

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده

تمرین سری نهم
دانشکده علوم ریاضی

در تمرینهای ۱ تا ۳، مشخص کنید که کدام یک انتگرالها، همگرا و کدام یک واگراست، در صورت همگرا بودن مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

۱. $\iint_Q e^{-x-y} dA$ که در آن Q ربع اول صفحه مختصات دکارتی است. ✓

۲. $\iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}} dA$ روی مثلث T با رئوس $(1, 1)$ ، $(0, 0)$ و $(1, 2)$. ✓

۳. $\iint_T \frac{1}{x^2} e^{-y/x} dA$ که در آن ناحیه T به صورت $0 \leq y \leq x$ و $1 \leq x$

۴. هر دو ترتیب از انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید: ✓

$$\iint_S \frac{x-y}{(x+y)^3} dA,$$

که در آن S مربعی است به صورت $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$. با محاسبه:

$$\iint_T \frac{x-y}{(x+y)^3} dA,$$

که در آن T بخشی از مربع S است که زیر خط $x = y$ قرار دارد. نشان دهید که این انتگرال دوگانه ناسره وجود ندارد

در تمرینهای ۵ تا ۷، مقدار میانگین تابع داده شده را روی ناحیه داده شده بیابید.

۵. x^2 روی مستطیل $a \leq x \leq b$ ، $c \leq y \leq d$. ✓

۶. $x^2 + y^2$ روی مثلث $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq a - x$.

۷. $\frac{1}{x}$ روی ناحیه $0 < x \leq 1$ ، $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$. ✓

۸. آیا تابع $f(x, y) = xy$ روی ناحیه $0 \leq x < \infty$ ، $0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$ مقدار میانگین دارد؟ اگر دارد، آن را بیابید. ✓

۹. مقدار انتگرال $\iint_C y dA$ را که در آن C نیمه‌ی بالایی کاردئوید (قلبی شکل) $r \leq 1 + \cos \theta$ است، محاسبه کنید. ✓

۱۰. مقدار حجم ناحیه واقع بین کره و استوانه داده شده

$$x^2 + y^2 = ax \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

را بیابید. ✓

۱۱. مقدار انتگرال دوگانه $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(x^2+y^2) dA$ را محاسبه کنید.

۱۲. مساحت ناحیه‌ای در ربع اول بیابید که توسط منحنی‌های $xy=1$, $xy=4$, $y=x$ و $y=2x$ محدود شده است.

۱۳. فرض کنید T مثلثی با رئوس $(0,0)$, $(1,0)$ و $(0,1)$ باشد. انتگرال زیر را طبق قسمت های الف و ب محاسبه کنید: ✓

$$\iint_T e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$$

(الف) با تبدیل به مختصات قطبی،

(ب) با استفاده از تبدیل $u=y-x$ و $v=y+x$

در تمرینهای ۱۴ تا ۱۷، انتگرال‌های سه‌گانه را روی ناحیه‌ی مشخص شده محاسبه کنید.

۱۴.

$$\iiint_D (3+2xy) dV,$$

که در آن D گنبد نیم‌کره‌ای شکل است که توسط $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ و $z \geq 0$ مشخص شده است. ✓

۱۵.

$$\iiint_R x dV,$$

روی چهاروجهی محدود شده توسط صفحات مختصات و صفحه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. ✓

۱۶.

$$\iiint_R \sin(\pi y^2) dV$$

روی هرمی با رأس‌های $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,0)$

۱۷.

$$\iiint_R y dV$$

روی بخشی از مکعب $0 \leq x, y, z \leq 1$ که بین صفحه‌های $y+z=1$ و $x+y+z=2$ قرار دارد.

۱۸. انتگرالهای تکراری داده‌شده زیر را به صورت یک انتگرال سه‌گانه بیان کنید و ناحیه‌ای را که انتگرال بر روی آن گرفته می‌شود، رسم نمایید. انتگرال را به‌گونه‌ای بازنویسی کنید که خارجی‌ترین متغیر انتگرال x و متغیر داخلی‌ترین متغیر انتگرال z باشد. ✓

$$\int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^x f(x, y, z) dy \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx \quad (\text{ب})$$

۱۹. حجم ناحیه‌ای را بیابید که درون هر سه استوانه دایره‌ای

$$x^2+y^2=a^2, \quad x^2+z^2=a^2, \quad y^2+z^2=a^2$$

قرار دارد. ✓ راهنما: طرحی از ناحیه در ربع اول رسم کرده و در صورت امکان از تقارن استفاده کنید.

توجه: در کلاس حل تمرین، فقط سوالاتی که جلوی آنها تیک قرمز ✓ زده شده حل می‌شوند.