

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده

تمرین سری ششم
دانشکده علوم ریاضی

۱. اگر $z = f(x, y)$ و $x = 2s + 3t, y = 3s - 2t$ مقادیر زیر را بیابید: ✓

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2},$ b) $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t},$ c) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

۲. $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(y^2, xy, -x^2)$ را برحسب مشتق‌های جزئی تابع f بیان کنید.

۳. اگر $f(x, y)$ همگن مثبت درجه k باشد و مشتق‌های جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد، نشان دهید:

$$x^2 f_{11}(x, y) + 2xy f_{12}(x, y) + y^2 f_{22}(x, y) = k(k-1)f(x, y).$$

۴. تابع دو متغیره زیر را در نظر بگیرید ✓

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

الف) نشان دهید برای هر (x, y) ، $F(x, y) = -F(y, x)$ ،
ب) نشان دهید برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $F_1(x, y) = -F_2(y, x)$ و $F_2(x, y) = -F_1(y, x)$ ،
ج) نشان دهید $F_1(0, y) = -2y$ و نتیجه بگیرید $F_{12}(0, 0) = -2$ ،
د) از قسمت ب و ج نتیجه بگیرید $F_2(x, 0) = 2x$ و $F_{21}(0, 0) = 2$ ،
ه) برای هر $x \neq 0$ ، $F_{12}(x, x)$ را بیابید،
و) آیا $F_{12}(x, y)$ در $(0, 0)$ پیوسته است؟ چرا؟

در تمرینهای ۵ تا ۷، یک تقریب خطی مناسب، برای مقدار تقریبی تابع داده شده در نقطه مورد نظر، بیابید.

۵. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ، نقطه $(\frac{2}{99}, \frac{1}{3})$

۶. $f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$ ، نقطه $(\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{1})$ ✓

۷. $f(x, y) = x e^{y+x^2}$ ، نقطه $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{92})$

در تمرینهای ۸ و ۹، دیفرانسیل تابع داده شده را بنویسید و از آن برای تقریب مقدار تابع در نقطه داده شده، استفاده کنید (با شروع از یک مقدار شناخته شده برای تابع در نزدیکی نقطه مورد نظر این تقریب زدن را شروع کنید).

۸. $z = x^2 e^{3y}$ ، $x = \frac{3}{5}, y = -\frac{2}{9}$ ✓

۹. $g(s, t) = \frac{s^2}{t}$ ، $g(\frac{2}{1}, \frac{1}{9})$

۱۰. ماتریس ژاکوبین $Df(x, y, z)$ را برای تبدیل از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^2$ که به وسیله $f(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 - x \ln z)$ تعریف شده است، بیابید. ✓ از $Df(2, 2, 1)$ کمک بگیرید تا مقدار تقریبی $f(1/98, 2/1, 1/3)$ را بیابید.

در تمرینات ۱۱ تا ۱۲، موارد زیر را بیابید:

(الف) گرادیان تابع داده شده در نقطه‌ی مشخص.

(ب) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع داده شده در نقطه‌ای که مختصات x و y آن داده شده است.

(ج) و معادله‌ی خط راست مماس، در نقطه‌ی داده شده. که بر منحنی سطح تابع داده شده از آن نقطه می‌گذرد،

$$11. \text{ در نقطه } (1, 1), f(x, y) = \frac{x-y}{x+y},$$

$$12. \text{ در نقطه } (2, 0), f(x, y) = e^{xy},$$

$$13. \text{ در نقطه } (1, -2), f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad \checkmark$$

در تمرینات ۱۴ و ۱۵، معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر سطح تراز تابع داده شده که از نقطه‌ی داده شده می‌گذرد را بیابید.

$$14. \text{ در نقطه } (\frac{\pi}{4}, \pi, \pi), f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z),$$

$$15. \text{ در نقطه } (0, 1, \frac{\pi}{3}), f(x, y, z) = ye^{-x^2} \sin z, \quad \checkmark$$

در تمرینات ۱۶ و ۱۷، نرخ تغییر تابع داده شده در نقطه‌ی داده شده و در جهت مشخص شده را بیابید.

$$16. \text{ تابع } f(x, y) = x^2y \text{ در نقطه } (-1, -1) \text{ و در جهت بردار } \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \checkmark$$

$$17. \text{ تابع } f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ در نقطه } (-1, 2) \text{ و در جهتی که با قسمت مثبت محور } x \text{ ها زاویه } 60^\circ \text{ میسازد}$$

$$18. \text{ فرض کنید } f(x, y) = \ln |\mathbf{r}| \text{ که در آن } \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ نشان دهید که } \nabla f = \frac{-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}. \quad \checkmark$$

$$19. \text{ فرض کنید } f(x, y, z) = |\mathbf{r}|^{-n} \text{ که در آن } \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \text{ نشان دهید که } \nabla f = \frac{-n\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{n+2}}.$$

۲۰. نشان دهید که در مختصات قطبی (r, θ) (که در آن $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$)، گرادیان یک تابع $f(r, \theta)$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ یک بردار یکه در جهت بردار مکان $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ است، و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ یک بردار یکه است که بر $\hat{\mathbf{r}}$ عمود است و در جهت افزایش θ قرار دارد. ✓

۲۱. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - 2xy^2 \end{cases}$$

برای مقادیر (x, y) نزدیک به $(1, 2)$ و مقادیر (u, v) نزدیک به $(5, -7)$.

(الف) $\frac{\partial y}{\partial u}$ و $\frac{\partial x}{\partial u}$ را در نقطه $(u, v) = (5, -7)$ بیابید. ✓

(ب) اگر $z = \ln(y^2 - x^2)$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial u}$ را در $(u, v) = (5, -7)$ محاسبه کنید. ✓

۲۲. اگر $F(x, y, z) = 0$ ، نشان دهید که:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

۲۳. اگر معادلات $x = f(u, v)$ ، $y = g(u, v)$ برای u و v به صورت توابعی از x و y حل شده باشند، نشان دهید که:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\partial(x, y)/\partial(u, v)}.$$

توجه: در کلاس حل تمرین، فقط سوالاتی که جلوی آنها تیک قرمز ✓ زده شده حل می‌شوند.