتبر است؟

۲. الف) تحقیق کنید که $y_1(t) = 1 - t$ و $y_2(t) = \frac{-t^2}{4}$ ، هر دو جواب‌های مساله مقدار اولیه‌ی

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad y(2) = -1$$

هستند. هر کدام از این جواب‌ها در چه بازه‌ای معتبر هستند؟

ب) توضیح دهید چرا وجود دو جواب برای مساله‌ی داده شده، یکتایی جواب در قضیه وجود و یگانگی را نقض نمی‌کند.

۳. وجود و یکتایی جواب‌های مساله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y'(t) = (y(t))^{\frac{4}{5}}, \quad y(0) = 0$$

را بررسی کنید. سپس همه جواب‌ها را به دست آورید.

۴. الف) ابتدا تحقیق کنید تابع $y_1(t) = \frac{1}{t}$ جواب معادله دیفرانسیل $y' = \frac{-1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2$ می‌باشد و سپس جواب عمومی‌تر را بصورت $y(t) = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}$ فرض کنید و با جایگذاری در معادله $v(t)$ را به دست آورید. به این نوع معادلات ریکاتی می‌گویند.

ب) با استفاده از روش قسمت قبل جواب معادله زیر را به دست آورید. (ابتدا یک جواب خاص حدس بزنید)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2 \cos^2 t - \sin^2 t + y^2)}{2 \cos t}$$

۵. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y + t(1 + t^2 y^2) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (y > 0, t > 0)$$

الف) عامل انتگرال‌سازی به صورت تابعی از ty برای این معادله دیفرانسیل بیابید که آن را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کند.

ب) جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

۶. تمام توابع $f(t)$ را پیدا کنید بطوریکه معادله دیفرانسیل $y^2 \sin t + y f(t) \frac{dy}{dt} = 0$ کامل باشد. سپس معادله را برای هر کدام از این توابع حل کنید.

۷. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. در صورت لزوم از تغییر متغیر مناسب استفاده کنید.

الف)

$$y - xy' + \sin(y') = 0,$$

ب)

$$yy'' = y^2 y' + y'^2,$$

ج)

$$yy' = x(y')^2 - 1,$$

د)

$$yy'' + (y')^2 - 2yy' = 0,$$

ه)

$$1 + (y')^2 = 2yy'',$$