

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده

تمرین سری هشتم
دانشکده علوم ریاضی

۱. انتگرالهای مکرر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 dx \int_0^x (xy + y^2) dy \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^\pi dx \int_{-x}^x \cos y dy \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^2 dy \int_0^y y^2 e^{xy} dx \quad (\text{ج})$$

۲. انتگرالهای زیر را روی نواحی داده شده محاسبه کنید.

$$\iint_T (x^2 + y^2) dA \quad (\text{آ}) \quad \text{که در آن } T \text{ مستطیل } 0 \leq x \leq a \text{ و } 0 \leq y \leq b \text{ است.}$$

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 \cos(y^2) + 3 \sin y - \pi) dA \quad (\text{ب})$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA \quad (\text{ج})$$

$$\iint_R xy^2 dA \quad (\text{د}) \quad \text{که در آن } R \text{ ناحیه‌ای محدود در ربع اول است که بین منحنی‌های } y = x^2 \text{ و } x = y^2 \text{ قرار دارد.}$$

$$\iint_D x \cos y dA \quad (\text{ه}) \quad \text{که در آن } D \text{ ناحیه‌ای در ربع اول بین محورهای مختصات و منحنی } y = 1 - x^2 \text{ است.}$$

$$\iint_R \frac{x}{y} e^y dA \quad (\text{و}) \quad \text{که در آن } R \text{ ناحیه‌ای با دامنه‌های } 0 \leq x \leq 1 \text{ و } x^2 \leq y \leq x \text{ است.}$$

$$\iint_T (1 - x - y) dA \quad (\text{ز}) \quad \text{که در آن } T \text{ مثلثی با رأس‌های } (0, 0), (1, 0), \text{ و } (0, 1) \text{ است.}$$

۳. ناحیه انتگرالگیری را ترسیم کرده و سپس انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2 + y^2} dy \quad (0 < \lambda) \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^1 dx \int_x^{1/\sqrt{x}} \sqrt{1 - y^2} dy \quad (\text{ج})$$

۴. حجم اجسام داده شده را بیابید،

$$(\text{آ}) \quad \text{پایین رویه } z = 1 - x^2 \text{ و بالای ناحیه محدود به } 0 \leq x \leq 1 \text{ و } 0 \leq y \leq x,$$

$$(\text{ب}) \quad \text{پایین رویه } z = 1 - x^2 - y^2 \text{ و بالای ناحیه محدود شده به } x \geq 0 \text{ و } y \geq 0 \text{ و } x + y \leq 1,$$

$$(\text{ج}) \quad \text{پایین رویه } z = 1/(x + y) \text{ و بالای صفحه } xoy \text{ که توسط صفحات } x = 1, x = 2, y = 0 \text{ و } y = x \text{ محدود شده است،}$$

$$(\text{د}) \quad \text{درون دو استوانه } x^2 + y^2 = a^2 \text{ و } y^2 + z^2 = a^2$$

۵. فرض کنید $F'(x) = f(x)$ و $G'(x) = g(x)$ روی بازه $a \leq x \leq b$ تعریف شده‌اند. مثلث T را با رأس‌های (a, a) ، (b, a) و (b, b) در نظر بگیرید. با انتگرال‌گیری مکرر انتگرال دوگانه $\iint_T f(x)g(y) dA$ در هر دو جهت، نشان دهید که:

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b g(y)F(y) dy$$

(این روشی جایگزین برای استخراج فرمول انتگرال‌گیری جز به جز است.)