



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری دوم

دانشکده علوم ریاضی

۱. نشان دهید هر جواب معادله

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-ct}$$

که در آن a و c اعداد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی دلخواهی هستند، در بینهایت به صفر میل می‌کند.

۲. الف) ثابت کنید $\phi(t) = e^{2t}$ جواب معادله $y' - 2y = 0$ است و به ازای هر مقدار ثابت c ، $y = c\phi(t)$ هم جواب این معادله است.

ب) ثابت کنید به ازای $t > 0$ ، $\phi(t) = \frac{1}{t}$ جواب معادله $y' + y^2 = 0$ است. اما $y = c\phi(t)$ جواب این معادله نیست، مگر $c = 0$ یا $c = 1$.

ج) با توجه به دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای در مورد تفاوت دو معادله می‌گیرید؟

۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y' = \frac{t(y+1) + (y+1)^2}{t^2} \quad (t > 0)$$

۴. با توجه به عامل انتگرال ساز $\mu = \frac{5}{xy^2}$ ، مقدار A را یافته و جواب معادله داده شده را به دست آورید.

$$(Axy - 2y^2)dx + (3xy - y^2)dy = 0$$

۵. مقادیر α و β را بیابید به نحوی که $\mu = x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر باشد. سپس جواب معادله را به دست آورید.

$$y(4x + 3y^3)dx + x(2x + 5y^3)dy = 0$$

۶. الف) نشان دهید معادله‌ی

$$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$$

کامل است، سپس آن را حل کنید.

ب) ابتدا نشان دهید معادله‌ی

$$ydx + (2x - ye^y)dy = 0$$

کامل نیست، اما با ضرب در عامل انتگرال ساز $\mu(x, y) = y$ معادله را کامل کرده و آن را حل کنید.

۷. جواب معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش مناسب به دست آورید.

(الف)

$$y' = y - xy^3 e^{-x}.$$

(ب)

$$y \ln(x) \ln(y) dx + dy = 0.$$

(ج)

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 + y^2} + xy + y^2.$$

(د)

$$y' = \frac{y}{x} \cos x + \frac{\sin x}{y}.$$

(ه)

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 + y^2} + xy + y^2.$$

(و)

$$y' = \sin(x - y).$$