



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال اول ۰۴-۰۵
استاد: دکتر ابراهیمی، دکتر فنایی

تمرین سری اول

دانشکده علوم ریاضی

۱. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

(الف) $\frac{dy}{dt} + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{1}{1+t^2}$

(ب) $\frac{dy}{dt} = (1+y+t)^2$

(ج) $\frac{dy}{dt} + t^2y = t^2$

(د) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y+yt^2}$

۲. جواب مساله مقدار اولیه در هر قسمت را محاسبه کنید.

(الف) $y(0) = 1$ $\frac{dy}{dt} = ty^3(1+t^2)^{-\frac{1}{3}}$

(ب) $y(1) = \frac{1}{4}$ $\frac{dy}{dt} + 4ty = t$

۳. مقدار y را طوری بیابید که جواب مساله مقدار اولیه

$$y' - y = 1 + 3 \sin t, \quad y(0) = y.$$

وقتی $t \rightarrow \infty$ کراندار باقی بماند.

۴. مساله مقدار اولیه

$$y' - \frac{3}{4}y = 3t + 2e^t, \quad y(0) = y.$$

را در نظر بگیرید. مقدار y را طوری بیابید که جوابهایی را که وقتی $t \rightarrow \infty$ به طور مثبت رشد می کنند از آنها که به طور منفی رشد می کنند جدا کند. جواب متناظر مقدار بحرانی y وقتی $t \rightarrow \infty$ چگونه رفتار می کند؟

۵. مساله مقدار اولیه $y(0) = 1$ ، $y' + p(t)y = t$ را در نظر بگیرید که در آن

$$p(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \end{cases}$$

است. جواب پیوسته این مساله مقدار اولیه را، روی تمام اعداد حقیقی مثبت بیابید (دقت کنید چنین جوابی در تمام نقاط دارای مشتق نیست).

۶. نشان دهید هر جواب معادله

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-ct}$$

که در آن a و c اعداد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی دلخواهی هستند، در بینهایت به صفر میل می‌کند.

۷. روش زیر را برای حل معادله خطی مرتبه اول به کار می‌بریم:

$$y' + p(t)y = g(t).$$

الف) اگر برای تمام t ها $g(t) = 0$ باشد، نشان دهید که پاسخ به صورت زیر است:

$$y = A \exp \left[- \int p(t) dt \right],$$

که در آن A یک ثابت است.

ب) اگر $g(t)$ همه جا صفر نباشد، فرض کنید که پاسخ معادله به شکل زیر است:

$$y = A(t) \exp \left[- \int p(t) dt \right].$$

که در آن A اکنون تابعی از t است. با جایگذاری y در معادله دیفرانسیل داده شده، نشان دهید که $A(t)$ باید شرط زیر را ارضا کند:

$$A'(t) = g(t) \exp \left[\int p(t) dt \right].$$

ج) از معادله قبل مقدار $A(t)$ را بیابید. سپس $A(t)$ را در معادله قسمت (ب) جایگذاری کنید و y را تعیین نمایید.

این روش را روش تغییر پارامترها می‌نامند؛

د) با استفاده از روش گفته شده، معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y' + \frac{1}{t}y = 3 \cos 2t, \quad t > 0.$$